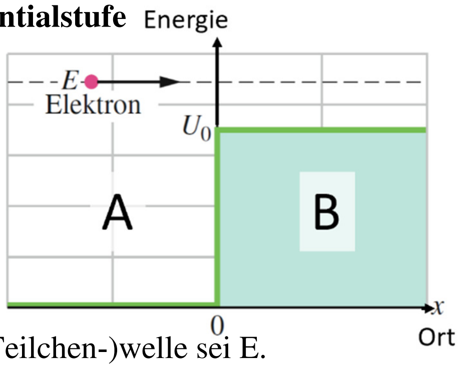
Übungen zur Vorlesung "Moderne Physik"
(Winter Semester 2023/24)
Matthias Weidemüller, Thomas Pfeifer, Gerhard Zürn

Übung 4

Diskussion am 16. November 2023

1. Streuung und Transmission an Potentialstufe

Gegeben sei folgendes Potential:
(aus *Halliday, Physik*)



Die Energie der von links eintreffenden (Teilchen-)welle sei E.

a) Stellen Sie die Schrödingergleichung für die Abschnitte A und B auf.
b) Was gilt für die Wellenfunktion an den Stellen, an denen sich das Potential ändert (Anschlussbedingungen)?
c) Wie lautet die Lösung der Wellenfunktion $\psi(x)$ (abschnittsweise definiert), und zeichnen Sie diese für $E > U_0$, sowie für verschiedene (Grenz-)fälle ($E \gg U_0, E = U_0$)?
d) Betrachten Sie nun eine Teilchenenergie $E < U_0$E0 und zeichnen Sie die Lösung $\psi(x)$.
e) Welche Abhängigkeit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Abstand a von der Stufe zu finden?
f) Nennen und beschreiben Sie eine Anwendung dieses quantenmechanischen Phänomens.

Lösung: siehe Mitschrift Übung/Photo Tafelbild

2. Symmetrie einer Zweiteilchenwellenfunktion

Gegeben ist die Wellenfunktion $\psi(x_A, x_B)$ zweier ununterscheidbarer Teilchen A und B (auch in gleichen inneren Zuständen) an den Orten x_A und x_B.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit Teilchen A an Ort A und Teilchen B an Ort B zu finden?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit Teilchen A an Ort A zu finden? (unabhängig vom Aufenthaltsort von Teilchen B)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit Teilchen A an Ort B zu finden, wenn die Teilchen …

   I. … Photonen sind?
   II. … Elektronen sind?
   III. … Lithiumatome sind?

d) Teilchen im Abstand r wechselwirken über das Coulomb-Potential $V = \frac{1}{r}$ miteinander. Betrachten Sie nun eine Produktwellenfunktion, die sich für zunächst unabhängige (z.B. weit voneinander entfernte) Teilchen als Teil einer Lösung eignet:

$$\psi(x_A, x_B) = f_A(x_A) \cdot f_B(x_B) + \cdots,$$

wobei $f_{A,B}(x)$ räumlich begrenzte Verteilungsfunktionen (z.B. Gaußsches Wellenpaket) darstellen. Wie lautet die vollständige Lösung für $\psi(x_A, x_B)$ für bosonische, wie für fermionische Teilchen?

e) In diesem Produktzustand werden die Teilchen nun näher zueinander gebracht (durch Veränderung der beiden Funktionen $f_{A,B}(x)$), bis diese sich anfangen zu überlappen. Berechnen Sie den Erwartungswert der potentiellen Energie

$$< V >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* V \, \psi \, dx_A dx_B$$

sowohl für eine bei Teilchenvertauschung symmetrische (Fall I) wie antisymmetrische (Fall II) Zweiteilchenwellenfunktion.

Lösung:

a) Betrachte entweder infinitesimal kleines dx oder endlich langes Stück im Raum Δx:

$$P(x_A, x_B)\, \overset{\Delta x_A}{dx_A} \overset{\Delta x_B}{dx_B} = |\psi(x_A, x_B)|^2 \overset{\Delta x_A}{dx_A} \overset{\Delta x_B}{dx_B}$$

b) $$P_A(x_A)\, \overset{\Delta x_A}{dx_A} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x_A, x_B)|^2 \, dx_B \right] \overset{\Delta x_A}{dx_A}$$

c) I: Photonen sind Bosonen ("Spin", Helizität 1, ganzzahlig):

$$\psi(x_B, x_A) = \psi(x_A, x_B), \text{ siehe a)/b)}$$

II: Elektronen sind Fermionen (Spin ½, halbzahlig):

$$\psi(x_B, x_A) = -\psi(x_A, x_B), \text{ siehe a)/b)}$$

Die Wahrscheinlichkeit (Betragsquadrat) hängt also für diese Funktion nicht davon ab, ob die Teilchen Fermionen oder Bosonen sind.

