

Vorlesungsskript Bachelorvorlesung PEP4 2023:  
Kern- und Teilchenphysik

Ulrich Uwer

14. Juli 2023

# Kapitel I

## Atomphysik: Mehrelektronensysteme

### I.1 Wasserstoff - eine sehr kurze Wiederholung

Ausgangspunkt für die Behandlung des Wasserstoffproblems ohne Spin ist die dreidimensionale stationäre Schrödinger-Gleichung für das radialsymmetrische Coulomb-Potential:

$$\frac{-\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \text{ mit } V(\vec{r}) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|}$$

Der Einfachheit halber wurde hier  $\vec{r}$  als Relativvektor des Elektrons bezüglich eines ruhenden Protons gewählt.

- Die Lösungen dieser Wellengleichung  $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$  lassen sich aufgrund der Kugelsymmetrie des Potentials in Radial-  $R_{nl}(r)$  und Winkelanteile  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  aufspalten. Jeder Zustand  $\psi_{nlm}$  wird durch die drei Quantenzahlen  $\{n, l, m\}$  vollständig bestimmt. Häufig schreibt man  $\psi_{k=\{n,l,m\}}$  oder auch  $|\psi_k\rangle$  oder auch  $|k\rangle$ , um zu unterstreichen, dass der Zustand - unabhängig von der Darstellung - durch einen Satz von Quantenzahlen charakterisiert wird.
- Die zugehörigen Energieeigenwerte  $E_n$  hängen im Rahmen der Schrödinger-Theorie nur von der Hauptquantenzahl  $n$  ab. Es liegt Entartung der Zustände vor<sup>1</sup>: Zu jeder Quantenzahl  $n$  existieren  $n^2$  Zustände mit gleicher Energie  $E_n$ . Die Energieniveaus  $E_n$  sind gegeben durch:

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \mu \frac{Z^2 e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} = -Ry \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

---

<sup>1</sup>Die  $\ell$ -Entartung ist eine Eigenschaft des  $\frac{1}{r}$ -Potentials und weist auf eine weitere (hidden) Symmetrie des Hamilton-Operators hin.

mit der Rydbergenergie  $Ry$ ,

$$Ry = R \cdot hc = \frac{\mu \cdot e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}, \quad Ry = 13.605698 \text{ eV}$$

Die Rydbergenergie  $Ry$  bzw. Rydbergkonstante  $R$  hängt vom Wert der reduzierten Masse  $\mu = \frac{m_e \cdot m_K}{m_e + m_K}$  ab und ist damit für verschiedene Kernmassen etwas verschieden. Es ist deshalb üblich, die Rydbergkonstante  $R_\infty$  (bzw. die Rydbergenergie  $Ry_\infty = R_\infty \cdot hc$ ) für  $m_K = \infty$ , d.h. für ein reduzierte Masse  $\mu = m_e$  zu definieren:

$$Ry = R \cdot hc = R_\infty \cdot \frac{\mu}{m_e} \cdot hc$$

$$R_\infty = 10973731.568160 \text{ m}^{-1} \quad (\text{CODATA})$$

Mit der Feinstrukturkonstanten  $\alpha$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$$

kann man die Energielevel  $E_n$  auch schreiben als :

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \cdot \frac{\mu c^2}{2} \cdot \alpha^2 = -\frac{Z^2}{n^2} \cdot \frac{m_e c^2}{2} \cdot \alpha^2 \quad \text{für } m_K = \infty$$

Die Energieniveaus des Elektrons im Wasserstoff sind negativ, da das Elektron gebunden ist. Im Limit  $n = \infty$  handelt es sich um ein freies und nicht mehr gebundenes Elektron.

Feinstrukturkonstante und Einheiten:

SI-Einheiten:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137} \rightarrow e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Heaviside-Lorentz Einheiten:  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi \hbar c} = \frac{1}{137} \rightarrow e^2 = 18.07 \text{ MeVfm}$$

Gauß-Einheiten: (ebenfalls  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ )

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \rightarrow e^2 = 1.44 \text{ MeVfm}$$

Natürliche Einheiten:  $\hbar = c = 1$ ,  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \rightarrow e^2 = 0.092$$

Wellenlänge und Energie für Photonen:

$$E\lambda = 1234.5 \cdot 10^{-4} \text{ eVnm}$$

Nützliche Konstante in Atom- und Teilchenphysik:

$$\hbar c = 197 \text{ eVnm} = 197 \text{ MeVfm}$$

- Die Wahrscheinlichkeit  $W(r)dr$ , das Elektron im Abstand zwischen  $r$  und  $r + dr$  vom Kern anzutreffen, beträgt:

$$W(r)dr = \left( \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} |\psi(r, \theta, \phi)|^2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi \right) dr$$

Für  $n = 1$ ,  $l = 0$  und  $m_l = 0$  findet man:

$$W(r)dr = \frac{4Z^3}{a_0^3} r^2 e^{-2Zr/a_0} dr,$$

wobei  $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m_e} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar c}{e^2} \frac{\hbar c}{m_e c^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar c}{m_e c^2} = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{m}$  der Bohr-Radius ist<sup>2</sup>.

Die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte  $W(r)$  hat ein Maximum bei  $r_m = a_0/Z$ . Der Erwartungswert  $\langle r \rangle$  für den radialen Abstand des Elektrons ist durch  $\langle r \rangle = \int W(r)rdr$  gegeben und beträgt für Wasserstoff  $\frac{3}{2}a_0$ .

- Die freiwerdende Energie  $\Delta E$  beim Übergang zwischen Zuständen mit Hauptquantenzahlen  $k \rightarrow n$ , mit  $k > n$  und  $Z = 1$  beträgt:

$$\Delta E = E_k - E_n = Ry \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)$$

- Unter Berücksichtigung des Elektronenspins ( $s = \frac{1}{2}$ ,  $s_z = \pm\frac{1}{2}$ ,  $\rightarrow$  neue Quantenzahl  $m_s$ ) erhält man eine Gesamtwellenfunktion, die durch 4 Quantenzahlen  $k = \{n, l, m, m_s\}$  charakterisiert wird. Mit  $\chi_{m_s}$  als spinabhängigen Teil der Wellenfunktion erhält man für die Gesamtwellenfunktion:

$$\psi_k = \psi_{n,l,m} \cdot \chi_{m_s}$$

- Feinstrukturaufspaltung:

Berücksichtigt man den Elektronenspin kommt es aufgrund der Kopplung der magnetischen Momente des Spins  $\vec{s}$  und des Bahndrehimpulses  $\vec{l}$  zu einer Aufspaltung  $\Delta E \sim \vec{l} \cdot \vec{s}$  der entarteten Energieniveaus, die abhängig vom Gesamtdrehimpuls  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$  ist. Für Wasserstoff (Ein-Elektronensystem), erhält man  $j = l + \frac{1}{2}$  und  $j = l - \frac{1}{2}$  (s.u.).

Berücksichtigt man zusätzlich auch relativistische Effekte<sup>3</sup>, findet man, dass die Energieniveaus nur von  $n$  und  $j$  (Gesamtdrehimpuls) abhängen<sup>4</sup>:

$$E_{nj} = E_n \left\{ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n} \left( \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right\}$$

<sup>2</sup>In Gauss-Einheiten:  $a_0 = \frac{\hbar^2}{e^2 m_e} = \frac{\hbar c}{e^2} \frac{\hbar c}{m_e c^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{197 \text{MeVfm}}{0.511 \text{MeV}} = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{m}$

<sup>3</sup>Relativistische Effekte: Korrekterweise müsste man statt der nicht-relativistischen Schrödinger-Gleichung die Dirac-Gleichung nutzen. Stattdessen kann man als Näherung in der Schrödinger-Gleichung den relativistischen Energiesatz benutzen und erhält dann für die relativistische Korrektur  $\Delta E_{rel}$ ,

$$\rightarrow \Delta E_{rel} = E_n \cdot \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \left( \frac{3}{4n} - \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \right)$$

<sup>4</sup>Mit  $\alpha^2 \approx 5 \cdot 10^{-5}$  sind die Feinstruktur-Korrekturen entsprechend klein.

Für Wasserstoff bedeutet das, dass die Niveaus  $2s_{\frac{1}{2}}$  ( $n = 2, l = 0, j = \frac{1}{2}$ ) und  $2p_{\frac{1}{2}}$  ( $n = 2, l = 1, j = \frac{1}{2}$ ) gleiche Energie haben.

- Lamb-Shift:

Im Rahmen der Quanten-Elektrodynamik (QED) existieren Quantenfluktuationen des elektrischen Feldes, die zu einer Abschwächung des effektiv wirkenden Feldes führen: Im Rahmen der QED kann das zwischen Elektron und Proton ausgetauschte Photon kurzzeitig in ein  $e^+e^-$ -Paar fluktuieren, das die sichtbare Ladung abschwächt. Auch kann das Elektron Photonen emittieren und kurze Zeit später wieder absorbieren. Beide Effekte werden im Rahmen der Teilchenphysik in Kapitel III behandelt.

Die Quantenkorrekturen sind umso stärker, je stärker das Elektron gebunden ist, d.h., je näher das Elektron am Kern ist. Die Korrekturen hängen deshalb von  $(n, l)$  ab. Das führt bei der Feinstruktur zu einer Aufhebung der  $(n, j)$ -Entartung für verschiedene  $l$ -Werte. Die Entartung der  $2s_{\frac{1}{2}}$  ( $n = 2, l = 0, j = \frac{1}{2}$ ) und  $2p_{\frac{1}{2}}$  ( $n = 2, l = 1, j = \frac{1}{2}$ ) Niveaus im Wasserstoff wird also aufgehoben.

- Hyperfeinstrukturaufspaltung:

Aufgrund der Wechselwirkung der magnetischen Momente des Elektron-Gesamtdrehimpulses  $\vec{j}$  (bei Mehrelektronensystemen Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$ ) mit dem Spin des Kerns (Protons)  $\vec{I}$  kommt es zu einer Aufspaltung die proportional zu  $\vec{J}\vec{I}$  ist und vom Abstand des Elektrons vom Kern abhängt ( $\rightarrow$  abhängig von  $l$ ). Die Spins  $\vec{J}$  und  $\vec{I}$  koppeln zum Gesamtspin  $\vec{F}$ . Die mit den Spins und Drehimpulsen verbundenen magnetischen Momente sind antiproportional zur Masse der Teilchen. Aus diesem Grund sind die Kernmomente um ungefähr einen Faktor 2000 kleiner als die magnetischen Momente der Elektronen. Entsprechendes gilt für die Hyperfeinstrukturaufspaltung.

- Kopplung oder Addition von Drehimpulsen:

Für ein Elektron mit Bahndrehimpuls  $\vec{l}$  ( $l, m_l$ ) und Spin  $\vec{s}$  ( $s = \frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2}$ ) koppeln (addieren sich) die Drehimpulse zum Gesamtdrehimpuls  $\vec{j}$  ( $j, m_j$ ) wobei aufgrund der vektoriellen Addition mehrere Werte des Gesamtdrehimpulses  $j$  möglich sind:

$$|l - s| \leq j \leq l + s \rightarrow j = |l - s|, |l - s + 1|, \dots, l + s$$

$$m_j = m_l + m_s$$

#### Drehimpulskopplung und Clebsch-Gordan Koeffizienten:

Die Zustandsräume zweier Drehimpulse  $\vec{j}_1$  und  $\vec{j}_2$ , die gleichzeitig gemessen werden können ( $[\vec{j}_1, \vec{j}_2] = 0$ ) durch jeweils einen Satz von Eigenvektoren  $|j_1; m_1\rangle$  und  $|j_2; m_2\rangle$  aufgespannt. Die beiden Drehimpulse können zu einem Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  koppeln dessen Zustandsraum sich durch die möglichen Zustände  $|J; M\rangle$  ergibt. Die Eigenvektoren  $\vec{J}$  werden durch die Quantenzahlen  $|J; M, j_1, j_2\rangle$  vollständig bestimmt.

Da sich der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  aus den beiden Einzeldrehimpulsen  $\vec{j}_1$  und  $\vec{j}_2$  ergibt, können die Eigenzustände zu  $\vec{J}$  im Produktraum der Eigenzustände von  $\vec{j}_1$

und  $\vec{j}_2$  dargestellt werden:  $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ . Diese Zustände sind aber im Allgemeinen keine Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses. Den Zusammenhang zwischen der Produktbasis  $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$  und den Eigenzuständen  $|J, M, j_1, j_2\rangle$  beschreiben die Clebsch-Gordan-Koeffizienten:

$$|J, M, j_1, j_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M, j_1, j_2\rangle$$

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten  $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M, j_1, j_2\rangle$  sind reelle Koeffizienten. Sie sind gleich null, wenn die Bedingung

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \quad \text{und} \quad M = m_1 + m_2$$

nicht erfüllt ist. Eine Tabelle mit Beispielen zu bestimmten Werten von  $j_1$  und  $j_2$  findet sich im PDG<sup>5</sup>.

Abbildung I.1 zeigt das Energiespektrum des Wasserstoffatoms und den Einfluss verschiedener Effekte.

---

<sup>5</sup><https://pdg.lbl.gov/2021/reviews/rpp2021-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf>

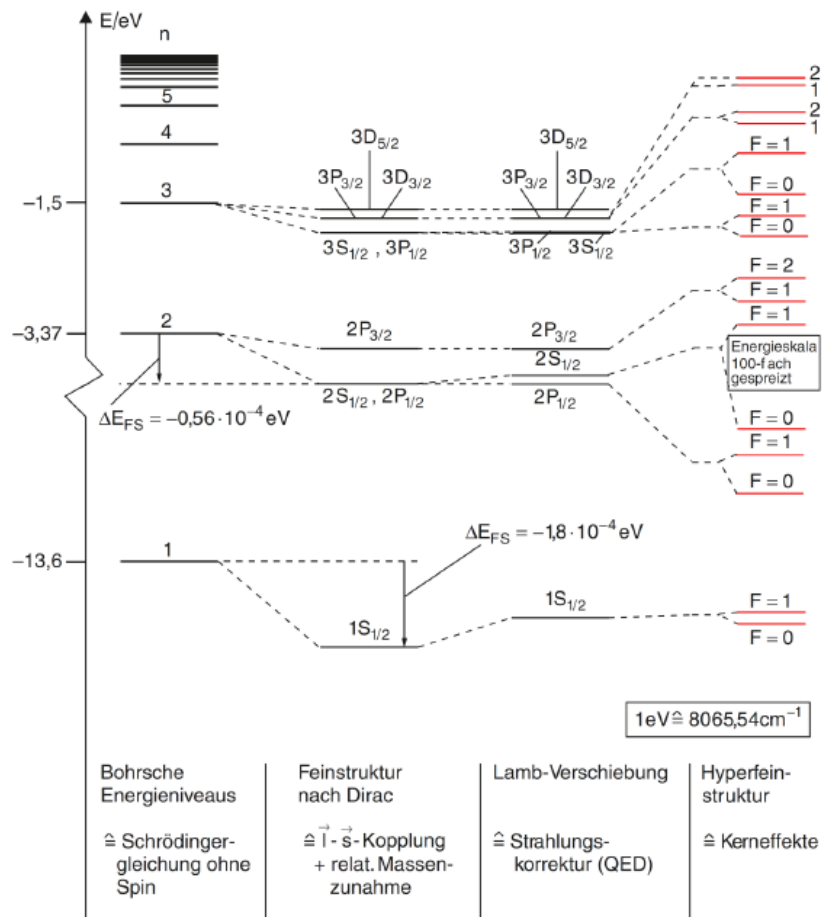


Abbildung I.1: Energieniveaus des Wasserstoffatoms bei Berücksichtigung verschiedener Effekte. (entnommen: Demtröder 3)

## 1.2 Helium-Atom

Mehrelektronensysteme stellen Vielkörperprobleme dar, die nur noch mit Näherungsmethoden gelöst werden können. Neben der elektromagnetischen Wechselwirkung der Elektronen miteinander treten in Quantensystemen identischer Teilchen aber neue Effekte auf, die sich aus der Ununterscheidbarkeit der Teilchen ergeben.

### 1.2.1 Wechselwirkung der Elektronen im Helium-Atom

In der Schrödinger-Gleichung für Helium muss die gegenseitige elektrische und magnetische Wechselwirkung der Elektronen berücksichtigt werden. Für den Hamilton-Operator  $\hat{H}$  ergibt sich dann der Ausdruck:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{Z=2} \left( \frac{\vec{p}_i^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i|} \right) + \sum_{i,j:i < j} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \hat{O}(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{I})$$

Der zweite Term im Hamiltonian beschreibt die Coulomb-Abstoßung der Elektronen, die das effektive Bindungspotential verringert. Zudem führt der Term dazu, dass das effektive Potential nicht mehr radialsymmetrisch ist. Der dritte Term beschreibt die magnetische Wechselwirkung der Drehimpulse und Spins miteinander und soll hier erst einmal vernachlässigt werden. Die Schrödinger-Gleichung lässt sich im allgemeinen Fall nur noch durch Näherungsmethoden lösen.

Eine häufig benutzte Näherung ist die Zentralfeldnäherung, bei der man annimmt, dass sich jedes Elektron  $i$  unabhängig vom anderen in einem effektiven Zentralpotential  $V_Z(|\vec{r}_i|)$  befindet. Dies erlaubt die Schrödinger-Gleichung für die beiden Elektronen unabhängig von einander zu lösen<sup>6</sup>, so dass man Lösungen  $\psi_a(\vec{r}_1)$  und  $\psi_b(\vec{r}_2)$  erhält. Die Gesamtlösung lässt sich dann als Produkt schreiben<sup>7</sup>:  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_a(\vec{r}_1) \cdot \psi_b(\vec{r}_2)$ .

Um die Bindungsenergie des Heliums abzuschätzen, kann man zwei extreme Annahmen machen:

1. Der abschirmende Einfluss des jeweils anderen Elektrons auf das Potential des Kerns soll völlig vernachlässigt werden. D.h., beide Elektronen sehen die volle Kernladung und die Bindungsenergie jedes einzelnen Elektrons ergibt sich aus der Lösung des Wasserstoff-Problems mit  $Z = 2$  und  $n = 1$ . Die Gesamtbindungsenergie der beiden Elektronen in He beträgt dann  $E_{He} = -2 \cdot 2^2 \cdot 13.6 \text{ eV} = -109 \text{ eV}$ .

---

<sup>6</sup> $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$

<sup>7</sup>Die Produktschreibweise ist nur deshalb möglich, da man die Wechselwirkungen zwischen den beiden Teilchen ignoriert in diesem Ansatz ignoriert.



2. Das erste Elektron schirmt die Kernladung ab, so dass das zweite Elektron nur eine effektive Kernladung  $Z = 1$  sieht. Die Bindungsenergie der beiden Elektronen ergibt sich dann zu  $E_{He} = -2^2 \cdot 13.6 \text{ eV} - 1^2 \cdot 13.6 \text{ eV} = -68 \text{ eV}$ .

Der tatsächliche He-Grundzustand hat eine Gesamtbindungsenergie  $E_{He} = -79.93 \text{ eV}$ . Die Abschirmung ist also groß aber nicht vollständig. Mit Abschirmungsparameter  $\Sigma = 0.65$  kann man die Bindungsenergie der beiden Elektronen schreiben als:  $E_{He} = -Z^2 \cdot 13.6 \text{ eV} - (Z - \Sigma)^2 \cdot 13.6 \text{ eV}$ .  $(Z - \Sigma)$  ist dann die effektive Ladung  $Z_{eff}$ , die das zweite Elektron sieht.

Die Einteilchenlösungen  $\psi_k(\vec{r}_i)$  in der Zentralfeldnäherungen können wie beim Wasserstoff mit entsprechenden Quantenzahlen  $k = \{n, l, m\}$  klassifiziert werden.

Da das effektive Potential zwar radialsymmetrisch ist, aber nicht die einfache  $\frac{1}{r}$ -Form hat, wird die  $l$ -Entartung des Wasserstoffs aufgehoben: Kleine  $l$  haben hohe Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in Kernnähe, wo die Abschirmung klein ist; Das führt zu einer größeren Bindung und damit zu einer Absenkung der Energien  $E_{nl}$  für kleine  $l$ .

## 1.2.2 Ununterscheidbarkeit der Elektronen und Symmetrie der Wellenfunktionen

Die beiden Elektronen des Heliums sind ununterscheidbare Fermionen (Spin  $\frac{1}{2}$ ), d.h. man weiß nicht, welches der Elektronen im Zustand  $a = \{n_1, l_1, m_1\}$  bzw.  $b = \{n_2, l_2, m_2\}$  ist. Die beiden Lösungen

$$\psi_{ab}^I = \psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) \text{ und } \psi_{ab}^{II} = \psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1)$$

sind daher völlig äquivalent und beschreiben die gleiche Aufenthaltswahrscheinlichkeit der beiden Elektronen:

$$|\psi_{ab}^I|^2 = |\psi_{ab}^{II}|^2$$

Damit ergibt sich für die beiden Lösungen<sup>8</sup>:

$$\psi_{ab}^I = \pm \psi_{ab}^{II}$$

Für Fermionen existierte eine Symmetriebedingung an die Gesamtwellenfunktion unter Vertauschung der Teilchen, die man als verallgemeinerte Form des Pauli-Verbots<sup>9</sup> bezeichnet:

Die Gesamtwellenfunktion eines Systems aus mehreren Fermionen ist antisymmetrisch

<sup>8</sup>I.a. erhält man dass die Lösungen bis auf eine Phase gleich sind:  $\psi_{ab}^I = e^{i\phi}\psi_{ab}^{II}$ . Nach zweifachem Vertauschen erhält man dann  $\psi_{ab}^I = e^{2i\phi}\psi_{ab}^I$  und damit für  $\phi$  nur die Werte  $0, \pi$ .

