

# Moderne Physik 2

Universität Heidelberg  
Sommersemester 2024

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann, Dr. Sara Konrad  
Obertutor: Dr. Sara Konrad

## Aufgabenblatt 7

Besprechung in der Übungsgruppe am 13.06.2024

1. **Abzählung von Mikrozuständen.** In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass die Energieeigenzustände für ein Teilchen (ohne Spin) im eindimensionalen unendlichen Potential in der Ortsdarstellung gegeben sind durch

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (18)$$

In einem dreidimensionalen Würfel mit Kantenlänge  $L$  ist die Wellenfunktion das Produkt aus drei solchen eindimensionalen Wellenfunktionen,

$$\psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right), \quad (19)$$

und somit durch drei Quantenzahlen  $n_x$ ,  $n_y$  und  $n_z$  charakterisiert.

- (a) Wie lautet die Energie eines Teilchens in einem solchen Würfel, ausgedrückt durch  $n_x$ ,  $n_y$  und  $n_z$ ? Wie sein Impuls?
- (b) Wir wollen nun wissen, wie viele Mikrozustände  $\Phi(E)$  für ein einzelnes Teilchen im dreidimensionalen Kasten zugänglich sind, wenn die Energie des Teilchens kleiner oder gleich  $E$  ist. Wären auch negative Werte für die Quantenzahlen erlaubt, dann wäre die Anzahl der zugänglichen Mikrozustände proportional zu

$$\Phi(E) \propto \frac{4\pi}{3} E^{3/2}. \quad (20)$$

Wie lautet der korrekte Vorfaktor, sodass Gleichheit gilt? Welchen zusätzlichen Faktor müssen Sie einfügen, damit nur Zustände mit positive Quantenzahlen gezählt werden? *Tipp:* Erstellen Sie eine Skizze eines dreidimensionalen Koordinatensystems. Auf jeder Achse sei die jeweilige Quantenzahl angegeben. Umranden Sie nun einzelne Phasenraumzellen (zu jeder Zelle gehört genau ein Mikrozustand). Welche Phasenraumzellen entsprechen Mikrozuständen mit Energien  $\leq E$ ?

- (c) Wir betrachten nun  $N$  Teilchen in dem dreidimensionalen Würfel mit Kantenlänge  $L$ . Für jedes Teilchen seien alle Impulskomponenten bekannt. Die Teilchen wechselwirken nicht miteinander. Warum lässt sich der Mikrozustand für ein solches System darstellen durch die Quantenzahlen aller Teilchen, also

$$(n_{x,1}, n_{y,1}, n_{z,1}, n_{x,2}, \dots, n_{z,N})? \quad (21)$$

- (d) Wie lautet die Gesamtenergie für das System von  $N$  Teilchen in dem Würfel, abhängig von den Quantenzahlen?

(e) In  $3N$  Dimensionen ist ein Ball mit Radius  $R$  durch die folgende Bedingung definiert:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{3N}^2 = \sum_{i=1}^{3N} x_i^2 = R^2 . \quad (22)$$

Das Volumen für einen  $3N$ -dimensionalen Ball ist

$$V_{3N}(R) = \frac{\pi^{3N/2}}{\left(\frac{3N}{2} - \frac{1}{2}\right)!} R^{3N} . \quad (23)$$

Warum ist die Zahl der Mikrozustände für  $N$  Teilchen in dem Würfel mit Gesamtenergie kleiner gleich  $E$  gegeben durch

$$\Phi(E) = \frac{1}{2^{3N}} V_{3N} \left( \frac{\sqrt{2mEL}}{\hbar\pi} \right) ? \quad (24)$$

Schreiben Sie den vollen Ausdruck aus.