Moderne Physik 2

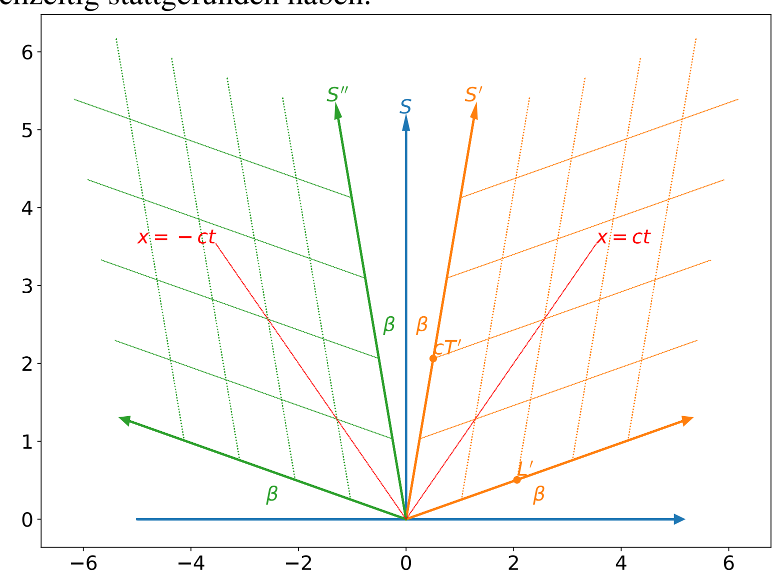
Universität Heidelberg
Sommersemester 2024

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann, Dr. Sara Konrad
Obertutor: Dr. Sara Konrad

Aufgabenblatt 3

Besprechung in der Übungsgruppe am 16.05.2024

1. **Faktoren in der Lorentz-Transformation**. In der Vorlesung wurden an der Tafel die Längenkontraktion und die Zeitdilatation demonstriert: Ein Maßstab der Ruhelänge L wird in einem relativ dazu bewegten System verkürzt gemessen. Eine bewegte Uhr scheint langsamer zu gehen als eine ruhende. Diesen Phänomenen liegt zum einen die Tatsache zugrunde, dass für einzelne Ereignisse die Koordinaten transformiert werden müssen. Bei der Längenkontraktion kommt noch hinzu, dass sich relativ zueinander bewegte Beobachter nicht notwendigerweise darüber einig sind, ob zwei Ereignisse gleichzeitig stattgefunden haben.



   (a) Wir betrachten wie in der Vorlesung zwei relativ zueinander bewegte Systeme S' und S'' aus der Sicht eines dritten Systems S, in dem sich S' und S'' mit gegengleichen Geschwindigkeiten bewegen (s. Abbildung). Die Koordinatenachsen von S' und S'' seien relativ zu denen von S jeweils um den Winkel β verkippt. Warum ist S notwendig, um in einem Raum-Zeit-Diagramm absolute Aussagen treffen zu können?

   (b) Betrachten Sie in S' die Ereignisse $(0, 0)$ und $(ct', 0)$. Berechnen Sie rein geometrisch, wie die Koordinaten für diese Ereignisse in S'' abhängig von β lauten müssen.

   (c) Betrachten sie nun in S' das Ereignis $(0, L')$. Berechnen Sie wieder rein geometrisch, wie die Koordinaten für dieses Ereignis in S'' abhängig von β lauten muss.

   (d) Wie lauteten allgemein die Koordinaten in S'' für ein Ereignis (ct', x') in S'?

   (e) Zeigen Sie, dass $c^2t'^2 - x'^2 = c^2t''^2 - x''^2$ gilt und erklären Sie, warum das bedeutet, dass die Minkowski-Metrik bzw. der Minkowski-Abstand invariant unter Lorentztransformationen ist.