<sup>9</sup>Pauli-Verbot: Keine zwei Fermionen können sich im exakt gleichen Zustand befinden, sondern müssen sich zumindest in einer Quantenzahl unterscheiden.

gegen Vertauschung der Fermionen. Hieraus folgt unmittelbar, dass zwei Fermionen nicht durch den gleichen Satz von Quantenzahlen beschrieben werden können. Eine antisymmetrische Gesamtwellenfunktion erhält man aus den obigen beiden Lösungen:

$$\psi_{ab}^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) - \psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1))$$

Wären die Zustände  $a$  und  $b$  exakt gleich, dann würde die Gesamtwellenfunktion verschwinden.

Bei Anwendung auf das Helium-Atom muss man berücksichtigen, dass die Gesamtwellenfunktion einen Ortsanteil  $\psi_{\text{space}}$  und einen Spin-Anteil  $\chi_{\text{spin}}$  besitzen, die faktorisieren.

Spin-Wellenfunktion:

Die beiden Elektronen-Spins in Helium können zu zwei unterschiedlichen Gesamtspins  $S = 0, 1$  koppeln. Die vektorielle Kopplung zweier Spins  $s = \frac{1}{2}$  ist in Abbildung I.2 schematisch dargestellt.

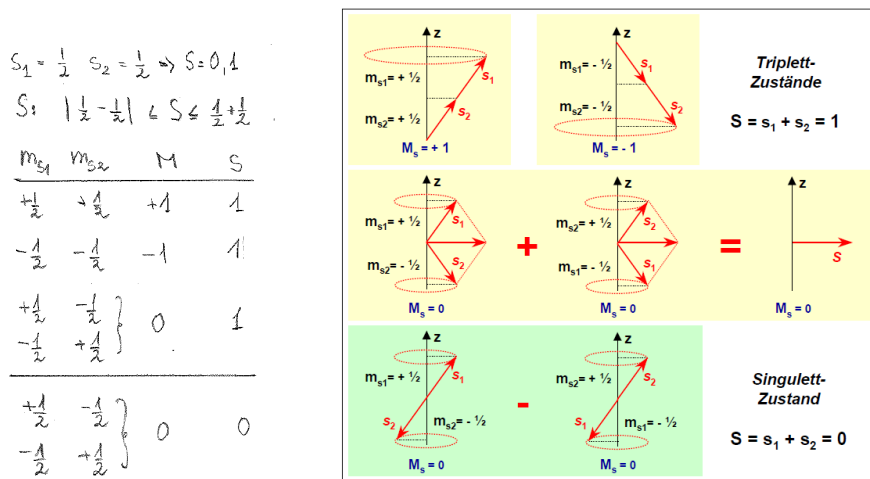


Abbildung I.2: Vektorielle Kopplung zweier Spins. Man unterscheidet die  $S = 1$  Triplett-Zustände und den  $S = 0$  Singulett-Zustand. (entnommen: Gross, Atomphysik)

Man unterscheidet das symmetrische Spin-Triplett mit Gesamtspin  $S = 1$  und  $S_Z = -1, 0, +1$ :

$$\begin{aligned} \chi_s^{-1} &= \chi_1(\downarrow)\chi_2(\downarrow) \\ \chi_s^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_1(\uparrow)\chi_2(\downarrow) + \chi_1(\downarrow)\chi_2(\uparrow)) \\ \chi_s^{+1} &= \chi_1(\uparrow)\chi_2(\uparrow) \end{aligned}$$

(symmetrisch (s) gegen Vertauschung von  $1 \leftrightarrow 2$ .)

und das antisymmetrisches Spin-Singulett mit Gesamtspin  $S = 0$  und  $S_Z = 0$ :

$$\chi_a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_1(\uparrow)\chi_2(\downarrow) - \chi_1(\downarrow)\chi_2(\uparrow))$$

(antisymmetrisch (a) gegen Vertauschung von  $1 \leftrightarrow 2$ )

Befinden sich die beiden Elektronen in einem symmetrischen (anti-symmetrischen) Spin-Zustand, so muss die Ortswellenfunktion  $\psi_{\text{space}}$  entsprechend anti-symmetrisch (symmetrisch) sein, damit die Gesamtwellenfunktion  $\psi_{\text{space}}\chi_{\text{spin}}$  antisymmetrisch ist.

Antisymmetrisierung der Ortswellenfunktion für  $Z$  Elektronen:

Für Mehrelektronensysteme mit  $Z$  Elektronen die durch  $\psi_{k_i}(\vec{r}_i)$  beschrieben werden, erhält man eine antisymmetrische Wellenfunktion mittels der Slater-Determinante:

$$\psi_a(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_Z) = \frac{1}{\sqrt{Z!}} \begin{vmatrix} \psi_{k_1}(\vec{r}_1) & \cdots & \psi_{k_1}(\vec{r}_Z) \\ \psi_{k_2}(\vec{r}_1) & \cdots & \psi_{k_2}(\vec{r}_Z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_{k_Z}(\vec{r}_1) & \cdots & \psi_{k_Z}(\vec{r}_Z) \end{vmatrix}$$

(Beim Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten ändert die Determinante ihr Vorzeichen.)

### 1.2.3 Termschema von Helium

Der niedrigste Energiezustand des Heliums wird realisiert, wenn sich beide Elektronen im tiefst-möglichen Zustand  $n_1 = n_2 = 1$ ,  $l_1 = l_2 = 0$  befinden. Da der Ortswellenanteil dann symmetrisch gegen Vertauschung ist, muss der Spinwellenanteil antisymmetrisch sein. Die Spins befinden sich daher im antisymmetrischen  $S = 0$  Singulett-Zustand.

Befindet sich ein Elektron in einem Zustand mit einer höheren Quantenzahl  $n > 1$  so existieren zwei verschiedene Term-Systeme:

- Zustände mit Gesamtspin  $S = 0$  (Spin-Singulett): Para-Helium
- Zustände mit Gesamtspin  $S = 1$  (Spin-Triplett): Ortho-Helium

Abbildung I.3 zeigt das Termschema des Heliums für die Singulett und Triplet-Zustände. In der Abbildung wird die folgende spektroskopische Notation verwendet:

$${}^{2S+1}L_J \text{ mit } \begin{cases} J = \text{Gesamtdrehimpuls} \\ L = \text{Gesamtbahndrehimpuls} \\ S = \text{Gesamtspin} \\ \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \end{cases}$$

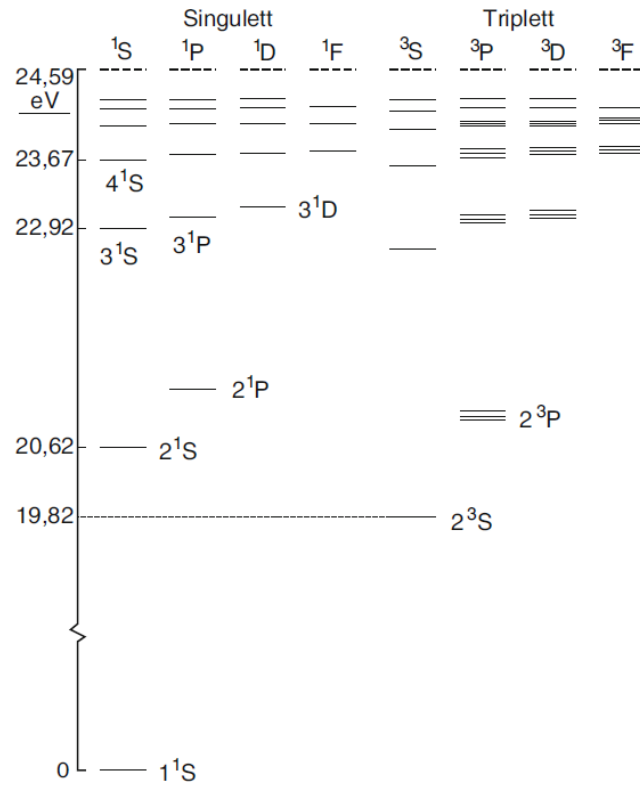


Abbildung I.3: Termschema der Singulett und Triplet-Zustände von Helium. Der Energienullpunkt ist hier auf den niedrigsten Zustand  $1^1S_0$  gelegt. (entnommen: Demtröder 3)

Die angeregten Singulett-Zustände liegen jeweils höher als die entsprechenden Triplet-Zustände<sup>10</sup>

<sup>10</sup>Häufig findet man hierzu die folgende anschauliche aber nicht wirklich richtige Erklärung: Die Coulomb-Abstoßung ist im Falle antisymmetrischer Spinwellenfunktion und daraus folgender symmetrischer Ortswellenfunktion größer. Die symmetrische Ortswellenfunktion führt zu einem im Mittel kleinerem Abstand der beiden Elektronen und daher zu einer größeren Coulomb-Abstoßung. Tatsächlich ergibt aber die explizite quantenmechanische Rechnung, dass die Coulombabstoßung der beiden Elektronen im Tripletzustand größer ist. Die stärkere Bindung der Elektronen im Triplet-Zustand ergibt sich

Dipolstrahlungsübergänge mit den Auswahlregeln  $\Delta L = \pm 1$ ,  $\Delta m_L = \pm 1$ ,  $\Delta S = 0$ ,  $\Delta J = 0, \pm 1$  (kein  $J = 0 \rightarrow J = 0$ ) sind zwischen den Triplett und den Singulett-Niveaus verboten.

Die Triplett-Zustände weisen aufgrund der komplexen Multiplett-Struktur weit mehr Spektrallinien auf, weshalb man ursprünglich annahm, es gäbe zwei verschiedene Helium-Arten.

### 1.3 Mehrelektronensysteme ( $Z > 2$ )

Wie oben bereits erwähnt, kommen zur Beschreibung von Mehrelektronensystemen iterative Näherungsverfahren zur Anwendung die von Vereinfachungen ausgehen.

Modell unabhängiger Elektronen: Ein häufig benutztes Modell beschreibt die einzelnen Elektronen als von einander unabhängige Teilchen in einem effektiven Potential. Die Ladung des Kerns und die zeitlich gemittelte Verteilung der anderen  $(Z - 1)$  Elektronen führen für das Elektron  $i$  zu einem effektiven radialsymmetrischen Potential  $V_{eff}(r_i)$ , in dem sich das Elektron unabhängig von allen anderen bewegt. Für dieses Einteilchenproblem werden die Energieeigenwerte  $E_{k_i}$  und die Eigenzustände  $\psi_{k_i}$  mit  $k = \{n_i, l_i, m_i, m_{s_i}\}$  mittels eines Variationsverfahrens ermittelt. Die Einteilchenzustände werden unter Berücksichtigung des Pauli-Prinzips nach und nach mit den  $Z$  Elektronen besetzt. Da  $V_{eff}(r_i)$  in der Regel kein  $\frac{1}{r}$ -Potential ist, ist die  $(n, l)$ -Entartung aufgehoben. Die Gesamtwellenfunktion der  $Z$ -Elektronen ergibt sich als Produkt der Einteilchenlösungen, wobei die Antisymmetrisierungsbedingung berücksichtigt werden muss. Mit dieser Gesamtwellenfunktion kann ein verbessertes zeitlich gemitteltes effektives Potential  $V_{eff}$  bestimmt werden. Mit dem verbesserten Potential startet die nächste Iteration der Bestimmung der Einteilchenlösungen. Dieses Verfahren geht auf D.R. Hartree zurück.

Die so bestimmten Einteilchenlösungen sind aufgrund des effektiven Zentralpotentials den Lösungen des Wasserstoffs ähnlich und lassen sich durch Quantenzahlen  $n, l, m, m_s$  charakterisieren.

In einer Weiterentwicklung des Verfahrens führt man zusätzlich zu  $V_{eff}$  noch einen Austauschterm ein, der die unterschiedliche Coulomb-Abstoßung der Elektronen im Falle von gleichem oder verschiedenem Spinzustand berücksichtigt, und der die Konvergenz des Verfahrens verbessert.

Heute wird zur Berechnung des Grundzustandes und der Elektronenverteilung in Atomen

aus einer insgesamt kompakteren Verteilung der beiden Elektronen um den Kern (s.a. Russel J. Boyd in Nature 310 (1984)480). Das anschauliche Argument, dass auf Slater zurückgeht, versagt hier also.

men und Molekülen häufig die Dichtefunktionalmethode eingesetzt, die auf W.Kohn zurückgeht (Nobelpreis für Chemie 1998).

Neben der Coulomb-Wechselwirkung müssen magnetische Wechselwirkungen zwischen den magnetischen Momenten von Spin und Bahndrehimpulsen der Elektronen berücksichtigt werden. Diese Wechselwirkung führt zu Kopplungen der Drehimpulse und Spins und zu einer Feinstrukturaufspaltung. Aufgrund der recht komplexen Drehimpulskopplung erhält man i.a. sehr komplexe Multipletts und Feinstrukturen.

### 1.3.1 Drehimpulskopplung und Gesamtdrehimpuls

Der Gesamtdrehimpuls eines Mehrelektronensystems hängt davon ab, wie genau die Drehimpulse und Spins koppeln. Man kann hierbei zwei Grenzfälle unterscheiden: Die sogenannte *LS*-Kopplung, die vor allem für leichte Atome realisiert ist und die *jj*-Kopplung, die bei sehr schweren Atomen auftritt. Im Folgenden bezeichnet:

$\vec{L}, \vec{S}, \vec{J}$  den Gesamt-Bahndrehimpuls, -Spin und totalen Drehimpuls

$L, S, J$  die zugehörigen Quantenzahlen

$\vec{l}_i, \vec{s}_i, \vec{j}_i$  die Drehimpulse eines einzelnen Elektrons

$l_i, s_i, j_i$  die zugehörigen Quantenzahlen

#### LS-Kopplung (auch Russel-Saunders-Kopplung)

Falls die Kopplungsenergie zwischen den einzelnen Bahndrehimpulsen sowie zwischen den einzelnen Spins der Elektronen groß ist, koppeln diese zu Gesamtbahndrehimpuls und Gesamtsin, die dann zum totalen Drehimpuls koppeln:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \vec{l}_i, & |\vec{L}| &= \sqrt{L(L+1)}\hbar \\ \vec{S} &= \sum_i \vec{s}_i, & |\vec{S}| &= \sqrt{S(S+1)}\hbar \\ \vec{J} &= \vec{L} + \vec{S}, & |\vec{J}| &= \sqrt{J(J+1)}\hbar\end{aligned}$$

Diese Arte der Kopplung liegt vor, wenn die Spin-Bahn-Wechselwirkung  $\sim \vec{l}_i \vec{s}_i$  eines einzelnen Elektrons reaktiv zu den Kopplungsenergien  $\sim \vec{l}_i \vec{l}_j$  bzw.  $\sim \vec{s}_i \vec{s}_j$  klein ist. Das ist vor allem bei leichten Atomen der Fall.

Beispiel: LS-Kopplung zweier p-Elektronen ( $p^2$ :  $l_1 = l_2 = 1$ ,  $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ )

$$\begin{aligned} L : |l_1 - l_2| \leq L \leq l_1 + l_2 &\rightarrow L = 0, 1, 2 \\ S : |s_1 - s_2| \leq S \leq s_1 + s_2 &\rightarrow S = 0, 1 \end{aligned}$$

In diesem Fall gibt es aufgrund der LS-Kopplung bereits 10 verschiedenen Drehimpulszustände mit  $J = 0, 1, 2, 3$  - siehe hierzu auch Abb.I.5. Hierbei sind allerdings die 5 rot markierten Zustände aufgrund des Pauli-Prinzips verboten falls die Hauptquantenzahl der beiden Elektronen gleich ist ( $n_1 = n_1$ ). Für diese Zustände wäre dann die Kombination aus Ortswellenfunktion und Spinwellenfunktion symmetrisch.

### jj-Kopplung

Falls die Wechselwirkung zwischen den Spins  $s_i$  und dem Bahndrehimpuls  $l_i$  eines einzelnen Elektrons stark ist koppeln diese zum Gesamtdrehimpuls der einzelnen Elektronen  $\vec{j}_i$ , die dann zum totalen Drehimpuls  $\vec{J}$  koppeln:

$$\vec{j}_i = \vec{l}_i + \vec{s}_i \rightarrow \vec{J} = \sum_i \vec{j}_i$$

Das ist der Fall, wenn die Feinstrukturaufspaltung  $\sim l_i s_i$  groß ist. Da die Feinstrukturaufspaltung  $\sim \frac{Z^4}{n^3}$  ist, tritt die  $jj$ -Kopplung vor allem bei schweren Atomen auf. Da bei  $jj$ -Kopplung  $L$  und  $S$  keine "guten" Quantenzahlen mehr sind, hängt das Termschema bei Vorliegen von  $jj$ -Kopplung von  $J$  und den  $j_i$  ab. Die bisherige spektroskopische Notation ist also nicht mehr passend. Die Anzahl der möglichen Zustände und ihre  $J$ -Werte entsprechen denen von  $LS$ -Kopplung.

Der Übergang von dominanter LS-Kopplung für leichte Atome zu dominanter  $jj$ -Kopplung im Fall schwerer Atome ist in Abbildung I.4 gezeigt. Für viele mittelschwere Atome sind Mischungen beider Kopplungstypen realisiert.

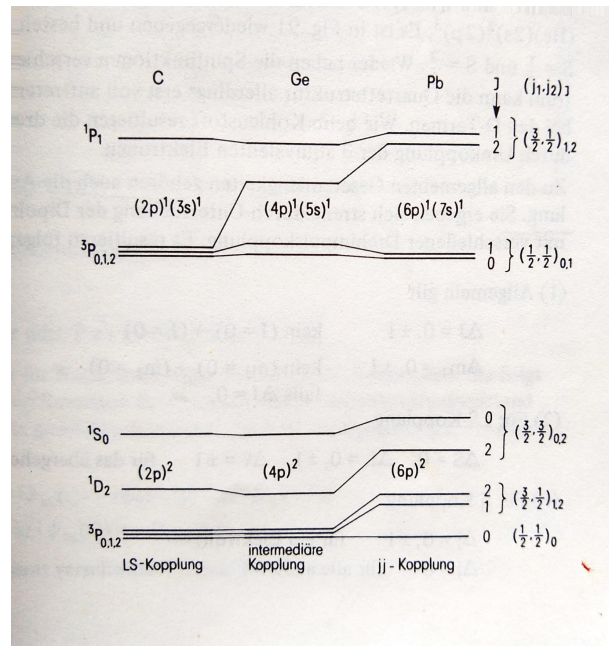


Abbildung I.4: Übergang von reiner LS-Kopplung (C) zu reiner jj-Kopplung (Pb) für Elemente der Elektronenkonfiguration  $(np)^2$  (unteres Termschema) bzw. für den angeregten Zustand  $ns^1(n+1)p^1$  der gleichen Elemente (oberes Termschema). Im Fall der  $p^2$  Elektronen werden bei der  $jj$ -Kopplung genau wie bei der  $LS$ -Kopplung aufgrund des Pauli-Verbots nicht alle möglichen Zustände realisiert. Man sieht auch dass die gleichen  $J$ -Werte erhalten bleiben. (entnommen Mayer-Kuckuk)



## Termschema für LS-Kopplung

Elektronenkonfigurationen mit Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  und Gesamtspin  $\vec{S}$  führen aufgrund der Kopplung von  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  zu verschiedenen möglichen Werten von  $\vec{J}$ ,

$$|L - S| \leq J \leq L + S,$$

und damit zu verschiedenen Feinstrukturkomponenten. Die Zahl der möglichen J-Werte gibt die Zahl der Feinstrukturturniveaus an. Sie wird durch die jeweils kleinere Zahl  $(2S + 1)$  oder  $(2L + 1)$  gegeben:  $\min(2S + 1, 2L + 1)$ .

Abbildung I.5 zeigt die möglichen Feinstruktur-Niveaus einer  $p^2$ -Konfiguration, d.h., der Kopplung zweier Elektronen auf einem p-Orbital mit jeweils  $l_i = 1$  mit der spektroskopischen Notation  $^{2S+1}L_J$ . Die rot markierten Niveaus sind aufgrund des Pauli-Prinzips verboten, falls die Elektronen gleiche Hauptquantenzahl  $n_1 = n_2$  haben. Beispiel: Das  $^1P_1$ -Niveau hat eine antisymmetrische Spin-Wellenfunktion und müsste somit eine symmetrische Ortswellenfunktion besitzen. Für die Kopplung der beiden  $l_1 = l_2 = 1$  Drehimpulse zu  $L = 1$  kann es aber keine symmetrische Wellenfunktion geben: Die entsprechenden  $L = 1$  Drehimpulszustände kann man sich leicht mit Hilfe der Clebsch-Gordan-Koeffizienten konstruieren. Man findet, dass die entsprechenden Wellenfunktionen alle antisymmetrisch gegen Vertauschung der Teilchen sind. Entsprechend findet man auch die Symmetrie der  $L = 0, 2$  Zustände (symmetrisch). Die Symmetrie der Ortswellenfunktion der beiden Elektronen, die sich aus den Clebsch-Gordan-Koeffizienten ergibt, ist dann einfach  $(-1)^L$ , was auch die das Verbot der  $^3S_1$  und der  $^3D$ -Niveaus erklärt.

