Moderne Physik 2

Universität Heidelberg
Sommersemester 2024

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann, Dr. Sara Konrad
Obertutor: Dr. Sara Konrad

Aufgabenblatt 8

Besprechung in der Übungsgruppe am 20.06.2024

1. **Magnetnadeln**. In der Vorlesung wurde ein System aus N Magnetnadeln vorgestellt. Rein durch Abzählung wollen wir statistische und thermodynamische Größen dieses Systems diskutieren. Die Magnetnadeln seien in einer Reihe aufgestellt und in ein äußeres, homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ eingebettet. Jede Magnetnadel sei entweder in Richtung des Magnetfeldes ausgerichtet oder in die Gegenrichtung. Die Energie, die eine einzelne Magnetnadel zum Gesamtsystem beiträgt, sei $E_i = \vec{m}_i \cdot \vec{B} = \pm mB$. Sie ist positiv, wenn die Nadel in Richtung des Magnetfeldes zeigt, anderenfalls negativ. Wir bezeichnen mit n_+ die Anzahl der Magnetnadeln, die in Richtung des Magnetfeldes ausgerichtet sind. Dann ist $n_- = N - n_+$ die Zahl der Magnetnadeln, die entgegen dem Magnetfeld ausgerichtet sind.

   (a) Wie lautet $n_+(E)$, wenn E die Gesamtenergie des Systems ist?

   (b) Ein einzelner Mikrozustand entspricht genau einer Konfiguration von Magnetnadeln. Er kann als N-dimensionaler Vektor dargestellt werden, wobei an i-ter Stelle $+1$ steht, wenn die Magnetnadel in Richtung des Magnetfeldes ausgerichtet ist, anderenfalls -1. Wie viele Mikrozustände sind mit einer Gesamtenergie E kompatibel?

   (c) Wie lautet die Entropie? Wir nehmen an, dass die Zahlen N, n_+, $n_- \gg 1$ sind, sodass die Stirling'sche Formel
   $$\ln(N!) \approx N \ln N \tag{25}$$
   verwendet werden kann.

   (d) Wie lautet die Temperatur
   $$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(E,N)}{\partial E} \ ? \tag{26}$$
   Warum kann dies als
   $$\frac{1}{T} = \frac{1}{2mB} \ln \frac{n_-}{n_+} \tag{27}$$
   geschrieben werden?

   (e) Was passiert bei $n_+ = n_-$ mit der Temperatur? Deuten Sie das Ergebnis!

2. **Adiabatische Zustandsänderung von Gasen**. Bei einer adiabatischen Zustandsänderung wird einem System Wärme weder zu- noch abgeführt. Nach dem ersten Hauptsatz gilt dann
   $$\mathrm{d}E = \delta W \ . \tag{28}$$
   Da die innere Energie des Gases mit der Temperatur und der Zahl der Freiheitsgrade f eines einzelnen Gasteilchens durch
   $$E = \frac{f}{2} nRT \tag{29}$$

verknüpft ist, ändert sich bei einer adiabatischen Zustandsänderung also auch die Temperatur des Gases. In einer der Lehrproben werden Sie gezeigt bekommen, dass die Zustandsgleichung eines idealen Gases im Gleichgewicht durch

$$PV = nRT \tag{30}$$

gegeben ist, wobei $R = N_A k_B$ die ideale Gaskonstante ist. Die Avogadrokonstante N_A gibt die Anzahl der Teilchen pro Mol an, und n ist die Stoffmenge.

(a) Erläutern Sie, warum bei gleicher Arbeit die Temperatur des Gases weniger steigt, wenn mehr Freiheitsgrade pro Teilchen zur Verfügung stehen. Was schließen Sie daraus für die Wärmekapazitäten des Gases?

(b) Leiten Sie aus der idealen Gasgleichung $\mathrm{d}T$ ab wenn (i) sich nur das Volumen um $\mathrm{d}V$ ändert oder (ii) sich nur der Druck um $\mathrm{d}P$ ändert.

(c) Wir betrachten nun eine Zustandsänderung bei konstantem Druck,

$$\mathrm{d}E = nc_P \mathrm{d}T - P\mathrm{d}V = n\left(c_p - R\right)\mathrm{d}T \ . \tag{31}$$

Warum müssen die Änderungen der Temperatur und der inneren Energie bei diesem Prozess auf diese Weise zusammenhängen?

(d) Nun betrachten wir eine Zustandsänderung bei konstantem Volumen,

$$\mathrm{d}E = nc_V \mathrm{d}T \ . \tag{32}$$

Warum müssen die Änderungen der Temperatur und der inneren Energie bei diesem Prozess auf diese Weise zusammenhängen?

(e) Warum muss dieselbe Temperaturerhöhung $\mathrm{d}T$ bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen mit derselben Erhöhung der inneren Energie $\mathrm{d}E$ einher gehen? Wurde in der Vorlesung nicht gesagt, dass Sie mehr Energie benötigen, wenn Sie Wasser bei konstantem Druck zum Kochen bringen wollen als bei konstantem Volumen (Dampfkochtopf)? Erläutern Sie! Was folgt für den Zusammenhang zwischen c_P und c_V?

(f) Verwenden Sie das Ergebnis aus a), um die Wärmekapazitäten als Funktion der Freiheitsgrade anzugeben!

(g) Für einen adiabatischen Prozess gilt

$$\mathrm{d}E = -P\mathrm{d}V = \frac{f}{2} nR\mathrm{d}T \ . \tag{33}$$

Verwenden Sie aufgrund der idealen Gasgleichung

$$P\mathrm{d}V + V\mathrm{d}P = nR\mathrm{d}T \ , \tag{34}$$

um aus der obigen Gleichung $\mathrm{d}T$ zu eliminieren. Formen Sie die Gleichung soweit um, bis Sie einen Ausdruck für $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}$ übrig behalten. Wie hängen Druck und Volumen miteinander zusammen? Welche Rolle spielen die Freiheitsgrade, welche die Wärmekapazitäten? Beziehen Sie den Parameter

$$\gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{c_P}{c_V} \tag{35}$$

ein.