   (f) Nutzen Sie Ihr Ergebnis aus b), um die Relativgeschwindigkeit zwischen S' und S'' abhängig von β zu berechnen. Vergleichen Sie mit der Geschwindigkeit von S' und S'' relativ zu S.

2. **Bauen Sie sich eine skalare Feldtheorie**. In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie aufgrund einfacher Forderungen die Terme der Wirkung der Elektrodynamik konstruiert werden können. Diese Forderungen waren: (1) Gesucht wird eine Theorie für sechs Feldfreiheitsgrade (d.h. die Komponenten der $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder), (2) Lorentz-Invarianz, (3) Linearität bzw. das Superpositionsprinzip und (4) Gültigkeit des Coulomb-Gesetzes.

   (a) Wiederholen Sie die Begründung für jede dieser vier Forderungen.

   (b) Welche Terme treten in der Wirkung der Elektrodynamik auf und warum? Nennen Sie auch solche Terme, die nicht Teil dieser Wirkung sind, und begründen Sie, warum nicht.

   (c) Wir wollen nun schematisch eine lineare Feldtheorie konstruieren, die für ein skalares Feld gilt. Ein solches Feld ordnet jedem Punkt der Raumzeit eine einzelne Zahl zu, die in unserem Fall reell sein soll. Unsere Forderungen sind also: (1) Ein Feldfreiheitsgrad $\phi(t, \vec{x})$, (2) Lorentz-Invarianz und (3) Linearität bzw. das Superpositionsprinzip. Terme welcher Art können bzw. müssen in der Wirkung auftreten?

   (d) Wie können Sie die Wirkung dieser Theorie so erweitern, dass Teilchen an das Feld ϕ koppeln?

   (e) Bonus-Aufgabe: Nun erweitern wir die Theorie aus c) so, dass sie ein komplexes Skalarfeld beschreiben soll. Jedem Raum-Zeit-Punkt ordnet ein solches Feld eine komplexe Zahl zu. Wie sieht die Wirkung nun aus? Was dürfen Sie mit Ihrem Skalarfeld nun tun, ohne dass sich die Wirkung verändert?

3. **Lorentz-Kraft und Konstruktion der Elektrodynamik**. In der Vorlesung wurde argumentiert, dass wir zur Konstruktion der Elektrodynamik sechs Feldfreiheitsgrade benötigen, nämlich die Komponenten der $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder. Diese wurden auf die folgende Weise in den antisymmetrischen 4×4-Feldtensor F einsortiert,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   (a) Ergänzt man die Wirkung des elektromagnetischen Feldes um diejenige eines freien Teilchens mit der Masse m und der Ladung e und variiert sie nach der Teilchenbahn, folgt daraus die einfache Gleichung

$$ma = \frac{e}{c}\bar{F}u \tag{2}$$

   für die Lorentz-Kraft. Wegen der Vorzeichen in der Minkowski-Metrik tritt der Feldtensor F hier in der Form

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

   auf. Für Teilchen, die sich langsam gegenüber der Lichtgeschwindigkeit bewegen, sind die vierdimensionale Geschwindigkeit u und die vierdimensionale Beschleunigung a durch

$$u = \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}/(mc) \\ \vec{a} \end{pmatrix} \tag{4}$$

   gegeben, wobei ε die Energie des Teilchens ist. Können Sie damit die gewohnte Form der Lorentz-Kraft begründen,

$$m\vec{a} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)\ ? \tag{5}$$

Was bedeutet dann die übrige Komponente der vierdimensionalen Vektoren?

(b) Nehmen Sie nun an, Sie hätten die $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder anfänglich anders in den elektromagnetischen Feldtensor F einsortiert. Was würde dann für die Maxwell-Gleichungen und die Coulomb-Kraft folgen? Erläutern Sie dies anschaulich, indem Sie z.B. E_1 und B_1 vertauschen. *Hinweis*: Sie brauchen hier nichts zu rechnen; konzentrieren Sie sich auf die Ergebnisse.