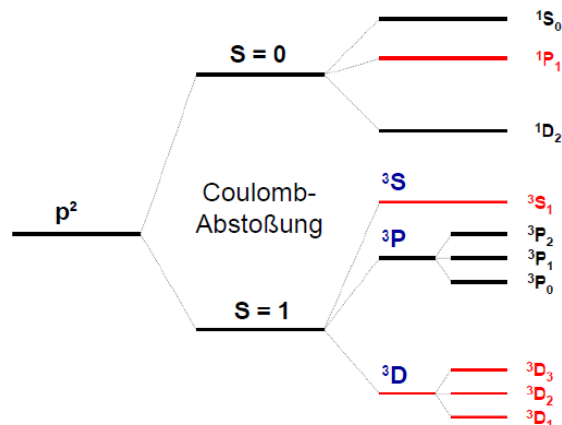


Abbildung I.5: LS-Kopplung zweier p-Elektronen. Die rot markierten Niveaus sind aufgrund des verallgemeinerten Pauli-Prinzips verboten, falls die beiden Elektronen die gleichen Hauptquantenzahl  $n_1 = n_2$  haben. (entnommen: Gross Atomphysik)

Bemerkungen zu den  $p^2$ -Niveaus in Abbildung I.5:

- (1) Falls die Hauptquantenzahlen der beiden Elektronen verschieden sind, sind auch die roten Niveaus erlaubt.
- (2) Die  $S = 0$ -Zuständen (antisymmetrische Spinwelle) liegen energetisch höher.
- (3) Welcher der möglichen spektroskopischen Zustände am tiefsten liegt und somit im Grundzustand besetzt wird, beschreibt die Hund'sche Regel (s.u.).

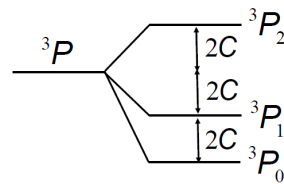
Die Triplett-Aufspaltung der  $S = 1$  Niveaus  ${}^3P$  und  ${}^3D$  aufgrund der LS-Kopplung - die Energieaufspaltung  $\sim \langle \vec{L}\vec{S} \rangle$  - lässt sich leicht berechnen:

Mit  $\vec{J}^2 = (\vec{S} + \vec{L})^2$  und  $\langle \vec{J}^2 \rangle = J(J+1)\hbar^2$  (analog für L und S) findet man für die Energieaufspaltung,

$$\Delta E \sim \langle \vec{L}\vec{S} \rangle \rightarrow \Delta E = C [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)] .$$

Für die drei Niveaus des  ${}^3P$ -Zustandes erhält man dann:

$${}^3P(L=1, S=1) \begin{cases} J=2: & 6 - 2 - 2 = +2 \rightarrow \Delta E = +2C \\ J=1: & 2 - 2 - 2 = -2 \rightarrow \Delta E = -2C \\ J=0: & 0 - 2 - 2 = -4 \rightarrow \Delta E = -4C \end{cases}$$



### I.3.2 Struktur der Elektronenhülle

Aufgrund des Pauli-Prinzips kann ein Zustand mit den Quantenzahlen  $n, l, m$  nur maximal mit zwei Elektronen (entsprechend  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ ) besetzt sein. Insgesamt ergeben sich also für eine Hauptquantenzahl  $n$

$$k = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$$

Zustände, die mit  $2n^2$  Elektronen besetzt werden können.

#### Schalen und Unterschalen

Wie oben bereits erwähnt sind aufgrund des effektiven Zentralpotentials die Elektronenzustände den Lösungen des Wasserstoffatoms ähnlich und lassen sich durch Quantenzahlen  $n, l, m, m_s$  charakterisieren.

Für Wasserstoff sind die radialen Wahrscheinlichkeitsdichten  $\rho(r) \sim r^2 |R_{n,l}|^2$  in Abbildung I.6 gezeigt. Vergleicht man die radiale Dichteverteilung für ein  $3d$ -Elektron mit der eines  $3s$  oder sogar  $4s$  Elektrons, so sieht man, dass die  $s$ -Niveaus Nebenmaxima in Kernnähe haben. Diese Maxima fallen in Regionen bei denen sich das effektive Potential dem Wert  $Ze^2/r$  nähert, also  $Z_{eff} \rightarrow Z$  geht. Da die Bindungsenergie  $\sim Z_{eff}^2$  ist, trägt dieser Bereich stark zur Bindungsenergie bei. Das führt dazu dass ein  $4s$  Elektron stärker gebunden ist als ein  $3d$  Elektron obwohl es im Mittel weiter vom Kern entfernt ist.

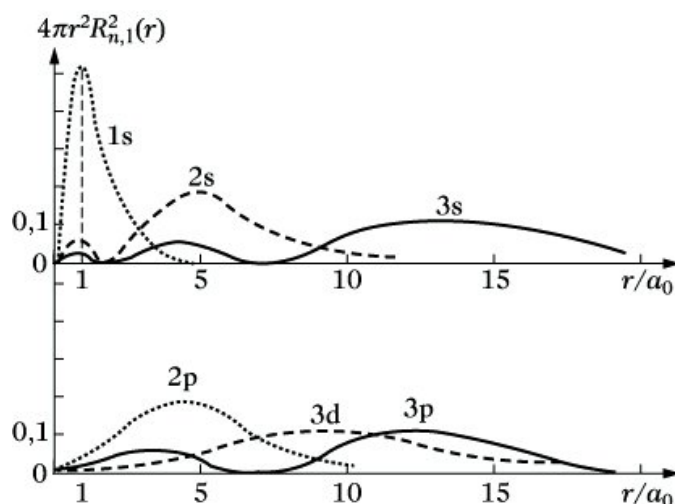


Abbildung I.6: Radiale Elektronendichten in Wasserstoff für verschiedene  $(n,l)$ -Orbitale (entnommen Lexikon der Chemie, Spektrum.de)

Die Summe aller  $2n^2$  Elektronen einer Hauptquantenzahl bilden eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung (Erinnerung: Die Summe aller Kugelflächenfunktionen  $Y_l^m$  bei festem  $n$  ist kugelsymmetrisch.). Die Ladungsverteilung der  $2n^2$  Elektronen hat ein Maximum bei einem Radius der von  $n$  abhängt. Der Hauptteil der Ladung liegt in einer Kugelschale, die als Elektronenschale bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} n = 1 & : \text{K-Schale} & n = 3 & : \text{M-Schale} & n = 5 & : \text{O-Schale} \\ n = 2 & : \text{L-Schale} & n = 4 & : \text{N-Schale} \end{aligned}$$

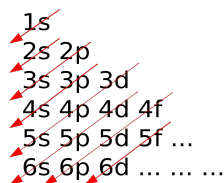
Da die radiale Wellenfunktion auch von der Bahndrehimpulsquantenzahl  $l$  abhängt, nennt man die Anordnung der Elektronen mit gleichem  $l$  bei gegebenem  $n$  eine Unterschale:  $s$ ,  $p$ ,  $d$ ,  $f$ -Unterschalen für  $l=0, 1, 2, 3$ .

Die energetische Reihenfolge der Besetzung der verschiedenen Energiezustände  $E_{n,l}$  (Die  $n, l$  Entartung ist wegen  $V_{eff} \sim \frac{1}{r}$  aufgehoben) ist wie folgt:<sup>11</sup>

$$1s \rightarrow 2s \rightarrow 2p \rightarrow 3s \rightarrow 3p \rightarrow [4s, 3d] \rightarrow 4p \rightarrow [5s, 4d] \rightarrow 5p \rightarrow [6s, 4f, 5d] \rightarrow 6p \rightarrow [7s, 5f, 6d]$$

<sup>11</sup>Die Klammern deuten an, dass die Zustände sehr nahe beieinander liegen, und es zu Änderungen der Besetzungsreihenfolge kommen kann. Beispiele sind Chrom und Kupfer (s.u.).

Die Besetzungsreihenfolge kann man sich mit der folgenden grafischen Regel merken:



Wie sieht aber die Situation bei nicht vollbesetzten Unterschalen aus? Welche Konfiguration ist unter Berücksichtigung von Spin und Bahndrehimpuls energetisch am günstigsten? Wie groß ist dann der Gesamtspin  $S$  und der Gesamtbahndrehimpuls  $L$ ? Diese Fragen werden im folgenden Abschnitt beantwortet.

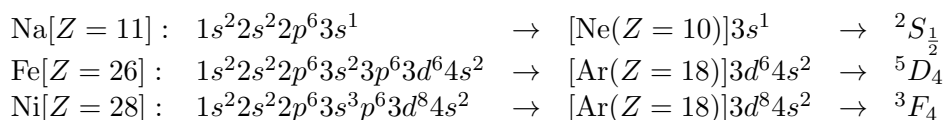
### 1.3.3 Grundzustandskonfiguration von Mehrelektronensystemen und Hund'sche Regel

Am Beispiel der möglichen Drehimpulskonfigurationen für zwei  $p$ -Elektronen ( $p^2$ ) wurde bereits gezeigt, dass es für eine gegebene Elektronen-Konfiguration mehrere Energiezustände gibt. Einer dieser Zustände ist der energetisch tiefste Zustand, den das Atom im Grundzustand annimmt.

Aus spektroskopischen Daten vieler Atome wurden von F. Hund die folgenden empirischen Regeln für den **Grundzustand** leichter Atome bei Vorliegen von LS-Kopplung aufgestellt:

1. Für abgeschlossene Schalen und Unterschalen gilt  $L = 0$  und  $S = 0$  und somit auch  $J = 0$ . Der Grund ist, dass die Überlagerung der Wellenfunktionen für die Elektronen einer abgeschlossenen Schale zu einer radialsymmetrischen Ladungsverteilung führt. Die spektroskopische Notation eines solchen Zustandes ist:  $^1S_0$  - Singulett ohne Feinstruktur da  $S = L = J = 0$ .

Bei der spektroskopischen Analyse genügt es deshalb, sich auf die Elektronen außerhalb der abgeschlossenen Schalen zu beschränken. Beispiele:



2. In einer nicht abgeschlossenen s,p,d,f-Unterschale liegen die Zustände mit maximalen Spin energetisch am tiefsten. Die Multiplizität, d.h. die Anzahl der möglichen, mit  $S$  und  $L$  kompatiblen  $J$ -Werte, ergibt sich aus  $|L - S| \leq J \leq L + S$  und beträgt  $(2S + 1)$  für  $S \leq L$  und  $(2L + 1)$  für  $L < S$ .

3. Für Zustände mit maximalem  $S$  liegen solche mit maximalem  $L$  am tiefsten. Um den Wert für  $L$  zu ermitteln, werden die zu einer Unterschale  $l$  gehörenden  $m$ -Zustände so aufgefüllt, dass die Spin-Up ( $\uparrow$ ) Elektronen nach einander die  $m = l, l-1, \dots$  Orbitale besetzen. Dann ergibt sich der  $L$ -Wert aus der Summe der besetzten  $m$ -Zustände (Vorsicht, dies ist eine Merk- oder Rechenregel zur Ermittlung der Eigenschaften des Grundzustandes und kein Abbild der tatsächlichen Drehimpulskonfiguration).

Beispiel:  $C$  ( $Z = 6$ )  $[1s^2 2s^2] 2p^2$

$$\begin{aligned} \rightarrow L &= +1 + 0 = 1, \\ \rightarrow S &= +\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} m = +1 \quad 0 \quad -1 \\ p: \quad \boxed{\uparrow} \quad \boxed{\uparrow} \quad \boxed{\phantom{\uparrow}} \end{array}$$

4. Sind die s,p,d,f-Unterschalen  
 a. weniger als halb gefüllt so ist der Zustand mit  $J = |L - S|$  Grundzustand.  
 b. mehr als halb gefüllt so ist der Zustand mit  $J = L + S$  Grundzustand.

Zu a): Obiges Beispiel des Kohlenstoff ( $p^2$ ): Spin  $S = 1$  kann mit  $L = 1$  zu  $J = 2, 1, 0$  koppeln  $\rightarrow$  Triplett:  ${}^3P_2, {}^3P_1, {}^3P_0$ . Der Zustand  ${}^3P_0$  ( $J = 0$ ) liegt energetisch am tiefsten und ist der Grundzustand (entspricht Antiparallelstellung von  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$ ).

Zu b): Bei mehr als halb gefüllten Schalen können die fehlenden Elektronen als Löcher mit positiver Ladung behandelt werden. In diesem Fall minimiert die parallele Ausrichtung von  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  die Energie. Der Zustand mit maximalem  $J$  liegt deshalb am tiefsten.

Beispiel:  $O$  ( $Z = 8$ )  $[\dots] 2p^4$

$$\begin{aligned} \rightarrow L &= 1, \\ \rightarrow S &= +\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \rightarrow J &= 2, 1, 0: {}^3P_2 (J = 2) \\ &\quad \text{liegt am tiefsten} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} m = +1 \quad 0 \quad -1 \\ p: \quad \boxed{\uparrow\downarrow} \quad \boxed{\uparrow} \quad \boxed{\uparrow} \end{array}$$

## I.4 Ordnung der Elemente

### I.4.1 Aufbau der Atomhülle

Durch sukzessives Auffüllen der Unterschalen und Schalen erhält man die Elektronenkonfigurationen der Elemente (Tabelle aus R.Gross, Atomphysik):

Schale		K						L			M			N							
Z	Element	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	Z	Element	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	5s	5p
1	H Wasserstoff	1							20	Ni Nickel	2	2	6	2	6	6	2				
2	He Helium	2							29	Cu Kupfer	2	2	6	2	6	10	1				
3	Li Lithium	2	1						30	Zn Zink	2	2	6	2	6	10	2				
4	Be Beryllium	2	2						31	Ga Gallium	2	2	6	2	6	10	2	1			
5	B Bor	2	2	1					32	Ge Germanium	2	2	6	2	6	10	2	2			
6	C Kohlenstoff	2	2	2					33	Ar Arsen	2	2	6	2	6	10	2	3			
7	N Stickstoff	2	2	3					34	Se Selen	2	2	6	2	6	10	2	4			
8	O Sauerstoff	2	2	4					35	Br Brom	2	2	6	2	6	10	2	5			
9	F Fluor	2	2	5					36	Kr Krypton	2	2	6	2	6	10	2	6			
10	Ne Neon	2	2	6					37	Rb Rubidium	2	2	6	2	6	10	2	6		1	
11	Na Natrium	2	2	6	1				38	Sr Strontium	2	2	6	2	6	10	2	6		2	
12	Mg Magnesium	2	2	6	2				39	Y Yttrium	2	2	6	2	6	10	2	6	1	2	
13	Al Aluminium	2	2	6	2	1			40	Zr Zirkonium	2	2	6	2	6	10	2	6	2	2	
14	Si Silizium	2	2	6	2	2			41	Nb Niob	2	2	6	2	6	10	2	6	4	1	
15	P Phosphor	2	2	6	2	3			42	Mo Molybdän	2	2	6	2	6	10	2	6	5	1	
16	S Schwefel	2	2	6	2	4			43	Tc Technetium	2	2	6	2	6	10	2	6	6	1	
17	Cl Chlor	2	2	6	2	5			44	Ru Ruthenium	2	2	6	2	6	10	2	6	7	1	
18	Ar Argon	2	2	6	2	6			45	Rh Rhodium	2	2	6	2	6	10	2	6	8	1	
19	K Kalium	2	2	6	2	6	1		46	Pd Palladium	2	2	6	2	6	10	2	6	10		
20	Ca Calcium	2	2	6	2	6	2		47	Ag Silber	2	2	6	2	6	10	2	6	10	1	
21	Sc Scandium	2	2	6	2	6	1	2	48	Cd Cadmium	2	2	6	2	6	10	2	6	10	2	
22	Ti Titan	2	2	6	2	6	2	2	49	In Indium	2	2	6	2	6	10	2	6	10	2	1
23	V Vanadium	2	2	6	2	6	3	2	50	Sn Zinn	2	2	6	2	6	10	2	6	10	2	2
24	Cr Chrom	2	2	6	2	6	5	1	51	Sb Antimon	2	2	6	2	6	10	2	6	10	2	3
25	Mn Mangan	2	2	6	2	6	5	2	52	Te Tellur	2	2	6	2	6	10	2	6	10	2	4
26	Fe Eisen	2	2	6	2	6	6	2	53	I Iod	2	2	6	2	6	10	2	6	10	2	5
27	Co Kobalt	2	2	6	2	6	7	2	54	Xe Xenon	2	2	6	2	6	10	2	6	10	2	6

Bemerkungen zur Reihenfolge der Besetzung der Schalen

Nach Argon (Ar( $Z = 18$ ):  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$ ) wird mit dem nächstem Element nicht die  $3d$ -Unterschale aufgefüllt, sondern es wird erst die  $4s$ -Unterschale gefüllt und dann die  $3d$ -Schale (siehe Merkgel). Da der räumliche und energetische Überlapp der  $4s$ - und der  $3d$ -Elektronen groß ist, tragen sowohl die  $4s$ - als auch  $3d$ -Elektronen zu den chemischen Eigenschaften dieser Elemente bei.

Die nächste Unregelmäßigkeit tritt nach Krypton ( $Z=36$ ) auf. Mit Rb ( $Z=37$ ) wird erst die  $5s$ -Unterschale gefüllt. Die  $4d$ -Unterschale wird zwischen  $Z=39$  (Y, Yttrium) und  $Z=48$  (Cd, Cadminum) gefüllt. Auch hier werden aufgrund des großen Überlapps die chemischen Eigenschaften sowohl durch die  $5s$  als auch durch die  $4d$ -Elektronen bestimmt.

Nach Xenon Xe ( $Z=54$ ) ist die Abfolge: Cs( $6s^1$ ), Ba( $6s^2$ ),  $4f$ -Unterschale,  $5d$ -Unterschale. Nach Radon Rn ( $Z=86$ ) ist die Abfolge: Fr( $7s^1$ ), Ra( $7s^2$ ),  $5f$ -Unterschale,  $6d$ -Unterschale.

Wie oben bereits erwähnt, werden mit dem Einbau in die  $d$ - und  $f$ -Unterschalen Zustände besetzt, die einen geringeren mittleren Abstand zum Kern aufweisen als die  $s$ - und  $p$ -Orbitale mit größerem  $n$ . Man spricht deshalb auch von inneren Unterschalen.

Mit der Hund'schen Regel erhält man die folgende schematische Elektronen- und Spin-konfiguration der 10 leichtesten Elemente (Abbildung I.7).

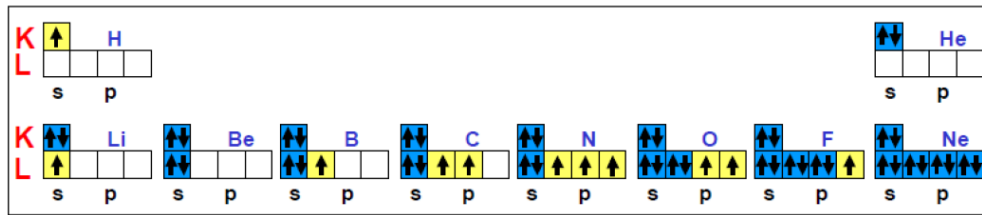


Abbildung I.7: Spin- und Drehimpulskonfiguration der 10 leichtesten Elemente (Entnommen Gross Atomphysik).

#### I.4.2 Ionisationsenergie und Atomradien

Die gemessenen Atomradien bzw. Atomvolumen belegen die oben diskutierte Schalenstruktur der Elemente. Zur Bestimmung der Atomvolumen und der Atomradien kommen unterschiedliche Methoden zur Anwendung, wie z.B. Röntgenstrukturanalysen von Kristallen und die allgemeine Gasgleichung für atomare Gase. Abbildung I.8 zeigt gemessene Atomradien. Immer wenn ein Elektron in eine neue Hauptschale eingebaut wird ( $n \rightarrow n + 1$ : Li, Na, K Rb, Cs), steigt der Atomradius stark an.

Die gleiche Periodizität findet man bei der gemessenen Ionisationsenergie  $E_{ion}$ , d.h., der Energie, die aufgewandt werden muss, um das am schwächsten gebundene Elektron mit mittlerem Radius  $r_n$  ins Unendliche zu entfernen:

$$E_{ion} = \int_{r_n}^{\infty} \frac{Z_{eff}e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Z_{eff}e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \approx Ry \frac{Z_{eff}^2}{n^2}$$

wobei  $Z_{eff}$  die effektive Kernladung ist, die das äußerste Elektron sieht. Im letzten Schritt der Umformung wurde  $r_n \approx \frac{(hc)n^2}{m_e c^2 Z_{eff} e^2}$  verwendet. Abbildung I.8 zeigt die gemessenen Ionisationsenergien.

Edelgase besitzen innerhalb einer Hauptschale die größte effektive Kernladung  $Z_{eff}$  und deshalb die größte Ionisationsenergie und den kleinsten Wert von  $r_n$ . Alkali-Atome besitzen die kleinste Ionisationsenergie - die Elektronen befinden sich weiter außen und sehen eine gut abgeschirmte Kernladung.

