Übungen „Moderne Physik 2 für Lehramt“ (PMPL2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2024

Dozenten: Prof. Dr. Matthias Bartelmann, Dr. Sara Konrad

Übungszettel 1

Besprechung in der Übungsgruppe am 2. Mai

1. Aufgabe: Gruppen, Gruppen und noch mehr Gruppen

In der Vorlesung wurden Symmetriegruppen am Beispiel der Dreh-Spiegelungen des gleichseitigen Dreiecks eingeführt. In dieser Aufgabe wollen wir diese wiederholen und uns weitere Gruppen genauer anschauen.

a) Wie viele und welche Elemente hat die Symmetriegruppe der Dreh-Spiegelungen des gleichseitigen Dreiecks? Erklären Sie, warum Verschiebungen nicht dazu gehören.

b) Eine Verknüpfungstabelle gibt an, welches Element der Gruppe man erhält, wenn man zwei beliebige Elemente in entsprechender Reihenfolge verknüpft. Verknüpfungstabellen haben den Vorteil, dass die Verknüpfungsvorschrift allgemein ohne zusätzliche Darstellung aufgeschrieben werden kann. Erstellen Sie eine Verknüpfungstabelle für die Symmetriegruppe der Dreh-Spiegelungen des gleichseitigen Dreiecks.

c) Inwiefern ist diese Gruppe „gleich“ zu der Permutationsgruppe mit drei Elementen? Wie sieht die Verknüpfungstabelle hierfür aus?

d) Wie viele Elemente besitzt die Symmetriegruppe der Dreh-Spiegelungen für ein gleichseitiges n-Eck? Wieveiele Elemente besitzt die Gruppe der Permutationen von n-Elementen? Für welche Werte von n können die Dreh-Spiegelungen und die Permutationen die „gleiche“ Gruppe bilden? Erklären Sie anschaulich, warum die beiden Gruppen für festes n in den meisten Fällen verschieden sein müssen.

e) Überzeugen Sie sich davon, dass die Menge der rationalen Zahlen ohne Null, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ (also die Menge derjenigen Zahlen, die als Bruch ganzer Zahlen dargestellt werden können), zusammen mit der Multiplikation eine Gruppe darstellt. Wie viele Elemente besitzt diese Gruppe?

f) Überzeugen Sie sich davon, dass die Menge der invertierbaren $n \times n$ Matrizen zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet. Wie viele Elemente hat diese Gruppe?

g) Die Symmetriegruppe des Einheitskreises in zwei Dimensionen stellt eine kontinuierliche Gruppe dar. Überlegen Sie sich mögliche geeignete Darstellungsräume (d.h. Mengen X, auf die diese Gruppe wirken kann) und die entsprechende Darstellung (d.h. mathematische Operationen, mit denen Gruppenelemente auf die Menge X wirken).

2. Aufgabe: Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

In der Vorlesung wurde folgendes behauptet: Wenn es eine obere Schranke c für die Geschwindigkeit gibt, so ist diese Geschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich. Das bedeutet: Bewegt sich irgendetwas in einem Inertialsystem mit Geschwindigkeit $v = c$, so ist dessen Geschwindigkeit in allen anderen Inertialsystemen ebenfalls $v' = c$. Wir wollen diese Behauptung anschaulich untermauern.

a) Sie und ein Kommilitone ruhen relativ zueinander und stehen sich im Abstand L gegenüber. Ihr Kommilitone wirft Ihnen zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Objekt auf geradlinig-gleichförmige Weise mit Geschwindigkeit $v = c$ zu. Welche Geschwindigkeit messen Sie, wenn das Objekt Sie erreicht?

b) Eine Kommilitonin beobachtet das Geschehen und fordert Sie auf, das Experiment zu wiederholen. Bei $t = 0$ wirft Ihr Kommilitone wieder ein Objekt mit $v = c$ auf Sie zu. Während es sich geradlinig-gleichförmig auf Sie zu bewegt, läuft die Kommilitonin ebenfalls geradlinig-gleichförmig mit Geschwindigkeit $v = w > 0$ von Ihnen in Richtung Ihres Kommilitonen, also dem Objekt entgegen. Mit welcher Geschwindigkeit sieht die Kommilitonin das Objekt auf sich zu kommen? Mit welcher Geschwindigkeit entfernt sich das Objekt von ihrer Kommilitonin?

c) An der Stelle, an der das Objekt ihre Kommilitonin passiert, sitzt deren physikalisch begabter Hund Berti. Mit welcher Geschwindigkeit fliegt das Objekt an Berti vorbei?

d) Schließen Sie daraus, dass die Maximalgeschwindigkeit, wenn sie nicht überschritten werden kann, in allen Inertialsystemen gleich ist, egal ob sie sich *in* oder *entgegen* der Bewegungsrichtung des Objekts bewegen.