III: Abhängig vom Isotop (z.B. ^{6}Li oder ^{7}Li) sind es Fermionen (siehe II) oder Bosonen (siehe I).

d) für Bosonen:

$$\psi_B(x_A, x_B) = f_A(x_A)\cdot f_B(x_B) + f_A(x_B)\cdot f_B(x_A)$$

für Fermionen:

$$\psi_F(x_A, x_B) = f_A(x_A)\cdot f_B(x_B) - f_A(x_B)\cdot f_B(x_A)$$

siehe dazu auch Jupyter-Skript auf Übungsgruppenseite, auch zum weiteren mit Zweiteilchenwellenfunktionen

e) $$\iint \psi^* V \psi \, dx_A \, dx_B = \iint dx_A \, dx_B \Big\{ f_{AA}^* f_{BB}^* V f_{AA} f_{BB} + f_{AB}^* f_{BA}^* V f_{AB} f_{AB} \pm \big(f_{AA}^* f_{BB}^* V f_{AB} f_{BA} + f_{AB}^* f_{BA}^* V f_{AA} f_{BB} \big) \Big\}$$

Fall I: +, Fall II: -

0mit

$$f_{AA} = f_A(x_A) \ldots$$

für Gauß-Wellenpakete:

$$f = \exp\left(-\frac{(x-x_{A,0})^2}{w_A^2}\right)$$

$$f = f^* \Rightarrow (\ldots) > 0 \text{ da } V = \frac{1}{|x_A - x_B|} > 0$$

Fall II (-) liefert die kleinere Energie, da die Teilchen nie gleichzeitig am selben Ort sein dürfen und damit das hohe Potential $1/r$ für kleine r, welches durch ihre Abstoßung sich nicht so stark auswirkt wie für Fall I mit symmetrischer Ortswellenfunktion.

Anmerkung: In der Realität können auch **Spin**wellenfunktionen und ihre Vertauschungseigenschaften eine Rolle spielen, weswegen sowohl eine symmetrische wie antisymmetrische **Orts**wellenfunktion sowohl bei Fermionen wie bei Bosonen vorkommen kann, da die Wellenfunktionen z.B. das Produkt aus Orts- und Spinwellenfunktion sein kann, und nur diese **Gesamt**wellenfunktion muss bei Fermionen stets antisymmetrisch, bei Bosonen stets symmetrisch bezüglich der Teilchenvertauschung sein.

Schrödingers Katze/Entanglement

a) Lesen Sie folgendenden Abschnitt aus *Dorn-Bader Physik Kursstufe*

Exkurs: Schrödingers Katze

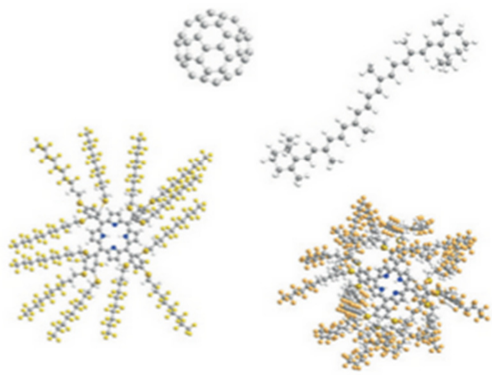
Wie im Bild lebe eine Katze in einem abgeschlossenen Kasten zusammen mit einer so geringen Menge eines radioaktiven Präparats, dass in einer Stunde vielleicht eines der Atome zerfällt, ebenso wahrscheinlich aber auch keines. Spricht ein Zählrohr darauf an, so zerbricht eine Zyankapsel; das austretende giftige Gas tötet die Katze.

Das Leben der Katze hängt von der Frage ab: Wurde das α-Teilchen schon emittiert oder noch nicht. Dies ist ein nicht vorhersehbarer, unbestimmter Quantenvorgang; die Theorie antwortet nicht mit „Ja" oder „Nein", sondern mit „Ja und Nein zugleich". Sie superponiert wie am Doppelspalt ($\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$) die Möglichkeit „Ψ_{ja}" mit „Ψ_{nein}" zu $\Psi = \Psi_{ja} + \Psi_{nein}$. Diesen klassisch unverständlichen Zustand des Quantenobjekts α-Teilchen verkoppelte SCHRÖDINGER über Zählrohr und Zyankapsel mit dem Makroobjekt Katze. Er verschränkte beide so, dass für die Katze im geschlossenen Kasten die paradoxe Aussage gilt: „Tot und lebendig zugleich" ($\Psi = \Psi_{tot} + \Psi_{lebend}$). Dies muss jedem absurd erscheinen.

Schrödingers Katze – Der österreichische Physiker und Mitbegründer der Quantenphysik Erwin SCHRÖDINGER (Nobelpreis 1933) erfand das wahrscheinlich bekannteste Gedankenexperiment der Welt um zu veranschaulichen, warum die Annahme paradox erscheint, dass solche Objekte sich wie Quanten verhalten können (**Exkurs**).