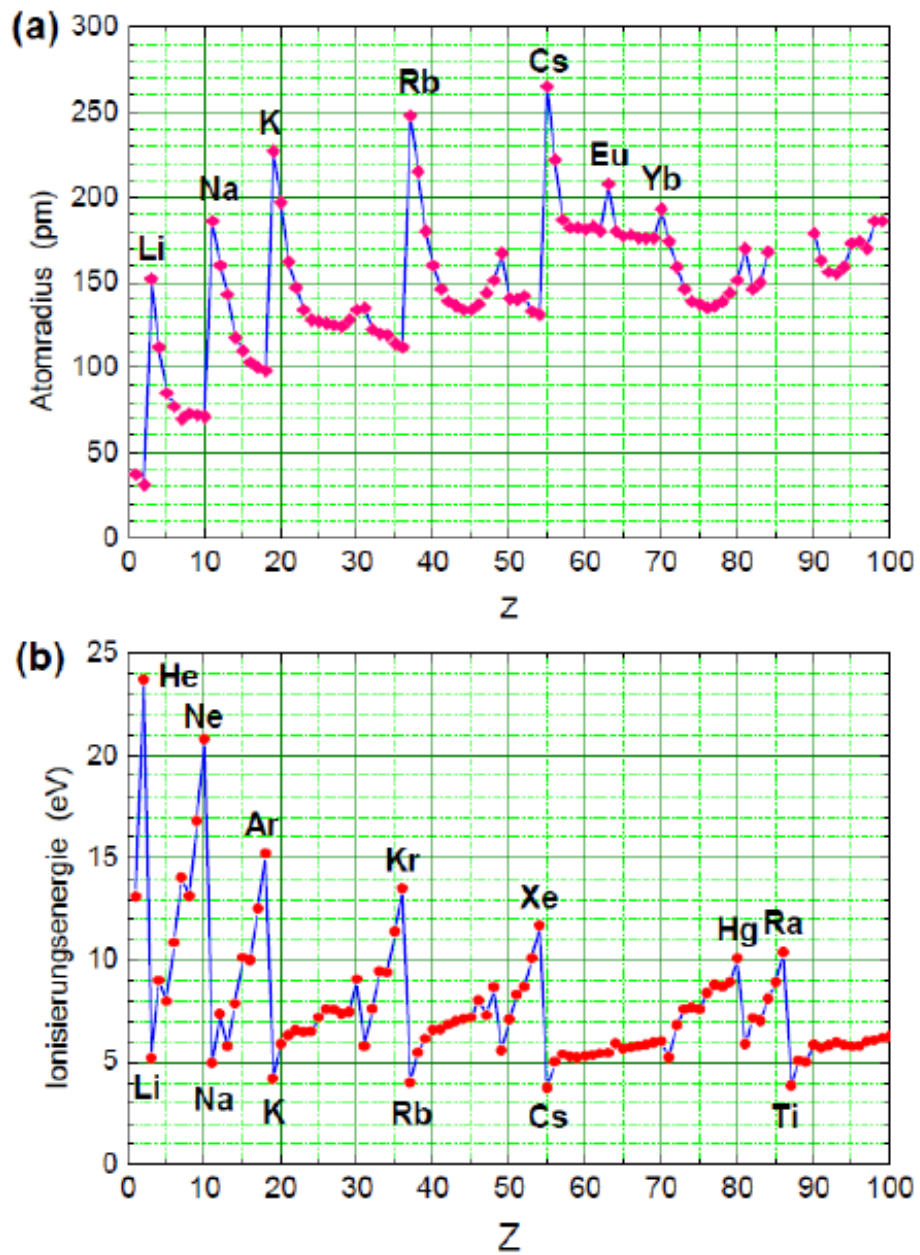


Abbildung I.8: Atomradien und Ionisationsenergien der Elemente (Entnommen Gross Atomphysik).



### 1.4.3 Periodensystem der Elemente

Die Darstellung der Elemente in einem Periodensystem wurde erstmalig 1869 in einem Lehrbuch zur Chemie von D.I. Mendeljew (1834-1907) verwendet. Unabhängig davon wurde eine ähnliche Darstellung auch von J.L. Weber (1830-1905) eingeführt.

Abbildung I.9 zeigt das Periodensystem der Elemente. Die Elemente werden nach steigender Kernladungszahl  $Z$  durchnummeriert (ursprünglich wurden sie nach steigendem Atomgewicht geordnet) und so in eine Tabelle in Spalten und Zeilen angeordnet, dass Elemente mit ähnlichen chemischen Eigenschaften untereinander stehen. Man erhält so 7 Zeilen (=Perioden) und 18 Spalten (=18 Elementgruppen, mit 8 Hauptgruppen und 10 Nebengruppen) sowie die Lanthanoiden und die Actinoiden. Letztere werden aber wie ein einzelnes Element behandelt - s.u. Heute sind die Elemente bis  $Z=118$  (Oganesson) bekannt, was die siebte Periode vervollständigt. Das schwerste natürlich vorkommende Element ist Plutonium ( $Z=94$ ), wobei aber die häufigste Quelle von Plutonium heute Kernwaffenversuche sind. Alle weiteren Elemente ( $Z=95\dots118$ ) müssen künstlich hergestellt werden: Bis  $Z=100$  können sie in Kern-Reaktoren erzeugt werden. Alle weiteren Elemente werden an Schwerionenbeschleunigern (z.B. an der GSI) erzeugt. Die künstlichen Elemente haben sehr kurze Lebensdauern.

Neben der Ordnungszahl (Kernladungszahl  $Z$ ) wird auch die Masse für das in der Natur vorkommenden Isotopengemisch angegeben, wobei man unter **Isotopen** Atome mit gleicher Kernladungszahl  $Z$  aber unterschiedlicher Zahl von Neutronen im Atomkern versteht. Beispiel: Lithium kommt als  ${}^6\text{Li}$ (7.6%) und  ${}^7\text{Li}$ (92.4%) mit 3 und 4 Neutronen vor; Die mittlere Massenzahl beträgt  $A = 6.95\text{u}$ . Als Einheit der Atommasse wird die atomare Masseneinheit  $u$  verwendet:  $1\text{ u}$  ist definiert als ein Zwölftel der Masse eines isolierten Atoms des Kohlenstoff-Isotops  ${}^{12}\text{C}$  im Grundzustand:

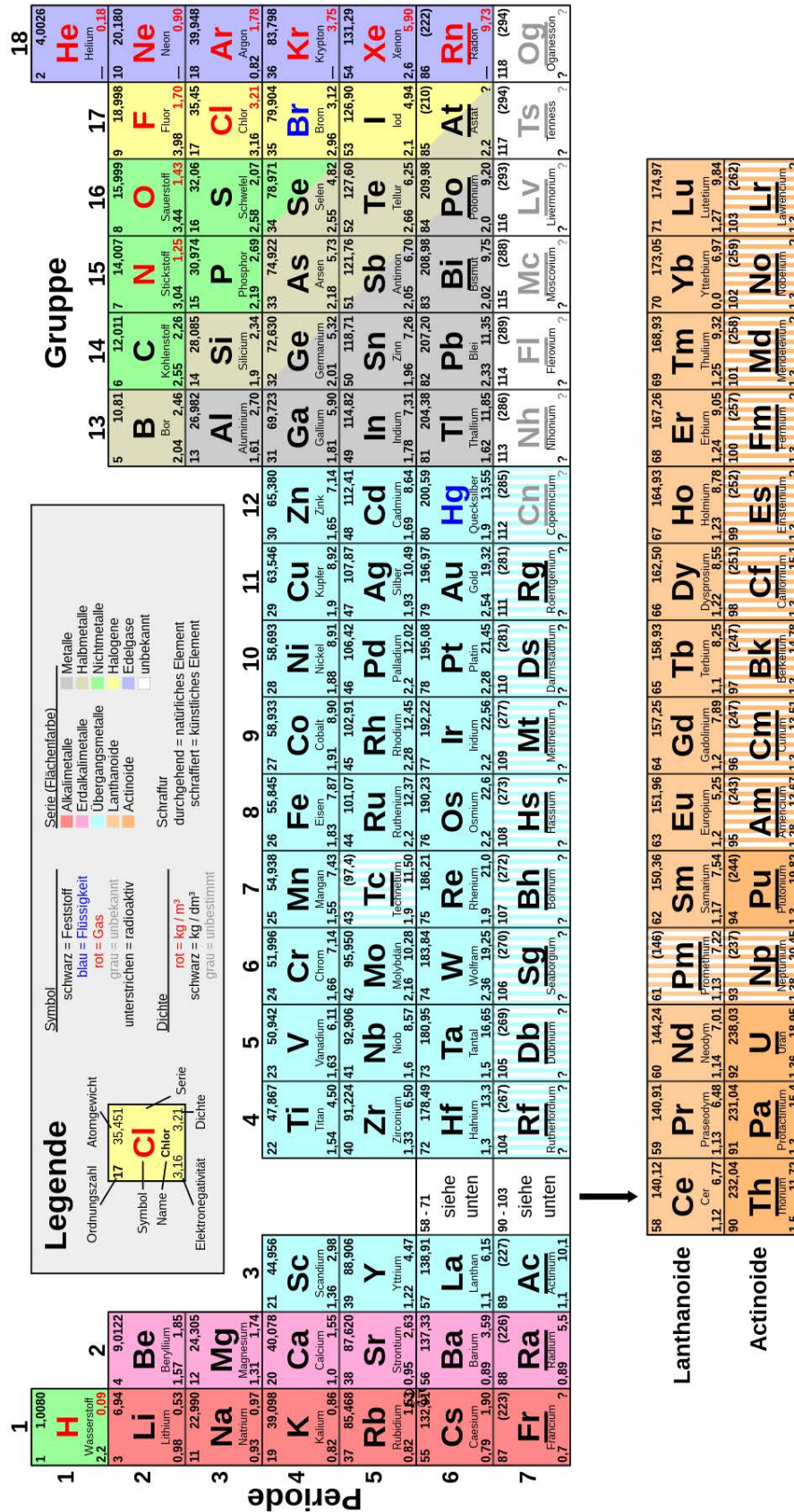
$$1\text{ u} = 1.66053906660(50) \cdot 10^{-27}\text{kg} = 931.49410242(28)\text{ MeV}/c^2 \text{ (CODATA)}.$$

Die chemischen Eigenschaften der Elemente werden durch die Valenzelektronen, den Elektronen in den äußersten nicht voll besetzten Schalen, bestimmt.

**Gruppe 1 (Hauptgruppe 1): Alkali-Metalle.** Diese Elemente haben nur ein einzelnes Elektron in der s-Unterschale. Dieses Elektron ist leicht abtrennbar weshalb die Alkali-Metalle zu den reaktivsten chemischen Elementen gehören.

**Gruppe 2 (Hauptgruppe 2): Erdalkali-Metalle.** Haben zwei Valenzelektronen ( $(ns)^2$ ).

**Gruppe 17 (Hauptgruppe 7): Halogene.** Diesen Elementen fehlt ein Elektron zu Schalenabschluss. Sie verbinden sich deshalb gern mit den Alkali-Metallen: Der Energiegewinn durch die Besetzung der Schale ist höher als die Energie, die zum Herauslösen des Elektrons aus dem Alkali-Atom notwendig ist.



**Gruppe 18 (Hauptgruppe 8): Edelgase.** Diese Elemente weisen eine voll besetzte Schale auf. Die Ionisationsenergie für diese Elemente ist hoch. Die Elemente sind chemisch inaktiv (inert).

**Gruppe 3 - 12 (Nebengruppen): d-Übergangselemente.** Der räumliche Überlapp der Elektronen der äußersten s-Unterschale sowie der nicht vollständig besetzten d-Unterschale ist genügend groß, dass sowohl s- als auch d-Elektronen an einer chemischen Bindung teilnehmen können. Diese Elemente weisen daher unterschiedliche chemische Eigenschaften auf.

**Lanthanoide und Actinoide: f-Übergangselemente.** Die nicht abgeschlossenen f-Unterschalen liegen weit im Inneren der Atomhülle. Die chemischen Eigenschaften dieser Elemente werden durch die äußeren  $s^2$ - und  $d^1$ -Elektronen bestimmt (z.B. La:  $[\text{Xe}]5d^1 6s^2$ ) und sind daher für diese Elemente sehr ähnlich. Die f-Übergangselemente gehören mit den Elementen der 3. Gruppe zu den seltenen Erden.

## 1.5 Angeregte Zustände

### 1.5.1 Lebensdauer angeregter Zustände

Durch Absorption von Photonen oder durch inelastische Stöße kann man ein Elektron in einen angeregten Zustand bringen. Der Zustand ist in der Regel instabil und zerfällt spontan mit einer Lebensdauer  $\tau$ . Hierfür gilt das Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau},$$

wobei  $N(t)$  die Zahl der zur Zeit  $t$  noch angeregten Zustände eines Ensembles mit ursprünglich  $N_0$  angeregten Zuständen ist.

Für einen spezifischen Übergang  $|i\rangle \rightarrow |k\rangle$  mit Energien  $E_i$  und  $E_k$  bestimmt das Übergangsmatrixelement  $\mathcal{A}_{ki}$  bzw. dessen Betragsquadrat  $|\mathcal{A}_{ki}|^2$  die Wahrscheinlichkeit (Stärke) des Übergangs. Mit dem Wechselwirkungsoperator  $\hat{H}_{WW}$ , der die Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld beschreibt, findet man

$$|\mathcal{A}_{ki}|^2 = |\langle k | \hat{H}_{WW} | i \rangle|^2 = e^2 \left| \int \psi_k^* \hat{r} \psi_i dV \right|^2$$

wobei, im letzten Schritt in der Dipolnäherung der Dipoloperator als Wechselwirkungsoperator mit dem Feld benutzt wurde und explizit die Wellenfunktionen eingesetzt wurden.

Aus der Bedingung, dass das Integral nicht verschwindet, ergeben sich die Auswahlregeln der Dipolübergänge für Mehrelektronensysteme:

$$\Delta L = \pm 1 \quad \Delta M = 0, \pm 1 \quad \Delta S = 0 \quad \Delta J = 0, \pm 1$$

Für  $\Delta J = 0$  ist aber kein Übergang  $J = 0 \rightarrow J = 0$  möglich. Übergänge mit  $\Delta J = 0$  sind möglich, da  $\Delta L = \pm 1$  durch eine Umorientierung des Spins  $\Delta M_S = \mp$  kompensiert werden kann. Umorientierung heißt, dass sich seine Richtung relativ zum Bahndrehimpuls ändert, ohne dass sich aber sein Betrag verändert ( $\Delta m_s = 0$ ).

Typ. Lebensdauern angeregter Zustände mit Dipolübergängen:

$$\begin{array}{ll} \text{H } (2^2P_{\frac{1}{2}}) & \tau = 1.5 \cdot 10^{-9}\text{s} \\ \text{He } (2^1P_1) & \tau = 0.5 \cdot 10^{-9}\text{s} \\ \text{Na } (3^2P_{\frac{1}{2}}) & \tau = 16 \cdot 10^{-9}\text{s} \end{array}$$

### 1.5.2 Natürliche Linienbreite

Aufgrund der endlichen Lebensdauer  $\tau$  der angeregten Zustände, besitzen die Zustände eine natürliche Energiebreite  $\Delta E$ , die sich aus der Heisenberg'schen Unschärfebeziehung ergibt:

$$\Delta E \tau \approx \hbar$$

Aus der Energiefrequenzbeziehung für Photonen  $E = h\nu = \hbar\omega$  folgt aus der Energiebreite  $\Delta E$  auch eine endliche Frequenzbreite  $\Delta\omega = \frac{1}{\tau}$  (bzw.  $\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau}$ ) der Spektrallinien für den Übergang zwischen zwei Niveaus. Im Frequenzraum wird die natürliche Linienbreite durch das in Abbildung I.10 gezeigte Lorentzprofil um den Frequenzmittelwert  $\omega_0$  beschrieben. Die ausgestrahlte spektrale Leistungsdichte  $\mathcal{P}$  als Funktion von  $\omega$  und der Gesamtleistung  $P_0$  ist:

$$\mathcal{P}(\omega) = P_0 \frac{\gamma/2\pi}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2\pi)^2}$$

Hier bezeichnet  $\gamma = \delta\omega$  die Frequenzbreite  $\gamma = \frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_k}$ , die sich aus den endlichen Lebensdauern der beiden Zustände i und k ergibt. Für sehr kurzlebige Zustände ( $\tau_i \rightarrow 0$ ) ist die natürliche Linienbreite also sehr groß.

Neben der natürlichen Linienbreite aufgrund der Lebensdauer führen die Bewegung der Atome (Doppler-Effekt) sowie Stöße zwischen den Atomen (Druck-Verbreiterung) zu einer weiteren Verbreiterung der Linien.

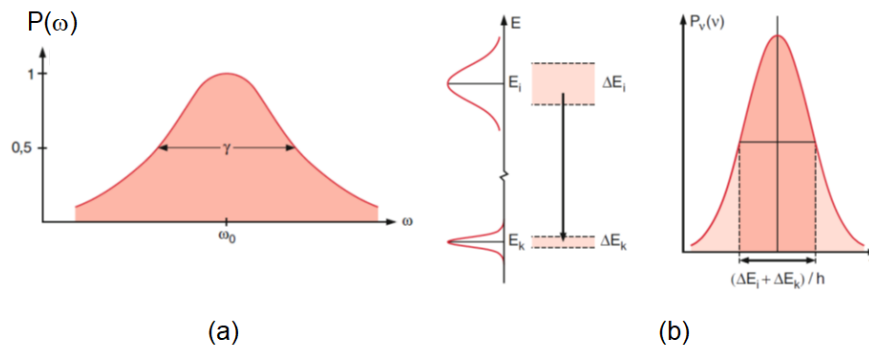


Abbildung I.10: (a) Lorentzprofil für spektrale Leistungsdichte und (b) Illustration der natürlichen Linienbreite (Entnommen Demtröder Atomphysik).

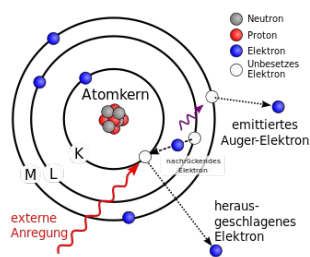
### I.5.3 Spektren

Im Fall von Mehrelektronensystemen sind die beobachtbaren Spektren aufgrund der sehr komplexen Multiplettstruktur kompliziert. Gezeigt sind in Abbildung I.11 verschiedene Helium Übergänge für Singulett und Triplettzustände sowie die Übergänge für Natrium. Bei Natrium ist die Energiedifferenz zwischen Zuständen mit gleichem  $n$  aber benachbarten  $l$ -Werte nicht mehr klein im Vergleich zum Unterschied verschiedener  $n$ -Niveaus.

Bei Natrium und allen anderen Alkali-Atomen muss ein einzelnes „Leuchtelektron“ (Valenzelektron) berücksichtigt werden. Wegen  $S = \frac{1}{2}$  gibt es hier wegen  $(2S + 1) = 2$  für  $L > 0$  eine Aufspaltung in Dubletts ( $J = L \pm \frac{1}{2}$ ). Die bekannte Na-Doppellinie bezeichnet beispielsweise den Übergang zwischen den beiden Dublettniveaus  $3^2P_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} \rightarrow 3^2S_{\frac{1}{2}}$ .

### I.5.4 Anregung von Elektronen innerer Schalen und Auger-Elektronen

Die Anregung eines Elektrons aus einer inneren Schale bedarf im Vergleich zu einem äußeren Elektron einer weit höheren Energie ( $Z_{eff}$  ist für diese Elektronen aufgrund der schwächeren Abschirmung der Kernladung größer) durch hochenergetische UV- oder Röntgenstrahlung (s.u.) oder Elektronenstößen von außen.



(entnommen Wikipedia)

In das durch die Anregung entstandene Loch kann ein Elektron aus einer höheren Schale fallen, was zu einem Photon mit der entsprechenden Energie (typisch im keV-Bereich) führt (s.a. charakteristische Röntgenstrahlung, nächster Abschnitt). Das Photon kann von einem weiteren Hüllenelektron absorbiert werden, was zum Auslösen dieses Elektrons führt. Die so frei werdenden Elektronen bezeichnet man als Auger-Elektronen.

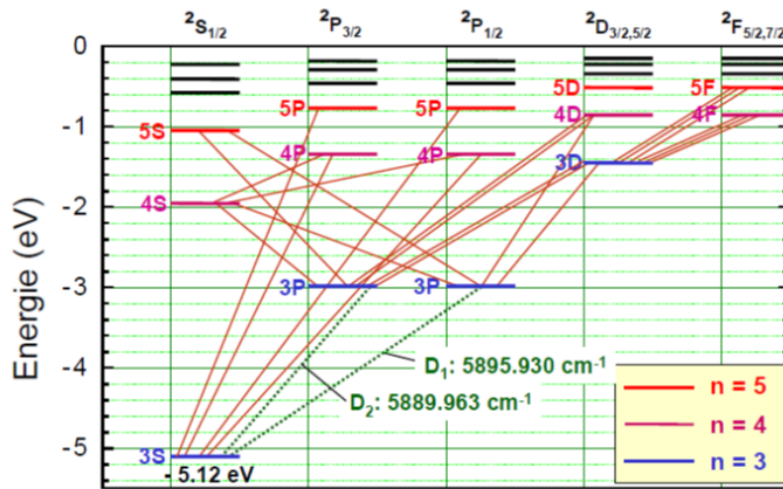
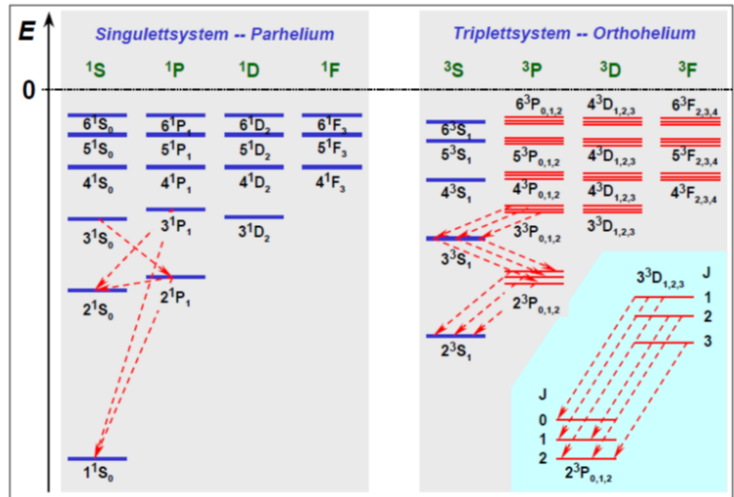


Abbildung I.11: Spektrum für Helium (Singulett und Triplettsystem) (oben) und für Natrium (unten). Für Natrium ist die bekannte Natrium-Doppellinie eingezeichnet. (Entnommen Gross).