3. Aufgabe: Konstanz der Lichtgeschwindigkeit II

Wir wollen nun den Spieß umdrehen und folgendes zeigen: Gibt es eine Geschwindigkeit, die in allen Inertialsystemen gleich ist, so folgt daraus, dass diese Geschwindigkeit nicht überschritten werden kann.

a) Stellen Sie sich vor, Sie führten das folgende Experiment durch: Ein Laserpointer und ein Spiegel stehen sich im Abstand L gegenüber, wobei der Laserpointer senkrecht auf den Spiegel zeigt. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ schicken Sie einen Laserimpuls in Richtung des Spiegels. Der Laserimpuls wird reflektiert und kommt zum Zeitpunkt $t_2 = \Delta t$ wieder bei Ihnen an. Berechnen Sie Δt.

b) Ihre Kommilitonin Janina radelt zufällig vorbei, während Sie das Experiment durchführen. Sie bewege sich geradlinig-gleichförmig mit Geschwindigkeit v senkrecht zur Verbindungslinie von Laserpointer und Spiegel. Zeichnen Sie den Verlauf des Laserimpulses aus Sicht von Janina.

c) Wenn der Laserimpuls aus Janinas Sicht bei $t'_0 = 0$ den Laserpointer verlässt, zu welchem Zeitpunkt $t'_2 = \Delta t'$ kommt er wieder dort an? Wie lange war der Laserimpuls aus Janinas Sicht unterwegs?

d) Zeigen Sie: Für zwei Ereignisse, die durch einen sich geradlinig-gleichförmig bewegenden Beobachter verbunden sind, ist die Größe $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$ konstant, d.h. unabhängig davon, von welchem sich relativ dazu geradlinig-gleichförmig bewegenden Beobachter sie gemessen werden. *Hinweis: Bei geeigneter Wahl der Koordinaten und Symmetrieargumente (welcher?) reicht es aus, eine Raumkoordinate zu betrachten.*

e) Warum ist es sinnvoll, diese invariante Größe $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2(\Delta\tau)^2$ *Eigenzeit* zu nennen? Welchen Wert hat die Eigenzeit für einen Lichtimpuls? Warum folgt daraus, dass sich nichts schneller als c bewegen kann?

4. Aufgabe: Raum-Zeit Diagramme

Raum-Zeit-Diagramme sind ein mächtiges Werkzeug, um viele Fragestellungen der speziellen Relativitätstheorie zu untersuchen.

a) Zeichnen Sie ein Raum-Zeit-Diagramm mit den folgenden Weltlinien: (1) Ihre eigene Weltlinie für den Fall, dass Sie sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ursprung des Koordinatensystems befinden und sich räumlich nicht bewegen. (2) Die Weltlinie einer relativ zu Ihnen ruhenden Kommilitonin Anna, die im Abstand L von Ihnen steht. (3) Die Weltlinie eines Laserimpules, den Sie zum Zeitpunkt $t = 0$ in positive x-Richtung aussenden. (4) Die Weltlinie eines Kommilitonen Bertram, der sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am selben Ort wie Sie befindet und der sich geradlinig-gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v = c/2$ auf Anna zu bewegt und diese passiert. (5) Die Weltlinie des Kommilitonen Michael, der sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei Anna befindet und sich mit $v = -c/2$ gleichförmig und geradlinig in Ihre Richtung bewegt, bis er auf Sie trifft. (6) Zeichnen Sie zwei beliebige Laserimpulse ein, die Bertram und Michael miteinander austauschen. Warum können Bertram und Michael miteinander Laserimpulse austauschen, obwohl ihre Relativgeschwindigkeit aus Ihrer Sicht gleich der Lichtgeschwindigkeit ist?

b) Zeichnen sie die Weltlinie eines Stabes, der sich mit Geschwindigeit v entlang seiner Längsrichtung von Ihnen weg bewegt und dessen Mittelpunkt zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Ihrer Position zusammenfällt. In Ihrem System hat der Stab die Länge L.

c) Zeichnen Sie mehrere Diagramme. In jedem Diagramm sollen zwei Ereignisse eingezeichnet sein, die jeweils verschiedene Bedingungen erfüllen. In allen Diagrammen sollen die beiden Ereignisse weder zur gleichen Zeit noch am gleichen Ort stattfinden. Die Bedingungen seien:

   i. Die Ereignisse können direkt durch einen Lichtimpuls verbunden werden.
   ii. Es existiert ein Inertialsystem, in dem die beiden Ereignisse am gleichen Ort, aber zu unterschiedlichen Zeiten stattfinden.
   iii. Es existiert kein Inertialsystem, in dem die beiden Ereignisse am gleichen Ort, aber zu unterschiedlichen Zeiten stattfinden.
   iv. Es existiert ein Inertialsystem, in dem die beiden Ereignisse zur gleichen Zeit, aber an unterschiedlichen Orten stattfinden.
   v. Es existiert kein Inertialsystem, in dem die beiden Ereignisse zur gleichen Zeit, aber an unterschiedlichen Orten stattfinden.

   Wann ist es möglich, dass ein Ereignis mit einem anderen in kausalem Kontakt steht, also dass ein Ereignis Ursache für das andere sein kann?