Moderne Physik 2

Universität Heidelberg
Sommersemester 2024

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann, Dr. Sara Konrad
Obertutor: Dr. Sara Konrad

Aufgabenblatt 6

Besprechung in der Übungsgruppe am 06.06.2024

1. **Drehimpuls**. Nach Noethers Theorem ist der Drehimpuls in solchen physikalischen Systemen erhalten, die rotationssymmetrisch sind.

   (a) Nennen Sie Beispiele für rotationssymmetrische Quantensysteme.

   (b) Der Drehimpuls $\vec{L}$ für ein klassisches Punktteilchen mit Position $\vec{r}$ und Impuls $\vec{p}$ ist gegeben durch
   $$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{pmatrix} yp_z - zp_y \\ zp_x - xp_z \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} . \tag{10}$$
   In der Quantenmechanik lässt sich der Operator $\hat{\vec{\ell}}$ für den Bahndrehimpuls aus dem klassischen Ausdruck konstruieren: Den Ortsvektor $\vec{r}$ ersetzt man durch den Ortsoperator $\hat{\vec{r}}$ (in der Ortsdarstellung ist der Ortsoperator einfach der Ortsvektor), und den Impulsvektor $\vec{p}$ durch den Impulsoperator $\hat{\vec{p}}$. Die Komponenten des Impulsoperators (in der Ortsdarstellung) sind gegeben durch $\hat{p}_x = -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Wie lauten die Komponenten $\hat{\ell}_x$, $\hat{\ell}_y$ und $\hat{\ell}_z$ des Bahndrehimpulsoperators?

   (c) Berechnen Sie alle Kommutatoren der Komponenten des Bahndrehimpulsoperators, also die Größen
   $$\left[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_x\right] , \quad \left[\hat{\ell}_y, \hat{\ell}_y\right] , \quad \left[\hat{\ell}_z, \hat{\ell}_z\right], \quad \left[\hat{\ell}_x, \hat{\ell}_y\right] , \quad \left[\hat{\ell}_y, \hat{\ell}_z\right] , \quad \left[\hat{\ell}_z, \hat{\ell}_x\right] . \tag{11}$$
   Was schließen Sie aus den Ergebnissen im Hinblick auf Messungen und auf Eigenfunktionen der Operatoren $\hat{\ell}_x$, $\hat{\ell}_y$ und $\hat{\ell}_z$?

   (d) Berechnen Sie
   $$|\hat{\vec{\ell}}|^2 = \hat{\ell}_x^2 + \hat{\ell}_y^2 + \hat{\ell}_z^2 . \tag{12}$$

   (e) Berechnen Sie den Kommutator
   $$\left[\hat{\ell}_z, \left|\hat{\vec{\ell}}\right|^2\right] . \tag{13}$$
   Was schließen Sie aus dem Ergebnis im Hinblick auf Messungen und auf Eigenfunktionen von $\hat{\ell}_z$ und $|\hat{\vec{\ell}}|^2$?

   (f) Der Energieoperator, auch Hamiltonoperator genannt, für das Wasserstoffatom lautet
   $$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\right) - \frac{e^2}{|x^2 + y^2 + z^2|^{1/2}} . \tag{14}$$
   Erklären Sie die einzelnen Terme, die er enthält.

   (g) Die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ sind Funktionen, die als Argument die Winkel $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ bekommen und von zwei Parametern l und m abhängen. Mögliche Werte für l sind alle natürlichen Zahlen $l = 0, 1, 2, \ldots$, für m sind es ganze Zahlen $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$. Die Kugelfächenfunktionen sind orthogonal und vollständig. Was bedeutet das anschaulich?

(h) Es zeigt sich, dass die Kugelflächenfunktionen zugleich Eigenfunktionen des Gesamtdrehimpulsoperators $|\hat{\vec{\ell}}|^2$ und der Komponente $\hat{\ell}_z$ sind, wenn von kartesischen Koordinaten (x, y, z) in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) gewechselt wird, sodass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} . \tag{15}$$

Es gilt dann (Sie brauchen dies nicht zu zeigen)

$$\left|\hat{\vec{\ell}}\right|^2 Y_{lm} = h^2 l(l+1) Y_{lm} \,, \quad \hat{\ell}_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm} \,. \tag{16}$$

Außerdem gilt (wenn Sie möchten, können Sie dies überprüfen)

$$\left[\hat{H}, \hat{\ell}_z\right] = 0 \,, \quad \left[\hat{H}, \left|\hat{\vec{\ell}}\right|^2\right] = 0 \,. \tag{17}$$

Was können Sie aus diesen Kommutatorrelationen schließen? Erläutern Sie Ergebnisse für das Wasserstoffatom, die Sie in der Vorlesung gesehen haben, anhand dieser Gleichungen.