## I.6 Röntgenstrahlung

W. C. Röntgen entdeckte 1885 beim Experimentieren mit Gasentladungsröhren, dass aus diesen Röhren eine Strahlung austritt, die Stoffe wie Glas, Holz, etc. durchdringen kann und Fotoplatten schwärzen kann. Er nannte diese Strahlung, die wir heute ihm zu ehren Röntgenstrahlen nennen, X-Stahlen. Für seine Entdeckung erhielt er 1901 den ersten Nobelpreis für Physik.

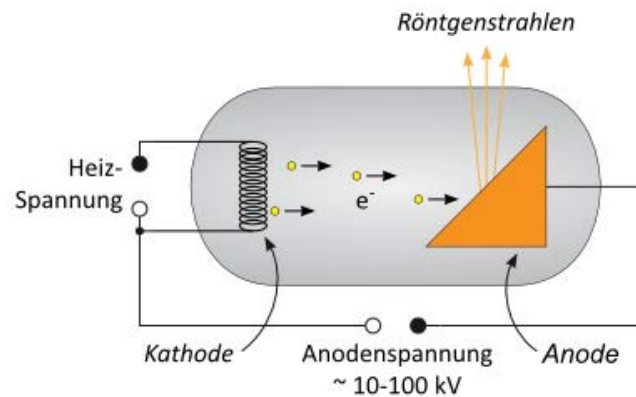


Abbildung I.12: Schematischer Aufbau einer Röntgenröhre. (Web-Seite Uni Göttingen).

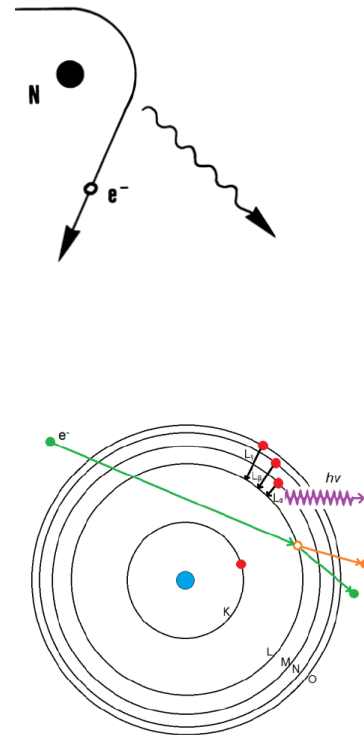
### Röntgenröhren:

Zur Erzeugung von Röntgenstrahlung werden Röntgenröhren benutzt, deren prinzipieller Aufbau in Abbildung I.12 gezeigt ist: Elektronen, die aus einer Glühkathode austreten, werden mittels einer Spannung  $U_B$  in Richtung der Anode beschleunigt, auf die sie mit einer kinetischen Energie  $E_{kin} = eU_B$  auftreffen. Dadurch werden sie abgebremst und strahlen Röntgenstrahlung aus. Zwei verschiedene Mechanismen mit sehr unterschiedlichem Spektrum tragen dazu bei:

- Die Elektronen werden im Feld der Kerne des Anodenmaterials abgebremst bzw. abgelenkt und strahlen aufgrund der Beschleunigung Bremsstrahlung aus. Das Bremsstrahlungsspektrum ist kontinuierlich mit maximaler Energie  $eU_B$ .
- Durch Stoß der Elektronen mit den Hüllelektronen des Anodenmaterials werden Elektronen der inneren Schalen mit Bindungsenergie  $E_j$  angeregt bzw. vollständig vom Atom entfernt. Die frei gewordenen Plätze werden von äußeren Elektronen mit Energieniveaus  $E_i$  besetzt, wobei die frei werdende Energie  $\Delta E$  als Röntgenquanten emittiert wird:

$$\Delta E = E_i - E_j = h\nu_{ij} = -(Z - \Sigma)^2 Ry \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2} \right)$$

Die Abschirmungskonstante  $\Sigma$  wurde bereits in Abschnitt 1 eingeführt und hängt von der jeweiligen Schale ab, auf die das äußere Elektron fällt. Durch die Ausstrahlung bestimmter Röntgenquanten entsteht ein für das Anodenmaterial charakteristisches Spektrum, das dem Bremsstrahlungsspektrum überlagert ist.



### Röntgenspektrum

Abbildung I.13 zeigt schematisch das Röntgenspektrum, das man für eine Wolfram-Anode bei einer Beschleunigungsspannung von 100 kV erwartet. Die verwendete Nomenklatur der charakteristischen Linien ist ebenfalls angegeben<sup>12</sup>.

Das hochenergetische Ende des Spektrums wird durch die durch die Beschleunigungsspannung bestimmte maximale kinetische Energie  $eU_B$  der Elektronen gegeben:

$$\lambda \geq \lambda_G = \frac{hc}{eU_B} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_G = \frac{1234.5}{U[V]} \text{ nm}$$

Für die Beschleunigungsspannung von 100 kV im obigen Beispiel erhält man als Grenzwellenlänge  $\lambda_G = 1.2 \cdot 10^{-2}$  nm.

Auch wenn wir heute ganz selbst verständlich die Röntgenstrahlung als elektromagne-

<sup>12</sup>Neben der hier gezeigten und auf den Physiker M. Siegbahn zurückgehenden Nomenklatur, existiert eine zweite Notation, die von der International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC) empfohlen wird.



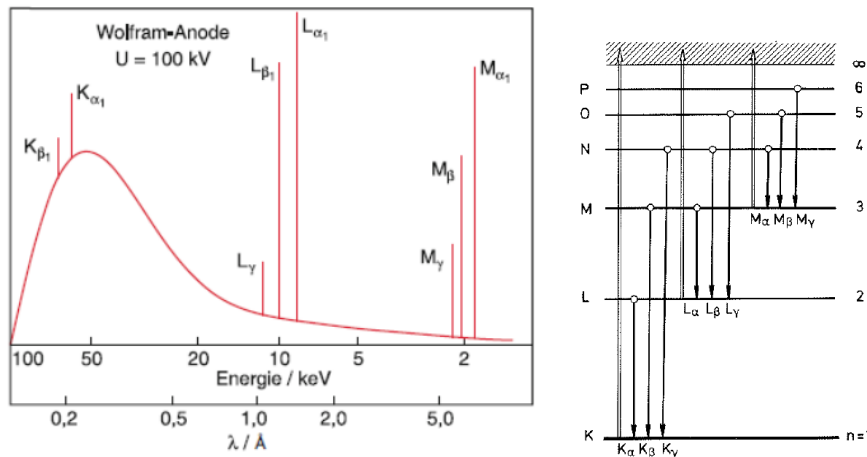


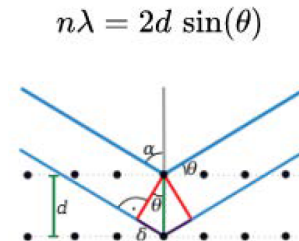
Abbildung I.13: Röntgenspektrum für eine Wolfram-Anode mit  $U_B = 100 \text{ kV}$  (schematisch, aus Demtröder Atomphysik) und Nomenklatur der charakteristischen Röntgenlinien.

tische Strahlung begreifen, so musste man sich Anfang der 1900er Jahre erst davon überzeugen. Wichtige Experimente, um zu etablieren, dass Röntgenstrahlung tatsächlich hochenergetische elektromagnetische Strahlung ist, waren der Nachweis der Polarisation (C. Barkla, 1905) und Beugungs- und Interferenzexperimente (M. Laue, W.H. und W.L Bragg). Das von Vater und Sohn Bragg entwickelte und auf der Beugung der Röntgenstrahlung beruhende Braggsche Spektrometerverfahren wurde zur Vermessung von Röntgenspektren eingesetzt.

Die Methode ist in der nebenstehenden Abbildung skizziert: Fällt eine ebene Welle mit der Wellenlänge  $\lambda$  unter dem Winkel  $\theta$  auf eine Kristallebene, so interferieren die an den benachbarter Ebenen gestreuten Wellen genau dann konstruktiv, wenn die Bragg-Bedingung

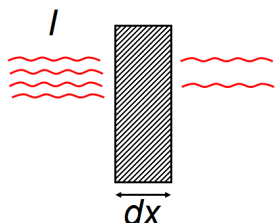
$$2d \cdot \sin \theta = n \cdot \lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

erfüllt ist.



### Absorption von Röntgenstrahlung

Röntgenstrahlung einer Intensität  $I_0$ , die auf einen Absorber fällt, wird durch diesen abgeschwächt und in ihrer Intensität verringert.



Für die Dicke  $dx$  des Absorbers ergibt sich eine Änderung der Intensität  $I$  um den Wert  $dI$  die proportional zu  $dx$  ist. Die Materialabhängigkeit wird durch den Abschwächungskoeffizienten  $\mu$  beschrieben:

$$dI = -\mu I dx$$

Durch Integration erhält man bei anfänglicher Intensität  $I_0$  die verbleibende Intensität  $I(d)$  nach einer Absorberdicke  $d$ :

$$I(d) = I_0 e^{-\mu d}$$

Der Abschwächungskoeffizient  $\mu = \mu_s + \alpha$  hat einen Anteil aufgrund von Streuung ( $\mu_s$ ) und aufgrund von Absorption ( $\alpha$ ). Der Absorptionskoeffizient wird durch das Anregungs- und Ionisationsspektrum des Absorbermaterials gegeben.

Abbildung I.14 zeigt den wellenlängenabhängigen Absorptionkoeffizienten  $\alpha$  für Blei<sup>13</sup>. Gut erkennbar sind die charakteristischen Absorptionskanten, die den Ionisationsenergien der verschiedenen Schalen entsprechen. Der starke Abfall mit kleinerer Wellenlänge bzw. größerer Photonenergie ist proportional zu  $\lambda^{3.5}$  bzw. proportional zu  $\frac{1}{E^{3.5}}$ .<sup>14</sup> Aufgrund der starken  $Z$ -Abhängigkeit,  $\alpha \sim Z^{4 \dots 5}$ , absorbiert Blei Röntgenstrahlung mehr als 1500 mal stärker als Aluminium.

H. Mosley hat die K-Absorptionskanten dazu benutzt, die Kernladungszahl  $Z$  einer Reihe von Elementen zu bestimmen. Er hatte zuvor empirisch für die reziproke Wellenlänge  $\bar{\nu}_K = \frac{1}{\lambda_K}$  der K-Kanten die folgende Beziehung gefunden,

$$\bar{\nu}_K = \frac{1}{\lambda_K} \propto (Z - 1)^2 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\bar{\nu}_K} \propto (Z - 1)$$

Dieser Zusammenhang wird als Mosley'sches Gesetz bezeichnet und folgt unmittelbar aus der obigen Beziehung für die Linien des charakteristischen Spektrums, wenn man  $n_i = \infty$  und  $n_j = 1$  (K-Kanten) einsetzt und für die Abschirmungskonstante  $\Sigma = 1$  annimmt, was man für ein 1s-Elektron auch erwarten würde (die Kernladung wird durch das verbliebene 1s-Elektron eben um eine Einheit abgeschirmt). Für andere Kanten gilt ebenfalls die Proportionalität zu  $(Z - \Sigma)$ , wobei aber stärkere Abschirmungseffekte auftreten (z.B. L-Kanten,  $\Sigma \approx 7$ ).

<sup>13</sup>In der Darstellung ist  $\alpha$  noch durch die Dichte  $\rho$  von Blei dividiert - man spricht deshalb auch von Massenabschwächungskoeffizienten.

<sup>14</sup>Siehe beispielsweise in H.Kolanoski, N.Wermes: Teilchendetektoren<sup>3.5</sup>

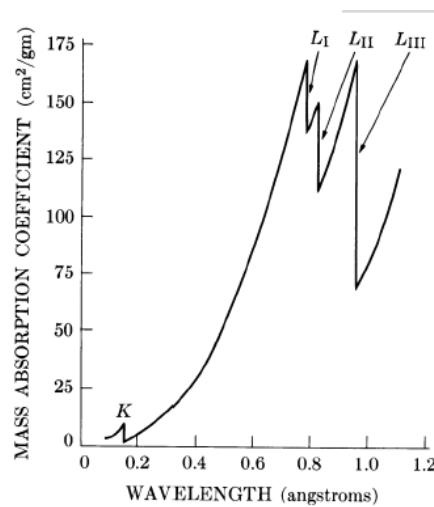


Abbildung I.14: Röntgenabsorptionskoeffizient  $\alpha/\rho$  für Blei. In der Literatur findet man  $\alpha \sim \frac{Z^{4 \dots 5}}{E_\gamma^{3.5}}$ .

## I.7 Literatur

1. W. Demtröder, Experimentalphysik 3, Atome, Moleküle, Festkörper, Springer Verlag.
2. H. Haken und H.C. Wolf, Atom- und Quantenphysik, Springer Verlag.
3. R. Gross, Vorlesungsskript zur Experimentalphysik IV (SomSem 2003), Lehrstuhl für Technische Physik (E23), TU München. Die Online-Version des Skriptes ist leider nicht mehr erreichbar.
4. T. Mayer-Kuckuk, Atomphysik, Teubner Studienbücher, 1985.
5. Lexikon der Chemie (Spektrum.de):  
<https://www.spektrum.de/alias/lexikon/lexikon-der-chemie/>

## Kapitel II

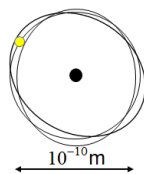
# Fundamentale Materiebausteine und ihre Wechselwirkungen

Das folgende Kapitel führt die Elementarteilchen, die wir heute als fundamentale Bausteine der Materie kennen, sowie die vier fundamentalen Wechselwirkungen, die zwischen ihnen wirken, ein. Das Kapitel wird abgeschlossen mit einer kurzen Einführung von Streuprozessen und einer Wiederholung der relativistischen Kinematik.

### II.1 Aufbau der Materie

Wenn man die Materie mit immer stärkerer Vergrößerung betrachtet, werden immer kleinere Strukturen sichtbar: Atome, Kerne, Nukleonen und schließlich die fundamentalen Quarks. Die Längenskalen, die typischen Bindungsenergien und die dominante Wechselwirkung zwischen werden im Folgenden kurz zusammengefasst.

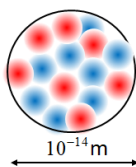
Atom



Atom: Elektronen und Kern

- typ. Bindungsenergien der Elektronen: eV...keV
- elektromagnetische Wechselwirkung

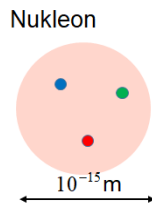
Kern



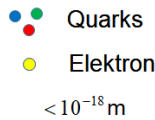
Kern: Protonen und Neutronen,  $\frac{A}{Z} X_N$

- Massenzahl  $A$ , Kernladungszahl  $Z$  und Neutronenzahl  $N$
- typ. Bindungsenergien der Protonen und Neutronen: MeV
- starke Wechselwirkung (Kernkraft)
- Kernradien:

$$R_K \approx 1.2 \text{ fm} \cdot A^{\frac{1}{3}} \quad (\text{wegen } A \sim V \sim R_K^3)$$



Nukleon (Proton, Neutron): Quarks  
 - typ. Bindungsenergien der Quarks  $\mathcal{O}(1 \text{ GeV})$ .  
 - Proton: uud-System,  $m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2$   
 - Neutron: udd-System,  $m_n = 939.6 \text{ MeV}/c^2$



Quarks und Elektronen: fundamental  
 -strukturlos bis  $10^{-18} \text{ m}$  („punktförmig“)  
 -elektrische Ladung  $Q_e/e = +\frac{2}{3}$  (u),  $-\frac{1}{3}$  (d),  $-1$  ( $e^-$ )

Nach dem heutigen Stand unseres Wissens weisen Quarks und Elektronen ( $\rightarrow$  Leptonen) bis zu einer Längenskala von  $10^{-18} \text{ m}$  keine Substruktur auf, weshalb man sie auch als punktförmig bezeichnet. Die untersuchte Längenskala wird durch die maximale Energie der Sonden beschränkt.

Neben den genannten drei fundamentalen Teilchen (u, d, e) tritt in  $\beta$ -Zerfällen von Kernen noch ein viertes Teilchen, das Neutrino  $\nu_e$ , auf:  $n \rightarrow p + e^- \bar{\nu}_e$ . Das Neutrino (hier Anti-Neutrino) ist sehr leicht ( $m < 1 \text{ eV}/c^2$ ) und hat keine elektrische Ladung.

## II.2 Fundamentale Bausteine

Die beiden Quarks ( $u, d$ ) und die beiden Leptonen ( $e^-, \nu_e$ ) bilden die erste Generation fundamentaler Bausteine. Insgesamt wurden drei Generationen beobachtet. Wir wissen seit 2012 dass es keine weiteren Generationen gibt. Die fundamentalen Bausteine werden nach Quarks und Leptonen sortiert. Sie sind alle nach heutigem Kenntnisstand strukturlos und besitzen Spin  $\frac{1}{2}$ , sind also Fermionen. Die Tabelle II.1 listet die drei Generationen fundamentaler Bausteine.

Nur die Quarks und die Leptonen der ersten Generation sowie alle Neutrinos sind stabil. Die Fermionen der zweiten und dritten Generation zerfallen direkt oder über Kaskaden in die Teilchen der ersten Generation.

Die Massen der Teilchen nehmen mit den Generationen zu. Auch wenn es möglicherweise einen tieferen Grund für das Massenspektrum gibt, so verstehen wir das Spektrum bis heute nicht.

Zu allen in der Tabelle aufgeführten Teilchen existieren Antiteilchen mit entgegengesetzter Ladung, also beispielsweise:

$$\begin{aligned} e^- &\rightarrow e^+ & u &\leftrightarrow \bar{u} \\ \nu_e &\rightarrow \bar{\nu}_e & d &\leftrightarrow \bar{d} \end{aligned}$$

Generation	I	II	III	$Q_e$
Leptonen	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	0
	$- m_\nu < 1 \text{ eV} -$			
	$e^-$ $\sim 511 \text{ KeV}/c^2$	$\mu^-$ $\sim 106 \text{ MeV}/c^2$	$\tau^-$ $\sim 1.78 \text{ GeV}/c^2$	-1
Quarks	$u$ $\sim 2 \text{ MeV}/c^2$	$c$ $\sim 1.3 \text{ GeV}/c^2$	$t$ $\sim 173 \text{ GeV}/c^2$	$+\frac{2}{3}$
	$d$ $\sim 5 \text{ MeV}/c^2$	$s$ $\sim 95 \text{ MeV}/c^2$	$b$ $\sim 4.3 \text{ GeV}/c^2$	$-\frac{1}{3}$

Tabelle II.1: Fundamentale Fermionen, jeweils drei Generationen von Leptonen und Quarks. Neben der elektrischen Ladung sind auch die Massen angegeben. Für die Neutrinos ist ein Massenlimit angegeben (Durch die Beobachtung von Neutrino-Oszillation wissen wir, dass Neutrinos massive Teilchen sind).

Während Leptonen als freie Teilchen existieren bilden Quarks typischerweise innerhalb von etwa  $10^{-24}$  s hadronische Bindungszustände (**Hadronen**) aus Quark und Antiquark - sogenannte **Mesonen** - bzw. aus drei Quarks - sogenannte **Baryonen** oder aus drei Antiquarks (Antibaryonen). Quarks existieren also nicht als asymptotisch freie Teilchen.

## II.3 Fundamentale Wechselwirkungen

Zwischen den fundamentalen Teilchen wirken vier verschiedene Wechselwirkungen (Kräfte):

- Die elektromagnetische Wechselwirkung wirkt zwischen allen elektrisch geladenen Teilchen.
- Die schwache Wechselwirkung wirkt zwischen allen fundamentalen Teilchen. Sie koppelt an die schwache Ladung.
- Die starke Wechselwirkung, wirkt nur zwischen Quarks, da nur diese Farbladung tragen, an die die starke Wechselwirkung koppelt. Diese Kraft bindet die Quarks zu Hadronen, die selbst ohne Farbladung (farbneutral) sind. Die Kernkraft, die die Neutronen und Protonen in den Kernen bindet, beruht ebenfalls auf der starken Wechselwirkung.
- Die Gravitation, wirkt zwischen allen massiven Teilchen. Sie ist aber verglichen mit allen anderen Kräften extrem schwach und in der Teilchenphysik als Kraft zwischen den fundamentalen Teilchen vernachlässigbar. Auf großen Skalen ist die Gravitation bedeutend, weil sich die Effekte der Massen immer nur positiv addieren.

Die klassische Behandlung von Kräften als Resultat eines Potentials ist wenig befriedigend. Streut man beispielsweise ein Elektron an einem elektrischen Potential, so kommt es zu einem Impulsaustausch, ohne dass dies mit einem Teilchenaustausch verbunden wäre. Es handelt sich um eine Art Fernwirkung deren Ursprung man nicht wirklich versteht.

In der Quantenfeldtheorie behandelt man Wechselwirkungen als quantisierte Felder. Die Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen werden durch Austausch von Feldquanten, die man als Austauschbosonen bezeichnet und die Spin 1 besitzen, vermittelt.

So kann man beispielsweise die elektromagnetische Streuung zweier Elektronen als Austausch von Photonen (Austauschboson der elektromagnetischen Wechselwirkung) beschreiben - siehe hierzu Abbildung II.1.

Das Standardmodell der Teilchenphysik ist eine Quantenfeldtheorie und beschreibt die elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung zwischen den fundamentalen Teilchen als Austausch von Photonen,  $W^\pm$ ,  $Z$ -Bosonen und Gluonen.

Tabelle II.2 fasst für die drei Wechselwirkungen des Standardmodells sowie für die Gravitation die wichtigsten Eigenschaften zusammen. Bisher ist es nicht gelungen die Gravitation im Rahmen einer Quantenfeldtheorie konsistent zu behandeln.