Dekohärenz – Ein Ansatz zur Aufklärung von SCHRÖDINGERS Katzenparadoxon zeichnete sich erst 60 Jahre nach seiner Originalarbeit ab. Die Theorie der Dekohärenz vermag zu erklären, weshalb Überlagerungszustände mikroskopisch auftreten, aber in der makroskopischen Welt nicht nachzuweisen sind.
Die zentrale Idee ist, dass man makroskopische Körper (wie die Katze) nicht isoliert betrachten kann. Sie besitzen immer eine natürliche Umgebung, mit der sie auf vielfältige Weise wechselwirken. Die Katze z.B. streut Licht, gibt Wärmestrahlung ab und beeinflusst die Luftmoleküle um sie herum. Schon beim Doppelspaltexperiment war zu sehen, dass keine Interferenz auftritt, sobald die Quanten mit ihrer Umgebung interagieren (Polarisationsfilter). Dabei ist es egal, ob das polarisierte Photon von einem Beobachter registriert wird oder nicht. Ebenso wirkt die Wechselwirkung mit der Umgebung im Fall der Katze: Die Streuung von Licht oder Gasmolekülen zerstört das Kennzeichen eines Überlagerungszustandes, die Interferenzfähigkeit. Durch Wechselwirkung mit ihrer Umgebung wird die Katze „effektiv klassisch". Sie ist tot *oder* lebendig; Überlagerungen oder Interferenzerscheinungen können nicht nachgewiesen werden.

Interferenz mit großen Molekülen – Es gibt jedoch auch Fälle, wo es experimentell gelingt, ein Objekt von seiner Umgebung abzuschirmen. Dann findet keine Dekohärenz statt und Interferenzphänomene werden auch bei großen Objekten nachweisbar.
An der Universität Wien gelang es 2013 z.B., Interferenz von komplexen organischen Molekülen nachzuweisen (Bild **B5**). Das schwerste davon bestand aus 810 Atomen und war über 10000-mal so schwer wie ein Wasserstoffatom. Auch Interferenz von Vitamin-Molekülen (z.B. α-Tocopherol, also Vitamin E) wurde nachgewiesen. Statt eines Doppelspalts wurde dazu eine Abfolge von materiellen Gittern und stehenden Lichtwellen verwendet. Sofern es gelingt, Dekohärenz zu verhindern und technische Probleme zu überwinden, kann Interferenz also auch bei großen Quantenobjekten auftreten.



B5 *Einige Moleküle, mit denen Interferenzexperimente durchgeführt wurden.*

b) Erläutern Sie den Unterschied zwischen den beiden folgenden Situationen:
I : Die "Katze" ist in einem der beiden Zustände "tot" oder "lebendig".
II: Die "Katze" ist einem Überlagerungszustand aus "tot" und "lebendig".

c) Wie lautet eine Zwei-Teilchen-Wellenfunktion, in der der Zustand des radioaktiven Atoms (Zustand "1": nicht zerfallen und Zustand "0": zerfallen) mit dem der Katze (Zustand "t": tot, Zustand "l": lebendig) gemeinsam abgebildet werden, jeweils für Situation I, sowie Situation II

d) Welches Experiment schlagen Sie vor um Situation I von II zu unterscheiden?

Lösung:

a) trivial

b) In Situation I kann die Katze, ohne nachzusehen, zwar mit gleicher Wahrscheinlichkeit tot oder lebendig sein, aber nur in Fall II entsteht dieser Zustand erst genau dann, wenn wir nachsehen (messen), vor der Messung befindet sich die Katze in einer Überlagerung aus beiden Zuständen, tot und lebendig.

c) Situation I: "tot":

$$\psi_{Ia} = |0,t\rangle = \underbrace{|0\rangle}_{\text{Atom}} \times \underbrace{|t\rangle}_{\text{Katze}}$$

Situation II: "lebendig":

$$\psi_{Ib} = |1,l\rangle = |1\rangle \times |l\rangle$$

Situation II: "tot" und "lebendig" überlagert:

$$\psi_{II} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{Normierung}} \left(|1,l\rangle + |0,t\rangle \right)$$

d) Ein Interferenzexperiment, in dem z.B. der Überlagerungszustand (Katze tot/lebendig) auf einen weiteren Zustand (z.B. schnelle Kompression des gesamten Inhalts des Kastens auf die Dichte eines Neutronensterns) schnell "projeziert" (gemessen) wird, in dem nicht mehr zu unterscheiden ist ob die Katze bis zum Zeitpunkt der Messung tot oder lebendig war. Die Struktur des sich ergebenden Neutronensterns könnte dann Information über die Interferenz zwischen den zwei (tot/lebendig) Zuständen enthalten. [Ein hypothetisches Experiment… die Schwierigkeit besteht schon allein darin, dass wirklich absolut keine Information über den Zustand der Katze nach außen dringt].