Moderne Physik 2

Universität Heidelberg
Sommersemester 2024

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann, Dr. Sara Konrad
Obertutor: Dr. Sara Konrad

Aufgabenblatt 5

Besprechung in der Übungsgruppe am 06.06.2024

1. **Darstellung von quantenmechanischen Zuständen**. Wir betrachten in dieser Aufgabe ein quantenmechanisches Teilchen in einer Raumdimension ohne Spin. Wir interessieren uns für die Messgrößen Impuls und Ort eines Teilchens.

   (a) Das Teilchen sei so präpariert, dass für seinen Impuls nur diskrete Werte p_n in Frage kommen. Stellen Sie einen beliebigen Zustand eines Teilchens möglichst allgemein dar.

   (b) Der Ort des Teilchens ist dagegen eine kontinuierliche Messgröße. Erläutern Sie, warum der Zustand des Teilchens durch eine kontinuierliche Funktion $\psi(x)$ und nicht durch einen diskreten Vektor dargestellt werden muss, wenn Sie sich für seinen Ort interessieren. Welche Bedingungen muss diese Funktion erfüllen? Was bedeutet die Größe $|\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x)$?

   (c) Der Impulsoperator (in der Ortsdarstellung) ist gegeben durch $\hat{p} = \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Warum sind die Eigenvektoren des Impulsoperators Funktionen? Können Sie die Eigenfunktionen des Impulsoperators erraten?

   (d) Sie messen den Impuls des Teilchens und erhalten den Messwert p_n. Zeigen Sie mithilfe der Axiome der Quantenmechanik und Ihrem Ergebnis aus c), dass für eine direkt darauf folgende Messung des Ortes das Ergebnis nicht vorhergesagt werden kann. Was kann dagegen sicher vorhergesagt werden?

2. **Erwartungswert eines Operators**. Wir betrachten nun ein quantenmechanisches System im Zustand $|\psi\rangle$ und eine Messgröße mit zugehörigem Operator $\hat{O}$ mit einem diskreten Spektrum aus Eigenwerten o_n, die zu Eigenvektoren $|n\rangle$ gehören, sodass gilt:

$$\hat{O}|n\rangle = o_n|n\rangle \tag{7}$$

   (a) Wir möchten diese Messgröße an unserem quantenmechanischen System messen. Die Wahrscheinlichkeit, den Wert o_n zu messen, sei p_n, wobei $\sum_n p_n = 1$ ist. Stellen sie den Zustand $|\psi\rangle$ mithilfe der Eigenvektoren des Operators $\hat{O}_n$ dar.

   (b) Wir wenden den Operator $\hat{O}$ auf $|\psi\rangle$ an. Bestimmen Sie

$$\hat{O}|\psi\rangle\ . \tag{8}$$

   (c) Warum ist es sinnvoll, die Größe

$$\langle\psi\,|\hat{O}|\psi\rangle \tag{9}$$

   als den *Erwartungswert* der Messgröße zu bezeichnen?