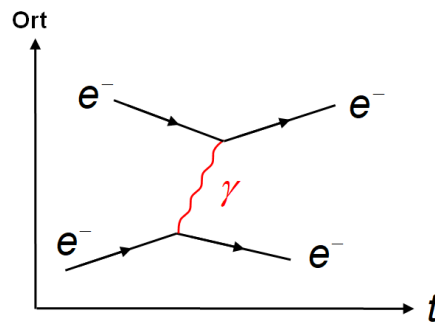


Abbildung II.1: Illustration (Feynman-Diagramm) der elektromagnetischen Wechselwirkung zweier Elektronen durch Austausch eines Photons.

Wechselwirkung	rel. Stärke	Austauschboson	Spin	Massen	Reichweite
starke	1	8 Gluonen	1	0	< 1 fm
elektromagn.	$\sim 10^{-2}$	Photon	1	0	$\infty$
schwache	$\sim 10^{-7}$	$W^\pm, Z$	1	80, 91 GeV/c <sup>2</sup>	$\sim 10^{-18}$ m
Gravitation	$\sim 10^{-38}$	Graviton?	2	0	$\infty$

Tabelle II.2: Bekannte Wechselwirkungen, ihre relative Stärke, die zugehörigen Austauschbosonen, sowie die Reichweite<sup>1</sup>.

**Higgs-Boson:** Neben den fundamentalen Fermionen und den Austauschbosonen der drei Wechselwirkungen gibt es ein weiteres fundamentales Boson mit Spin 0: Das Higgs-Boson koppelt an alle massive Teilchen und verleiht diesen durch diese Kopplung Masse. Das Higgs-Boson wurde 2012 am LHC entdeckt und komplettiert das Standardmodell.

### II.3.1 Wechselwirkungen im Austauschbild

Im Folgenden wird zur Illustration der drei Kräfte je ein Beispiel-Prozess gegeben.

<sup>1</sup>Aufgrund der großen Masse  $M$  der Austauscheteilchen erfährt die schwache Wechselwirkung einen zusätzlichen Abschwächungsterm  $\sim e^{-Mrc/\hbar}$  was die Reichweite auf sehr kurze Abstände beschränkt. Der Energie-Impulsfluss wird für die e.m., schwache und starke Wechselwirkung durch einen 4er-Vektor (s.u.) beschrieben. Im Gegensatz dazu wird im Rahmen der Gravitationstheorie der Energie-Impuls-Fluss durch einen 2-dimensionalen Tensor gegeben, weshalb Gravitonen Spin-2 Bosonen sein müssen.



- **Starke Wechselwirkung:** Sie wirkt nur zwischen Teilchen mit Farbladungen (Quarks) bzw. als Kernkraft zwischen den Nukleonen eines Kerns<sup>2</sup>. Im Gegensatz zur elektrischen Ladung gibt es 3 Farbladungen, die man als r, g, b (rot, grün und blau) bezeichnet. Diese neue Quantenzahl hat aber nichts mit Farbe im alltäglichen Sinn zu tun hat. Antiquarks tragen entsprechende Antifarbe ( $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ ). Die Wechselwirkung zwischen zwei farbgeladenen Quarks wird durch Gluonen vermittelt. Abbildung II.2 zeigt den Austausch eines Gluons zwischen den beiden Quarks eines geladenen Pions. Der Austausch des Gluons verändert die Quarks nicht.

Versucht man die Quarks, die in einem Hadron gebunden sind, voneinander zu entfernen, so wirken starke Kräfte zwischen ihnen. Die Energie steigt immer weiter mit dem Abstand der Quarks an. Die Quarks scheinen im Hadron eingeschlossen zu sein (confinement). Das Potential, das man beispielsweise für einen gebundenen  $c\bar{c}$ -Zustand (Charmonium-Zustände) ermittelt hat, hat die Form

$$V(r) \approx -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \hbar c + kr \quad \text{mit } k \approx 0.85 \text{ GeV/fm}$$

und ist in Abbildung II.2 gezeigt. Die Konstante  $\alpha_s$  ist die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung. Ab einem Abstand von etwa 1 fm, was in etwa der Größe des Hadrons entspricht, steigt das Quarkpotential linear an.

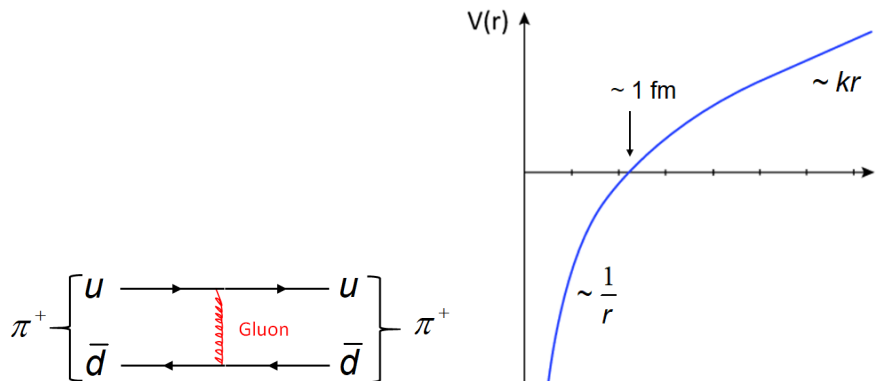


Abbildung II.2: Austausch eines Gluons zwischen den Quarks eines Pions  $\pi^+$ ) (links) und starkes Wechselwirkungspotential zwischen den Quarks eines  $c\bar{c}$ -Systems. Die Pfeilrichtung der Antiteilchen wird im nächsten Kapitel diskutiert.

**Hadronen:**

Wie bereits oben erwähnt, sind Quarks in Mesonen oder Baryonen gebunden.

---

<sup>2</sup>Die Kernkraft, die zwischen den farbneutralen Nukleonen wirkt, geht auf die starke Wechselwirkung zurück. Bisher ist es aber nicht gelungen, die Kernkraft konsistent im Rahmen der starken Wechselwirkung zu beschreiben.

**Mesonen:** Quark-Antiquark-Systeme, wobei die Quarks und Antiquarks jeweils Farbe und Antifarbe tragen und das Meson dadurch farbneutral ist. Beispiele sind:  $\pi^+$  ( $u\bar{d}$ ),  $\pi^-$  ( $\bar{u}d$ ),  $K^+$  ( $u\bar{s}$ ),  $K^-$  ( $\bar{u}s$ ).

**Baryonen:** Systeme aus drei Quarks mit drei verschiedenen Farbladungen (r,g,b), so dass der Gesamtzustand farbneutral ist. Beispiele sind:  $p$  ( $uud$ ),  $n$  ( $udd$ ),  $\Lambda^0$  ( $uds$ ). Ant-Baryonen bestehen entsprechend aus drei Antiquarks mit verschiedenen Antifarben.

Es gibt mittlerweile eine Reihe experimenteller Hinweise, dass auch kurzlebige exotische Hadronen mit vier bzw. fünf Quarks/Antiquarks existieren (Tetraquarks:  $qq\bar{q}\bar{q}$ , Pentaquarks:  $qqqq\bar{q}$ ). Der Nachweis dieser Zustände und die eindeutige Identifikation als Multiquarkzustand ist Gegenstand aktueller Forschung.

- **Elektromagnetische Wechselwirkung:** Ein Beispiel für einen elektromagnetischen Prozess (Elektron-Elektron-Streuung) wurde bereits oben gegeben.
- **Schwache Wechselwirkung:** Die schwache Wechselwirkung koppelt sowohl an Quarks als auch an alle Leptonen - für die elektrisch neutralen Neutrinos ist sie die einzige Wechselwirkung. Sie ist die Ursache des radioaktiven  $\beta$ -Zerfalls bei dem ein Neutron in ein Proton, Elektron und Neutrino zerfällt. Abbildung II.3 zeigt den schwachen Zerfall eines Myons als auch den Zerfall eines Neutrons. Dem Neutron-Zerfall liegt als fundamentaler Prozess der Übergang eines d-Quarks in ein u-Quark zugrunde. Der Austausch von geladenen W-Bosonen bewirkt den Übergang des Fermions in ein anderes Quark oder Lepton.

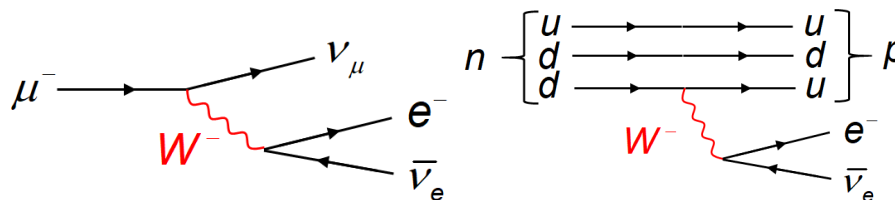


Abbildung II.3:  $\beta$ -Zerfall eines Myons  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$  (links) und  $\beta$ -Zerfall eines Neutrons  $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$  (rechts). Die Pfeilrichtung der Antiteilchen wird im nächsten Kapitel diskutiert.

Die schwache Wechselwirkung ist soviel schwächer als die elektromagnetische Wechselwirkung, da die ausgetauschten Bosonen eine sehr große Masse haben.

### II.3.2 Zusammenfassung der Wechselwirkungen zwischen Teilchen

Die folgende Tabelle fasst nochmals für die verschiedenen Teilchen (geladene Leptonen  $\ell^-$ , Neutrinos  $\nu$  und Quarks  $q$ ) die Wechselwirkungen zusammen, an denen die Teilchen

teilnehmen:

Teilchen	starke WW	e.m. WW	schwache WW
$\ell^-$	–	×	×
$\nu$	–	–	×
$q$	×	×	×

## II.4 Strukturuntersuchung durch Streuexperimente

Streuexperimente liefern über Reaktionsraten sowie über Impuls- und Winkelverteilungen der Reaktionsprodukte Informationen über die Dynamik der Wechselwirkung und über den Aufbau und die Struktur der Teilchen. Im Folgenden werden elastische und inelastische Streuexperimente und Annihilationsexperimente kurz eingeführt.

**Elastische Streuung** eines Test- oder Probesteilchens  $a$  an einem Targetteilchen  $A$ :  $a + A \rightarrow a + A$ . Diese Situation ist in Abbildung II.4 skizziert. Für ein unendlich schweres

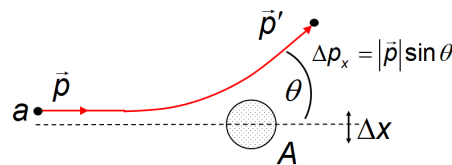


Abbildung II.4: Auflösung der Struktur eines Targetteilchens in einem Streuexperiment.

Target A erfährt das Testteilchen a eine Impulsänderung in x-Richtung  $\Delta p_x = |\vec{p}| \sin \theta$ . Um Targetstrukturen der Größe  $\Delta x$  aufzulösen, muss die De Broglie Wellenlänge  $\lambda = h/|\vec{p}|$  des ausgetauschten Teilchens - im Falle der elektromagnetischen Wechselwirkung handelt es sich um ein Photon mit dem entsprechenden Impuls  $\Delta p_x$  - in der Größenordnung der Struktur, die aufgelöst werden soll, sein (Erinnerung aus Optik:  $\lambda = \lambda/2\pi < \Delta x$ ). Mit dem skizzierten Streuexperiment können also Targetstrukturen  $\Delta x$  bis zu

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p_x}$$

aufgelöst werden. Für einen Streuwinkel  $\theta = 45^\circ$  können abhängig vom Impuls des Teilchens die folgenden Strukturen aufgelöst werden:

p in GeV/c	$\Delta x (\theta = 45^\circ)$
1	$0.3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$
100	$3 \cdot 10^{-18} \text{ m}$
200	$1.5 \cdot 10^{-18} \text{ m}$

Zur Abschätzung benutzt man  $\hbar c = 197 \text{ MeVfm}$ .

### Inelastische Streuexperimente und Annihilationen

Durch einen inelastischen Stoß kann das Targetteilchen in einen angeregten Zustand versetzt werden, der dann in neue Teilchen zerfallen kann:

$$a + B \rightarrow a + B^* (\rightarrow c + d)$$

Alternativ können aus 2 kollidierenden Teilchen völlig neue Teilchen erzeugt werden:

$$a + b \rightarrow c + d + \dots$$

Ein Sonderfall ist die Annihilation zweier Teilchen und die paarweise Erzeugung neuer Teilchen, z.B. die Produktion eines Myonpaares aus der Annihilation von Elektron und Positron:

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$$

## II.5 Relativistische Kinematik

In Experimenten der Teilchenphysik sind die beteiligten Teilchen in der Regel hochrelativistisch, d.h. die Energie der Teilchen ist sehr viel größer als die Ruheenergie, die durch die Masse der Teilchen gegeben ist:  $E \gg mc^2$ . Man muss also i. d. R. relativistisch rechnen. Die relativistische Energie-Impulsbeziehung lautet<sup>3</sup>:

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

Um die Teilchen-Kinematik zu beschreiben benutzt man 4er-Impulse, in denen Energie und Impuls des Teilchens zusammengefasst werden:

$$k = (E, c\vec{p}) = (k^0, k^1, k^2, k^3) = k^\mu$$

In der Vorlesung wird statt eines neuen Symbols  $k$  auch wieder das Symbol  $p$  des Impulses zur Bezeichnung des 4er-Impulses benutzt, also  $p = (E, c\vec{p})$ . Zur Unterscheidung wird dann aber der Betrag von  $\vec{p}$  explizit mit  $|\vec{p}|$  bezeichnet. Als Dimension des 4er-Impulses wurde die Energie gewählt, aber natürlich kann man auch den Impuls als Dimension wählen.

### Skalarprodukte von 4er-Vektoren:

Das Skalarprodukt zweier 4er-Vektoren  $a = (a_0, \vec{a})$  und  $b = (b_0, \vec{b})$  ist definiert als:

$$a \cdot b = a_0 b_0 - \vec{a} \vec{b},$$

<sup>3</sup>Häufig wird  $c=1$  gesetzt und man erhält dann  $E^2 = p^2 + m^2$ .

Das so definierte Skalarprodukt zweier 4er-Impulse ist lorentzinvariant, d.h. es ist unabhängig von der Wahl des Bezugssystems. Die 4er-Impulse selbst sind dies natürlich nicht. Die Invarianz des Skalarprodukts vereinfacht Rechnungen, da man Bezugssysteme wählen kann, in denen die 4er-Impulse besonders einfach sind.

**Beispiel 1:**  $p \cdot p = p^2 = (E, c\vec{p})^2$

Im Labor, in dem sich das Teilchen mit Impuls  $\vec{p}$  bewegt, gilt:  $p^2 = E^2 - c^2\vec{p}^2 = m^2c^4$   
 Im Ruhesystem des Teilchens ist  $\vec{p} = 0$  und  $E = mc^2$ . Damit:  $p^2 = (mc^2, \vec{0})^2 = m^2c^4$

Da in allen Systemen die Wurzel aus dem Quadrat des 4er-Impulses der Ruhemasse des Teilchens entspricht,  $\sqrt{p^2} = mc^2$ , bezeichnet man  $\sqrt{p^2}$  auch als **invariante Masse**  $\times c^2$ .

**Beispiel 2:** Kollisionsenergie zweier Teilchen

$$p_1 = (E_1, c\vec{p}_1) \rightarrow \leftarrow p_2 = (E_2, c\vec{p}_2)$$

Das Quadrat der Summe der beiden 4er-Vektoren, die den aufeinandertreffenden Teilchen entsprechen,  $(p_1 + p_2)^2$  wird mit  $s$  bezeichnet,  $s = (p_1 + p_2)^2$ , und entspricht dem Quadrat der Schwerpunktsenergie  $E_{CMS}^2$ , wie man sich leicht überzeugen kann:

a) Zwei hochrelativistische Teilchen 1 und 2 (z.B.  $e^+$  und  $e^-$ ) kollidieren mit entgegengesetzt gleichem Impuls  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ . Da die Teilchen hochrelativistisch sind, gilt für beide Teilchen  $m_i c^2 \ll E_i$  und damit  $E_i \approx c|\vec{p}_i|$ . Für  $s$  erhält man mit obiger Definition:

$$s = (p_1 + p_2)^2 \approx ((c|\vec{p}_1|, \vec{p}_1) + (c|\vec{p}_1|, -\vec{p}_1))^2 = (2c|\vec{p}_1|, \vec{0})^2 = 4c^2\vec{p}_1^2 = 4E_1^2$$

Für  $\sqrt{s}$  erhält man  $\sqrt{s} = 2E_1$ , was der Schwerpunktsenergie  $E_{CMS}$  entspricht.

b) Ein hochrelativistisches Teilchen (z.B.  $e^-$ ) mit Mass  $m$  und Impuls  $\vec{p}_1$  trifft auf ein ruhendes Target mit Masse  $M$  und  $\vec{p}_2 = 0$ . Dann erhält man für  $s$ :



$$\begin{aligned} s &= ((E_1, c\vec{p}_1) + (Mc^2, 0))^2 = (E_1 + Mc^2, c\vec{p}_1)^2 \\ &= E_1^2 + 2Mc^2E_1 + M^2c^4 - c^2\vec{p}_1^2 \\ &\approx 2Mc^2E_1 + M^2c^4 \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt für  $m \ll E_1$  die Näherung  $E_1 \approx c|\vec{p}_1|$  verwendet wurde. Falls  $E_1 \gg Mc^2$  ist, findet man für  $\sqrt{s} = E_{CMS} \approx \sqrt{2Mc^2E_1}$ , was sehr viel kleiner als die Energie  $E_1$  ist.

**Berechnung von  $\beta$  und  $\gamma$ :** Bei der Berechnung von Flugdistanzen, Lebensdauern und Teilchen-Boost müssen immer wieder  $\beta$  und  $\gamma$ ,

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

berechnet werden. Mit den relativistischen Beziehungen für Energie und Impuls:

$$E = \gamma mc^2 \quad |\vec{p}| = \gamma m\beta c,$$

lassen sich die folgenden einfachen Ausdrücke herleiten:

$$\beta = \frac{c|\vec{p}|}{E} \quad \gamma = \frac{E}{mc^2} \quad \beta\gamma = \frac{|\vec{p}|}{mc}$$

Wenn immer es geht, sollte man diese Beziehungen zur Berechnung benutzen - häufig lässt sich das sogar im Kopf durchführen.

## II.6 Natürliche Einheiten

Wir benutzen in dieser Vorlesung weitestgehend SI-Einheiten. Viele Lehrbücher benutzen allerdings natürliche Einheiten:

$$c = \hbar = 1$$

Diese Einheitenwahl vereinfacht viele Formeln (z.B. relativistische Energiebeziehung:  $E^2 = p^2 + m^2$ ), erfordert aber etwas Erfahrung im Umgang.

In natürlichen Einheiten werden alle Größen in Energien ausgedrückt: Die Einheit der Energie, des Impulses und der Masse sind GeV. Die Einheiten der Zeit und der Länge sind  $\text{GeV}^{-1}$ . Flächen werden in  $\text{GeV}^{-2}$  angegeben. Um z.B. eine Länge von  $\text{GeV}^{-1}$  in SI-Einheiten umzurechnen, bedient man sich der Konstante  $\hbar c = 0.197 \text{ GeV fm}$ ,

$$L_{nat} = \text{GeV}^{-1} \xrightarrow{\times \hbar c} L_{SI} = 0.197 \text{ fm}$$

Zur Umrechnung von Zeiten benutzt man analog  $\hbar c/c = 0.66 \cdot 10^{-24} \text{ GeVs}$ ,

$$t_{nat} = \text{GeV}^{-1} \xrightarrow{\times \hbar c/c} t_{SI} = 0.66 \cdot 10^{-24} \text{ s}$$

# Kapitel III

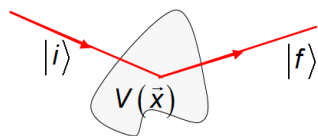
## Beschreibung von Streuprozessen

### III.1 Feynman-Diagramme

Feynman-Diagramme sind heute ein wichtiges Werkzeug der Teilchenphysiker, um Wechselwirkung zwischen den Teilchen zu beschreiben, und um die Übergänge zwischen den Teilchen zu verstehen. Eine korrekte theoretische Einführung ist nur im Rahmen der Quantenfeldtheorie möglich. Aus der Lagrangedichte der jeweiligen Theorie können die Feynman-Regeln abgeleitet werden, um Übergangsmatrixelemente zu berechnen. Feynman-Diagramme vermitteln aber bereits ohne konkret ausgerechnet zu werden ein gutes Verständnis der Dynamik des Wechselwirkungsprozesses.

Ein typisches Problem ist die Vorhersage der Wechselwirkungswahrscheinlichkeit bzw. der Rate eines Streuprozesses, beispielsweise des Prozesses  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

Aus der Atomphysik ist bereits die Übergangsamplitude (auch Übergangsmatrixelement) eines atomaren Übergangs bekannt.



Hamilton-Operator:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{WW} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

Der Anteil  $\hat{H}_0$  beschreibt das freie, ungestörte Teilchen und  $\hat{H}_{WW}$  die Wechselwirkung mit dem Potential. Für kleine Störungen  $\hat{H}_{WW} < \hat{H}_0$  erzeugt der Wechselwirkungsterm Übergänge zwischen den Eigenfunktionen des ungestörten Hamiltonians  $\hat{H}_0$ ,  $\psi_i$  und  $\psi_k$ ,

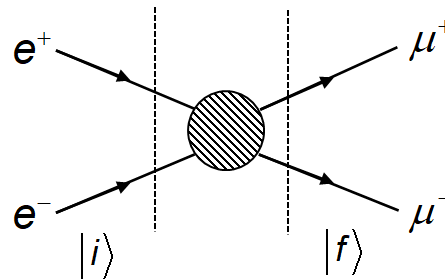
$$\psi_j = N \exp(i\vec{k}_j\vec{x} - i\omega_j t) \quad \text{mit} \quad \vec{k}_j = \frac{\vec{p}_j}{\hbar} \quad \text{und} \quad \omega_j = \frac{E_j}{\hbar} \quad N = \text{Normierung}$$

Das Übergangsmatrixelement  $\mathcal{A}(i \rightarrow f)$  ist gegeben durch:

$$\mathcal{A}(i \rightarrow f) = \mathcal{A}_{fi} = \langle f | \hat{H}_{WW} | i \rangle = \int \psi_f^* \hat{H}_{WW} \psi_i d\vec{x}$$

Aufgrund der Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion muss zur Berechnung der Übergangsamplitude noch über die Zeit  $T$  der Wechselwirkung integriert werden<sup>1</sup>. Die Übergangsrate  $\omega_{fi}$ , d.h. die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit, ergibt sich durch Division der Übergangswahrscheinlichkeit durch die Wechselwirkungszeit  $T$ . Man findet, dass die Übergangsrate  $\omega_{fi}$  proportional zu  $|\mathcal{A}_{fi}|^2$  ist (siehe hierzu auch **Fermi's Goldene Regel**)<sup>2</sup>. Bei dieser Betrachtung bleibt das Teilchen erhalten und wechselt nur seinen Zustand.

In der Teilchenphysik ist die Situation aber komplizierter:



- komplexe Anfangs- und Endzustände
- die Teilchen vernichten sich und neue Teilchen entstehen
- die Teilchen sind relativistisch

Um die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen zu behandeln sind in der QFT die Wellenfunktionen nicht mehr skalare Funktionen sondern Funktionen von Operatoren, die Teilchen und Antiteilchen mit Impuls  $\vec{k}$  erzeugen und vernichten können.

Um zu berücksichtigen, dass die Teilchen relativistisch sind, wird nicht mehr der klassische Ausdruck für die kinetische Energie sondern die relativistische Energie-Impuls-Beziehung verwendet. Statt der Schrödinger-Gleichung wird für die relativistische Fer-

<sup>1</sup>Für die Übergangsamplitude nach der Wechselwirkung erhält man

$$c_{fi}(T) = -i \int_0^T \langle f | \hat{H}_{WW} | i \rangle e^{i(E_f - E_i)t} dt.$$

Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit für den Übergang durch  $\mathcal{P}_{fi} = c_f(T)c_f(T)^*$  gegeben.

<sup>2</sup>Zur Ableitung der Regel benutzt man, dass das bei der Berechnung von  $c_{fi}$  auftretende Integral  $\int \dots e^{i(E_f - E_i)t} dt$  zu einer  $\delta$ -Funktion  $\delta(E_f - E_i)$  führt, die die Energieerhaltung im Prozess sicherstellt.



mionen die Dirac-Gleichung verwendet. Aufgrund der quadratischen Form der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = m^2c^4 + c^2\vec{p}^2$$

existieren positive und negative Energieeigenwerte:

$$E_+ = +\sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2} > 0 \rightarrow \omega_+ = \frac{+\sqrt{\dots}}{\hbar} > 0$$

$$E_- = -\sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2} < 0 \rightarrow \omega_- = \frac{-\sqrt{\dots}}{\hbar} < 0$$

mit zugehörigen Eigenfunktionen  $\psi_{\pm}$ :

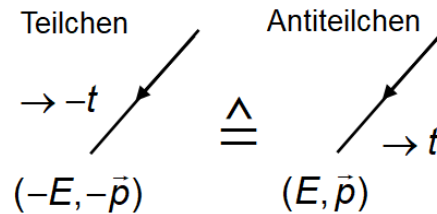
$$E_+ > 0 : \psi_+ = N \exp(i[\vec{k}_+\vec{x} - \omega_+t])$$

$$E_- < 0 : \psi_- = N \exp(-i[\vec{k}_-\vec{x} - \omega_-t])$$

Die Lösungen mit negativer Energie sind notwendig um die Gesamtheit aller Lösung beschreiben zu können und können nicht einfach als unphysikalisch wegdiskutiert werden. Diese Lösungen kann man wegen  $\omega < 0$  als „rückwärts in der Zeit propagierend“ auffassen:

$$\psi_- \sim \exp(+i\omega_-t) = \exp(+i(-\omega_-)(-t))$$

Zurückgehend auf eine Interpretation von Stückelberg und Feynman kann man diese Lösungen als die Beschreibung von Antiteilchen (Positron) mit umgekehrter Ladung auffassen, die mit  $(E, \vec{p})$  in positive Zeitrichtung propagieren, wobei hier  $E$  und  $\vec{p}$  die physikalische Energie und der Impuls des Antiteilchens sind. Das wird durch die folgende Abbildung nochmals graphisch dargestellt:



Die Lösung zu den negativen Energieeigenwerte erlauben also die Beschreibung von Antiteilchen. In den Feynman-Diagrammen erscheinen Antiteilchen deshalb immer als „rückwärts in der Zeit“ laufende Pfeile.

### III.1.1 Feynman-Graphen der elektromagnetischen Wechselwirkung (QED)

Für den elektromagnetischen Streuprozess  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  zeigt Abbildung III.1 den Feynman-Graphen. Die Zeit läuft hierbei von links nach rechts: die Linke Seit repräsentiert

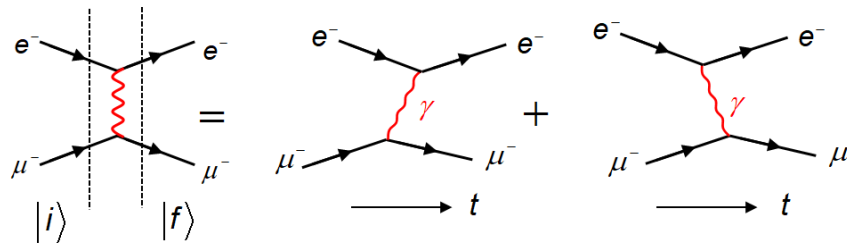


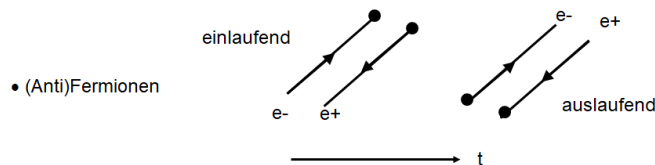
Abbildung III.1: Der links gezeigte Streuprozess repräsentiert die Summe aller möglichen Zeitordnungen.

also den Anfangszustand, die rechte Seite den Endzustand des Streuprozesses. Das Feynman-Diagramm repräsentiert die Summe aller möglichen Zeitordnungen, die in diesem Prozess auftreten können und für die zwei Beispiele skizziert sind. Auch wenn die Assoziation nahe liegt, so stellen Feynman-Graphen keine Orts-Zeit-Trajektorien der Prozesse dar (und sollten in diesem Sinne auch nicht überinterpretiert werden), sondern repräsentieren in anschaulicher Weise Rechenregeln zur Berechnung der Übergangsmatrixelemente.

Im Folgenden werden für die Quantenelektrodynamik, die einzelnen Elemente der Feynman-Diagramme eingeführt und ihre Bedeutung erläutert.

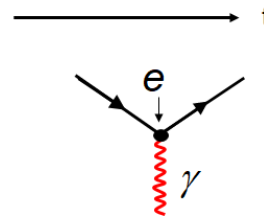
Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik

- Im Limit freie ein- und auslaufende Fermionen (Anti-Fermionen) werden als Pfeile in positiver (negativer) Zeitrichtung dargestellt.



- Das Austauschboson der QED ist das Photon, das als Wellenlinie dargestellt wird.
- In der QED gibt es nur eine Art von Kopplung (Vertex), nämlich die Kopplung des Photons an ein Fermion. Die Stärke dieser Kopplung wird durch die elektrische Ladung des Fermions gegeben. Für Elektronen ist die elektrische Ladung  $e \sim \sqrt{\alpha}$ .

- Elementarer Vertex

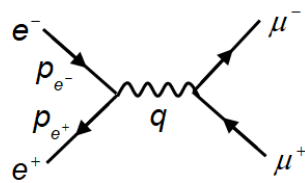


Der in der Abbildung dargestellte Elektron-Photon-Vertex ist das Basiselement der QED. Physikalisch messbare Prozesse müssen, um 4er-Impulserhaltung zu erfüllen (masseloses Photon), mindestens zwei dieser Basiselemente (Vertices) aufweisen.

- An einem Vertex gilt 4er-Impulserhaltung, Ladungserhaltung und Leptonzahlerhaltung (s.u.).
- Innere Linien z.B. Photonlinien, bezeichnet man auch als Propagator. Die ausgetauschten Teilchen sind i. d. R. virtuell, d.h. i. d. Regel erfüllen sie nicht die Energie-Impulsbeziehung eines freien Teilchens, insbesondere ist  $p^2 \neq m^2c^4$ . Für den 4er-Impuls dieser ausgetauschter Teilchen verwendet man typischerweise das Symbol  $q$ .
- Äußere, einlaufende bzw. auslaufende Teilchen sind reell und erfüllen die Energie-Impuls-Beziehung. Insbesondere gilt hier  $p^2 = m^2c^4$ .

Beispiel für virtuelles Austauschphoton:

$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \text{ bei LEP: } 45 \text{ GeV } e^- \rightarrow \leftarrow e^+ 45 \text{ GeV}$$



4er-Impuls  $q$  des Photons:

$$q = (E_e, c\vec{p}_e) + (E_e, -c\vec{p}_e) = (2E_e, 0)$$

$$q^2 = 4E_e^2 \neq m_\gamma^2c^4 = 0$$

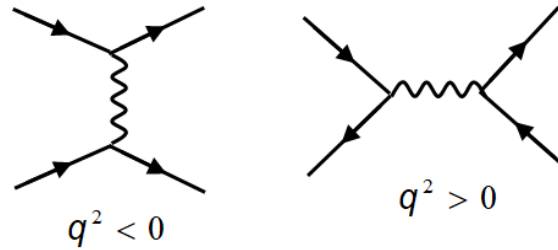
Beschreibt also kein freies Photon mit  $m_\gamma = 0$ .

CMS:  $\vec{p}_{e^-} = -\vec{p}_{e^+} = \vec{p}_e$

Die Energie-Impuls-Beziehung ist also für **virtuelle** Photonen verletzt. Dies ist aufgrund der Heisenberg'schen Unschärferelation  $\Delta E \Delta t \approx \hbar$  für eine kurze Zeit möglich. Das erlaubt interessante Quantenfluktuationen.

### $q^2$ ausgetauschter Photonen in verschiedenen Prozessen

Je nach Vorzeichen von  $q^2$  des ausgetauschten virtuellen Photons (bzw. des ausgetauschten Teilchens) spricht man von raumartigen Prozessen mit  $q^2 < 0$  bzw. zeitartigen Prozessen mit  $q^2 > 0$ :



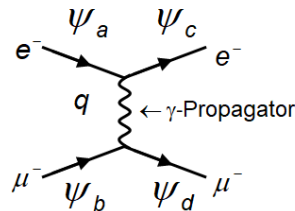
Für freie Photonen (beispielsweise abgestrahlte Bremsstrahlungsphotonen) ist  $p^2 = 0$ .

### Feynman-Graphen und Übergangsmatrixelement (Übergangsamplitude)

Wie bereits erwähnt, erlaubt es der Feynman-Graph eines Prozesses, das Übergangsmatrixelement  $\mathcal{A}_{fi}$  aufzuschreiben. Im Rahmen dieser Vorlesung kann nur die Struktur des Übergangsmatrixelementes und die Beziehung zum Feynman-Graph diskutiert werden. Dazu betrachtet man wieder den einfachen Streuprozess  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ , der in nebenstehender Abbildung skizziert ist.

Struktur des Übergangsmatrixelementes  $\mathcal{A}_{fi}$ :

$$\mathcal{A}_{fi}(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) = \underbrace{\langle \psi_c | \mathcal{O} | \psi_a \rangle}_{\mathcal{O} \sim e} \cdot \underbrace{\gamma\text{-Propagator}}_{\sim \frac{1}{q^2}} \cdot \underbrace{\langle \psi_d | \mathcal{O} | \psi_b \rangle}_{\mathcal{O} \sim e}$$



Die Terme  $\langle \psi_f | \mathcal{O} | \psi_i \rangle$  beschreiben den Elektronen(Myon)-strom und die elektromagnetische Kopplung über einen Wechselwirkungsoperator  $\mathcal{O}$  an das Photon, die proportional zur Ladung  $e$  der Fermionen ist<sup>a</sup>. Das ausgetauschte Photon wird durch den Propagator  $\sim \frac{1}{q^2}$  beschrieben.

<sup>a</sup>Um den Spin relativistischer Teilchen zu berücksichtigen sind die in den Strömen  $\langle \psi_f | \mathcal{O} | \psi_i \rangle$  verwendeten Funktionen  $\psi_i$  und  $\psi_f$  keine skalare Funktionen sondern 4-dimensionale Spinoren:  $\psi_i$  und  $\psi_f$  sind Lösungen der Dirac-Gleichung.

Für das Übergangsmatrixelement erhält man also

$$\mathcal{A}_{fi}(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) \sim e \cdot \frac{1}{q^2} \cdot e \sim \frac{\alpha}{q^2}$$

wobei im letzten Ausdruck die Feinstrukturkonstante  $\alpha \sim e^2$  verwendet wurde. In ähnlicher Weise können auch andere Prozesse beschreiben werden.

Ein physikalisch beobachtbarer Prozess, z.B. die Elektron-Positron-Streuung,  $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$ , wird durch die Summe aller möglichen Amplituden (Feynman-Graphen), die zum

gleichen Endzustand führen, beschreiben. Die Einzelamplituden werden kohärent, das heißt auf Amplituden-Level zur Gesamtamplitude addiert. Eine Observable wie beispielsweise die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit ergibt sich dann als Betragsquadrat der Gesamtamplitude. Für das Beispiel der Elektron-Positron-Streuung ist das in der folgenden Abbildung schematisch gezeigt:

$$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$

Die Wechselwirkungsrate (WW-Rate) ergibt sich dann als,

$$\text{WW-Rate} \sim |\mathcal{A}|^2 = |\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2|^2$$

Man erwartet also nicht nur Beiträge der Einzelamplituden sondern auch einen Beitrag (positiv oder negativ) des Interferenzterms.

### Höhere Ordnungen

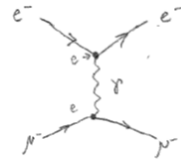
Feynman-Graphen stehen für die einzelnen störungstheoretischen Beiträge einer Übergangsamplitude. Die bisher diskutierten Feynman-Graphen repräsentierten die Beiträge niedrigster Ordnung für einen gegebenen Prozess. Aufgrund ihrer einfachen baumartigen Topologie werden sie auch als Tree-Level-Graphen bezeichnet. Betrachtet man den bereits diskutierten Prozess der Elektron-Myon-Streuung so existieren weitere Graphen höherer Ordnung in der Kopplungskonstante  $\alpha$  die zum gleichen Endzustand führen. Die folgende Abbildung zeigt eine Auswahl (nicht komplett) an Feynman-Graphen die  $\sim \alpha^2$  bzw.  $\sim \alpha^3$  sind. Da  $\alpha = \frac{1}{137}$  ist, spielen die Terme höherer Ordnung in der Störungsreihenentwicklung eine immer weniger wichtige Rolle.

### Effekte der Quantenkorrekturen

Die Effekte der Quantenkorrekturen höherer Ordnung sind in verschiedenen Präzisionsmessungen beobachtbar. Einige Beispiele werden hier kurz diskutiert:

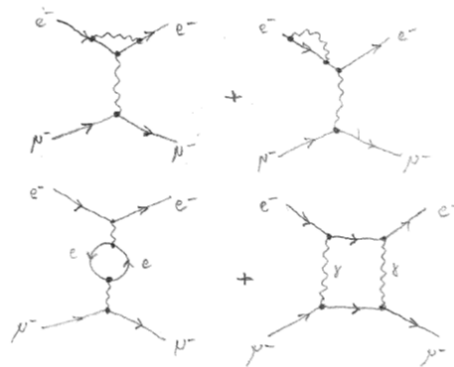
Tree-Level  
(Leading Order, LO)

$$\mathcal{A} \sim e^2 \sim \alpha$$



Loop-Level  
(Next to Leading  
Order, NLO)

$$\mathcal{A} \sim e^4 \sim \alpha^2$$



2-loop-Level  
(Next to Next to  
Leading Order,  
NNLO)

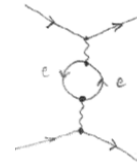
$$\mathcal{A} \sim e^6 \sim \alpha^3$$



Abbildung III.2: Feynman-Graphen für den Prozess  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ : Neben der niedrigsten Ordnung sind auch einige 1-loop und 2-loop Beiträge gezeigt.

**Lamb-Shift in der Atomphysik**

Die rechts gezeigte Schleifenkorrektur wird als Vakuumpolarisation bezeichnet und ist neben der Emission und Reabsorption von Photonen durch das Elektron (s.u.: laufende Kopplung) Ursache für den Lamb-Shift.



**Anomales magnetisches Moment des Elektrons**

Die gezeigte Schleifenkorrektur wird als Vertexkorrektur bezeichnet. Sie bewirkt, dass der g-Faktor für das magnetische Moment  $\vec{\mu}$  eines Elektrons (bzw. Myons oder Taus) von dem von Dirac vorhergesagt Wert des g-Faktors von  $g = 2$  abweicht:

$$\vec{\mu} = -g \cdot \frac{e\hbar}{2m_e} \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar},$$

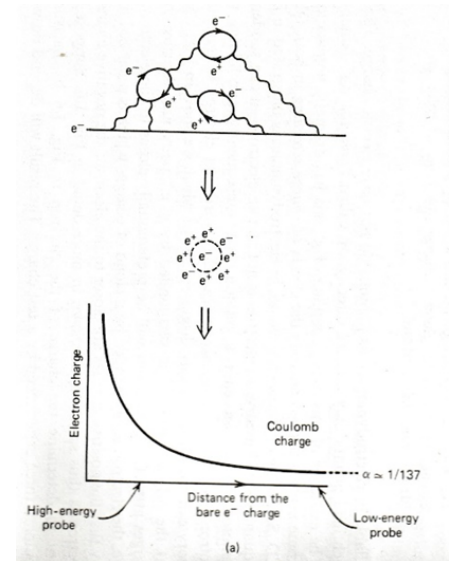
mit dem Bohr-Magneton  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ . Aufgrund der gezeigten Korrekturen sowie weiteren Vertex-Korrekturen höherer Ordnung findet man:

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} - 0.656 \frac{\alpha^2}{\pi^2} + \dots$$



**Laufende Kopplungskonstante  $\alpha(q^2)$**

Neben der Vakuumpolarisation (s.o.) ist die Emission und Reabsorption von Photonen durch das Elektron mit zusätzlicher Elektron-Positron-Paarbildung ein Grund dafür, dass die ursprüngliche „nackte“ Ladung mit einer Wolke aus  $e^+e^-$ -Paaren umgeben ist, die aufgrund ihrer Polarisierbarkeit wie ein Medium abschirmend wirkt. Bewegt man nun eine Testladung in Richtung des Elektrons so sieht diese, je näher sie dem Elektron kommt eine ansteigende Ladung. Die „gemessene“ Ladung hängt also vom Abstand zum Elektron ab. Kleine Abstände entsprechen einem großen  $q^2$ -Wert der Wechselwirkung.



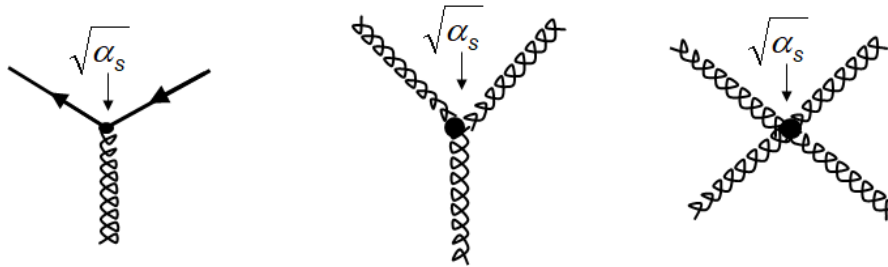
(Abb. entnommen Halzen Martin)

Dadurch ergibt sich eine Abhängigkeit der Ladung und damit der Feinstrukturkonstante  $\alpha$  vom  $q^2$ -Wert der Wechselwirkung:  $\alpha = \alpha(q^2)$ . Der Wert  $\alpha = \frac{1}{137}$  ist der Wert, der im Limit für  $q^2 \rightarrow 0$  gemessen wird. Für  $q^2 = 91^2 \text{ GeV}^2$  misst man beispielsweise  $\alpha = \frac{1}{128}$ .

Quantenkorrekturen spielen auch für andere Wechselwirkung eine wichtige Rolle.

### III.1.2 Feynman-Regeln für starke Wechselwirkung (nicht diskutiert)

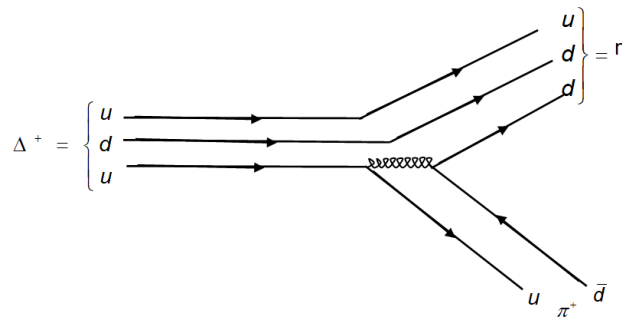
Die Austauschteilchen der starken Wechselwirkung (QCD) sind die Gluonen, die im Gegensatz zum Photon aber selbst Farbladungen tragen (wird später diskutiert). Aus diesem Grund existieren neben der Kopplung der Gluonen an Quarks noch zwei weitere Vertices, die die Gluon-Gluon-Kopplung beschreiben.



Die Stärke der Kopplung des Gluons an Quarks bzw. an Gluonen wird durch die starke Kopplungskonstante  $\alpha_s$  gegeben. Da Gluonen wie das Photon masselose Teilchen sind ist der Gluon-Propagator ebenfalls  $\sim 1/q^2$ .

Aufgrund der Quantenkorrekturen findet man auch für die starke Wechselwirkung eine laufende Kopplungskonstante  $\alpha_s$ . Aufgrund der Gluon-Gluon-Kopplung ist das  $q^2$ -Verhalten aber umgekehrt wie bei Feinstrukturkonstanten. Je größer das  $q^2$  des Wechselwirkungsprozesses desto kleiner wird die Kopplungskonstante. So findet man für  $q^2 = 91^2 \text{GeV}^2$  den Wert  $\alpha_s \approx 0.1$  während für  $q^2$ -Werte von etwa  $200^2 \text{MeV}^2$  die Kopplungskonstante  $\alpha_s \rightarrow 1$  geht. Eine störungstheoretische Behandlung für starke Prozesse an dieser Skala ist dann nicht mehr möglich. Das gilt beispielsweise für die Bindung von Quarks zu Hadronen ( $q^2$  ist klein), die man nicht störungstheoretisch berechnen kann.

Die folgende Abbildung zeigt einen Feynman-Graphen für den starken Zerfall eines  $\Delta$ -Baryons:  $\Delta^+(udu) \rightarrow n(udd) + \pi^+(u\bar{d})$ .





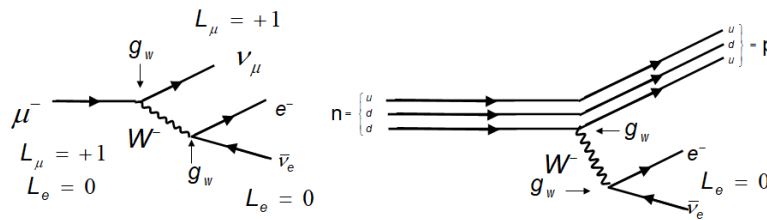
Die Beschreibung starker Zerfälle von Hadronen mittels Feynman-Graphen ist sinnvoll um den Quarkinhalt und die Quarkübergänge in einem Zerfall zu verstehen. Zur störungstheoretischen Berechnung der Zerfälle können diese Graphen aber nicht genutzt werden, da wegen  $\alpha_s \rightarrow 1$  eine störungstheoretische Beschreibung nicht möglich ist. Prozesse, die an hohen Skalen stattfinden, wie z.B. die Abstrahlung hochenergetischer Gluonen von Quarks, die in hochenergetischen  $e^+e^-$ -Annihilationen erzeugt werden, können störungstheoretisch hingegen gut beschrieben werden ( $q^2$  groß und  $\alpha_s$  klein).

### III.1.3 Feynman-Regeln für schwache Wechselwirkung

Für die schwache Wechselwirkung gibt es drei massive Austauschteilchen, die  $W^\pm$ -Bosonen und das Z-Boson. Die Austauschbosonen koppeln an die schwache Ladung der Fermionen.

#### Prozesse mit W-Bosonen:

Die folgenden Abbildungen zeigen noch einmal die Feynman-Graphen für den  $\beta$ -Zerfalls eines Myons bzw. den  $\beta$ -Zerfall eines Neutrons. Als Kopplungsstärke ist die schwache Ladung  $g_w$  an den Vertices angezeigt<sup>3</sup>.



Wie für elektromagnetische Wechselwirkung gilt auch für die schwache Wechselwirkung Leptonzahlerhaltung am Vertex. Die Elektron-Leptonzahl  $L_e$  ist  $+1$  für das Elektron und das Elektronneutrino und  $-1$  für die Antiteilchen. Das gleiche gilt für die Myon- und Tau-Zahl  $L_\mu$  und  $L_\tau$ :

$$\begin{aligned} L_e(e^-, \nu_e) &= +1 & L_\mu(\mu^-, \nu_\mu) &= +1 \\ L_e(e^+, \bar{\nu}_e) &= -1 & L_\mu(\mu^+, \bar{\nu}_\mu) &= -1 \end{aligned}$$

Für den Myonzerfall ist  $L_\mu = +1$  für den Anfangs- und den Endzustand. Die Elektronenzahl entsprechend  $L_e = 0$ .

Einer der wichtigsten Unterschiede zur elektromagnetischen Wechselwirkung sind die

<sup>3</sup>Im Rahmen der vereinheitlichenden elektroschwachen Theorie hängt die schwache Ladung mit der elektrischen Ladung  $e$  zusammen und ist nicht wirklich schwächer.

massiven Austauschteilchen. Sie führen zu einer Modifikation des Boson-Propagators:

$$\text{Photon-Propagator: } \sim \frac{1}{q^2} \longrightarrow \text{W-Propagator: } \sim \frac{1}{q^2 - M_W^2 c^4}$$

Für die Zerfallsamplituden findet man dann:

$$\mathcal{A}_{fi} \sim \frac{g_w^2}{q^2 - M_W^2 c^4}$$

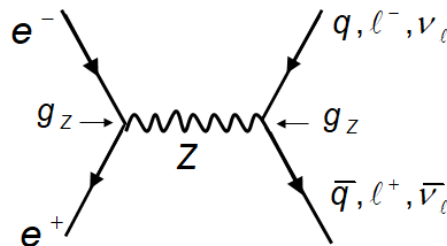
Für kleine  $q^2$ -Werte,  $q^2 \ll M_W^2 c^4$ , wie dies beispielsweise für den Myonzerfall oder den Neutronzerfall der Fall ist, findet man für die Amplitude

$$\mathcal{A}_{fi} \sim \frac{g_w^2}{M_W^2 c^4}$$

Aufgrund der großen W-Masse ist die Zerfallsamplitude auch wenn  $g_w^2$  in der Größenordnung der Feinstrukturkonstanten ist, stark unterdrückt. Die starke Unterdrückung durch den Propagator ist der eigentlich Grund warum die schwache Wechselwirkung für kleine  $q^2$ -Werte zu schwach erscheint.

### Prozesse mit Z-Bosonen:

Die folgende Abbildung zeigt einen Annihilations-Prozess mit einem Z-Boson. Auch hier gilt Leptonzahlerhaltung, und da das Z-Boson keine Ladung trägt, auch Ladungserhaltung.



Grundsätzlich gilt, dass alle Prozesse in denen ein virtuelles Photon auftritt auch mit einem ausgetauschten Z-Boson möglich sind. Die schwache Kopplungskonstante  $g_z$  hängt ebenfalls mit der Feinstrukturkonstanten zusammen. Wie beim W-Boson ist auch hier die Amplitude aufgrund des massiven Austauschteilchens unterdrückt:

$$\mathcal{A}_{fi} \sim \frac{g_z^2}{q^2 - M_Z^2 c^4}$$

Bei Annihilationsreaktionen kann der  $q^2$ -Wert gerade den Wert der Z-Masse erreichen. Das ist bei einer Schwerpunktsenergie des  $e^+e^-$ -Systems von  $\sqrt{s} = 91.18$  GeV der Fall. In diesem Fall hat die Amplitude einen Pol was zu einem starken Anstieg der Wechselwirkungsrate führt. Der Pol wird durch die endliche Zerfallsbreite (endliche Lebensdauer) des Z-Bosons gedämpft.

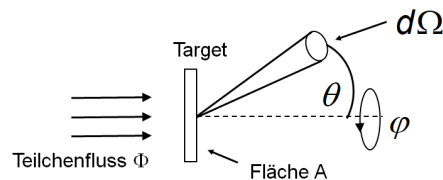
## III.2 Wirkungsquerschnitt und frei Weglänge

Im Folgenden werden Messgrößen zur Beschreibung von Streuprozessen eingeführt. Hierzu gehören Wirkungsquerschnitte und Winkelverteilungen.

### III.2.1 Wirkungsquerschnitt

Wirkungsquerschnitte und Winkelverteilungen von Streuprozessen liefern Informationen über die Wechselwirkung zwischen einem Projektilteilchen und einem Targetteilchen. Der Wirkungsquerschnitt ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion zwischen zwei Streupartnern.

Die folgende Abbildung zeigt die Streuung eines mono-energetischen Teilchenstrahls an einem Target mit  $N_t$  Streuzentren:



Der einfallende Teilchenfluss  $\Phi$  ist gegeben durch:

$$\Phi = \frac{\dot{N}_i}{A} = n_i v_i \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \dot{N}_i & = & \text{Rate der auf A einfallenden Teilchen} \\ n_i & = & \text{Teilchendichte im Strahl} \\ v_i & = & \text{Teilchengeschwindigkeit} \end{cases}$$

Für die Rate  $d\dot{N}_s$  der nach  $d\Omega(\phi, \theta)$  gestreuten Teilchen gilt:

$$d\dot{N}_s \sim \Phi N_t d\Omega(\phi, \theta)$$

Die Proportionalitätskonstante bezeichnet man als differentiellen Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{diff}}(\phi, \theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega}$ :

$$\sigma_{\text{diff}}(\phi, \theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\dot{N}_s(\phi, \theta)}{\Phi N_t d\Omega}$$

Den totalen Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  erhält aus der Gesamtrate  $\dot{N}_s$  gestreuter Teilchen bzw. durch Integration des differentiellen Wirkungsquerschnitts über den gesamten Raumwinkel:

$$\sigma = \frac{\dot{N}_s}{\Phi N_t} = \int_{4\pi} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega$$

Die Dimension des Wirkungsquerschnitts ist die einer Fläche (Rate/(Rate×Fläche)). Als Einheit wird typischer Weise barn verwendet:

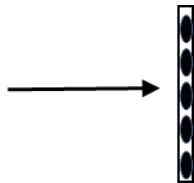
$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

Zur Veranschaulichung wird im Folgenden an zwei Beispielen der geometrische Streuquerschnitt diskutiert.

- Ein punktförmiges Projektil trifft auf ein sehr dünnes Target mit nur einer Ebene an Streuern (ohne geometrischen Überlapp). Das Projektil erfahre nur eine Kontaktwechselwirkung. Jeder Streuer im Target habe die Querschnittsfläche  $A_t = \pi R_t^2$ .

Die Gesamtrate der gestreuten Teilchen beträgt also:

$$\dot{N}_s = \Phi N_t A_t$$



Damit ergibt sich dann der Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \frac{\dot{N}_s}{\Phi N_t} = A_t = \pi R_t^2,$$

d.h. der totale Wirkungsquerschnitt entspricht also dem geometrischen Querschnitt eines einzelnen Streuzentrums (Streuers).

- Abschätzung des geometrischen Wirkungsquerschnitts für die Proton-Proton-Wechselwirkung (z. B. am LHC): Die Protonen mit einem Radius  $R_p$  fliegen mit verschiedenen Stoßparametern  $b$  aufeinander zu. Auch hier wird angenommen, dass sich die Protonen berühren müssen, bevor es zu einer Wechselwirkung kommt. Für die starke Wechselwirkung mit sehr kurzer Reichweite ist das sicher eine gute Annahme.

Der maximale Stoßparameter  $b_{\text{max}}$  bis zu dem sich die Protonen berühren wird durch den Protonradius  $R_p \approx 0.8 \text{ fm}$  bestimmt:



$$b_{\text{max}} = 2R_p \approx 1.6 \text{ fm}$$

Für den geometrischen Wirkungsquerschnitt erhält man dann:

$$\sigma = \pi b_{\text{max}}^2 = \pi \cdot (1.6 \text{ fm})^2 \approx 80 \text{ mb}$$

Experimentelle Werte für den totalen Proton-Proton-Wirkungsquerschnitt sind:

$$\begin{aligned} \sigma_{pp}(\sqrt{s} = 10 \text{ GeV}) &\approx 40 \text{ mb} \\ \sigma_{pp}(\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}) &\approx 80 \text{ mb} \end{aligned}$$

Der geometrische Querschnitt ist also eine gute Annahme für die Proton-Proton-Wechselwirkung. Die Annahme bestätigt die kurze Reichweite der starken Wechselwirkung.

### III.2.2 Freie Weglänge und Strahlabschwächung

Trifft ein Teilchenstrahl auf ein dickes Target, so durchlaufen die Teilchen eine mittlere freie Weglänge, bis es zu einer Wechselwirkung kommt. Durch die Wechselwirkung wird der Strahl abgeschwächt.

Für ein Target mit Dicke  $d$  wird die Zahl der Streuzentren  $N_t$  gegeben durch:

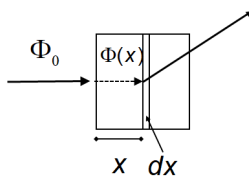
$$N_t = n_t A d \quad \text{mit der Targetdichte} \quad n_t = \frac{\rho N_A}{M_{\text{Mol}}},$$

hierbei ist  $\rho$  die Dichte des Targetmaterials ( $\text{g/cm}^3$ ),  $N_A$  die Avogadro-Zahl und  $M_{\text{Mol}}$  die Molmasse der Streuzentren im Target. Für einen einfallenden Teilchenstrahl mit Fluss  $\Phi$  findet man für die Streurrate:

$$\dot{N}_s = \Phi N_t \sigma = \left( \frac{\dot{N}_i}{A} \right) (n_t A d) \sigma = \dot{N}_i n_t d \cdot \sigma$$

#### Streuwahrscheinlichkeit für ein dickes Target:

Mit dem obigen Ausdruck für  $\dot{N}_s$  ist die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion in  $dx$  nach der Strecke  $x$  in einem dicken Target gegeben durch:



$$dW(x) = \frac{\dot{N}_s(x)}{\dot{N}_i(x)} = n_t dx \cdot \sigma$$

Damit nimmt der Teilchenfluss mit  $\Phi(x)$  mit  $x$  um  $d\Phi$  ab:

$$d\Phi = -\Phi(x) n_t dx \sigma$$

Durch Integration erhält man den  $x$ -abhängigen Teilchenfluss innerhalb des Targets:

$$\Phi(x) = \Phi_0 e^{-x n_t \sigma} = \Phi_0 e^{-x/\lambda},$$

mit der mittleren freien Weglänge  $\lambda$  der einfallenden Teilchen im Target:

$$\lambda = \frac{1}{n_t \sigma}$$

### III.2.3 Luminosität

Die Reaktionsrate bzw. die Rate gestreuter Teilchen  $\dot{N}_s$  für einen Teilchenstrahl mit Fluss  $\Phi$ , der auf ein Target fällt, ist gegeben durch:

$$\dot{N}_s = \underbrace{\Phi N_t}_{=\mathcal{L}} \cdot \sigma$$

Die Größe  $\mathcal{L} = \Phi N_t$  wird als Luminosität bezeichnet. Die Dimension der Luminosität ist Rate/Fläche. Als Einheit verwendet man typischerweise  $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ . Die Rate der Streueignisse  $\dot{N}_s$  ergibt sich zu  $\dot{N}_s = \mathcal{L}\sigma$ . Die Gesamtzahl der in einem Zeitraum  $T$  erzeugten Streueignisse  $N_s$  ist durch

$$N_s = \mathcal{L}_{\text{int}}\sigma \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = \int_T \mathcal{L} dt,$$

gegeben. Die Größe  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  wird als integrierte Luminosität bezeichnet.

**Bemerkung:** Bei der Kollision zweier Strahlen mit Teilchendichten  $n_1$  und  $n_2$  und Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  kann die obige Definition für die Luminosität  $\mathcal{L} = \Phi N_t$  zur Berechnung der Streurrate nicht direkt angewandt werden. Man findet mit einer einfachen Überlegung, dass die Streurrate  $\dot{N}_s$  in diesem Fall gegeben ist durch:

$$\dot{N}_s = ((v_1 + v_2)n_1n_2V) \cdot \sigma$$

wobei hier  $V$  das Wechselwirkungsvolumen der beiden Strahlen ist.

**Beispiel: Luminosität für Protonstrahl auf Fixed-Target**

Ein Protonstrahl mit  $10^{12}$  Protonen pro Sekunde fällt auf ein Target der Fläche  $A$  und der Dicke  $d$  und leuchtet das Target gleichmäßig aus. Mit der Targetdicht

$$n_t = N_A \frac{\rho}{M_{\text{Mol}}} \approx 10^{24} \text{ cm}^3 \quad (\text{typisch})$$

erhält man die Zahl der Targets

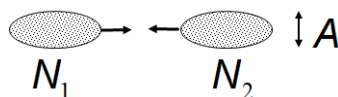
$$N_t = N_A \frac{\rho}{M_{\text{Mol}}} Ad$$

Für die Luminosität ergibt sich dann typisch

$$\mathcal{L} = \Phi N_t = \frac{\dot{N}_i}{A} N_A \frac{\rho}{M_{\text{Mol}}} Ad = \dot{N}_i n_t d \approx 10^{36} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

**Beispiel: Luminosität für Speicherring (LHC)**

In einem Speicherring sind die Teilchen nicht kontinuierlich verteilt sondern bilden einzelne Teilchenpakete die mit der Umlauffrequenz  $f_u$  im Ring umlaufen und dann zur Kollision gebracht werden.



Die Luminosität an einem Kollisionspunkt des Speicherrings ergibt sich aus der Zahl der Teilchen  $N_1$  und  $N_2$  in den kollidierenden Paketen (engl. bunches), der Zahl der Pakete pro Strahl  $n$ , der Querschnittsfläche  $A$  des Strahls<sup>4</sup> und der Umlauffrequenz  $f_u$ :

$$\mathcal{L} = f_u n \frac{N_1 N_2}{A}$$

Beim LHC werden jeweils 2808 Pakete pro Strahl in die Maschine gefüllt. Jedes der Pakete enthält  $N = 1.2 \cdot 10^{11}$  Protonen. Die effektive Querschnittsfläche  $A$  des Strahls beträgt<sup>5</sup>  $A \approx 3.2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2$ . Die Umlauffrequenz ist durch den Umfang des Speicherrings (26.7 km) gegeben und beträgt 11.2 kHz. Damit erhält man die maximale Luminosität des LHC:

$$\mathcal{L} = 11.2 \text{ kHz} \cdot 2808 \cdot \frac{(1.2 \cdot 10^{11})^2}{3.2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2} \approx 1.4 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

### III.3 Lebensdauern und Zerfallsbreiten

#### III.3.1 Lebensdauern und die Massen instabiler Teilchen

Instabile Teilchen  $A$  zerfallen (z.B.  $A \rightarrow 1 + 2 + \dots$ ) nach dem bereits in der Atomphysik diskutierten exponentiellen Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau},$$

wobei  $\tau$  die Lebensdauer des Teilchens bzw. Zustandes ist. In der Kernphysik wird häufig statt  $\tau$  die Halbwertszeit  $T_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2$  angegeben.

Die Zeitentwicklung der Wellenfunktion eines stabilen Teilchens im Ruhesystem des Teilchens ( $E = mc^2$ ) ist gegeben durch:

$$\psi(t) = \psi_0 e^{-iEt/\hbar} = \psi_0 e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}$$

Das korrespondiert zu einer konstanten Wahrscheinlichkeit das Teilchen in der Zeit  $t$  anzutreffen:  $\mathcal{P}(t) = |\psi(t)|^2 = |\psi_0|^2$ .

Die Wahrscheinlichkeit für ein instabiles Teilchen sollte hingegen mit der Zeit exponentiell abnehmen:

$$\mathcal{P}(t) = |\psi(t)|^2 \sim e^{-t/\tau} \quad \rightarrow \quad \psi(t) = \psi_0 e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

<sup>4</sup>Bei einem gaussischen Strahlprofil mit einer Breite  $2\sigma$ :  $A = 4\pi\sigma^2$

<sup>5</sup>Die Breite des gaussischen Strahlprofils beträgt  $2\sigma \approx 32 \mu\text{m}$ .  $\rightarrow A = 4\pi\sigma^2 \approx 3.2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2$ .

Für instabile Teilchen ersetzt man also im Exponenten die Masse  $mc^2$  durch  $mc^2 - i\frac{\Gamma}{2}$  wobei  $\Gamma = \hbar/\tau$  ist.

Die Beschreibung des Teilchens im Energieraum  $\tilde{\psi}(E)$  ergibt sich durch Fourier-Transformtion der Wellenfunktion im Zeitraum. Man findet (siehe z.B. Fraunfelder-Garcia)<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(E) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi(t) \cdot e^{+iEt/\hbar} dt \\ &= \frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\hbar}{(E - mc^2) + i\Gamma/2},\end{aligned}$$

und für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\tilde{\mathcal{P}}(E)$  im Energieraum entsprechend

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{P}}(E) \sim |\tilde{\psi}(E)|^2 &= C \cdot \frac{|\psi_0|^2}{2\pi} \cdot \frac{\hbar^2}{(E - mc^2)^2 + \Gamma^2/4} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(E - mc^2)^2 + \Gamma^2/4}.\end{aligned}$$

Für den letzten Schritt wurde die Normierung  $C = \Gamma/(\hbar^2|\psi_0|^2)$  mit der Bedingung  $\int \tilde{\mathcal{P}}(E)dE = 1$  berechnet. Die Wahrscheinlichkeitsdichte im Energieraum ist in Abbildung III.3 gezeigt. Diese Verteilung, die in der Teilchenphysik **Breit-Wigner-Verteilung** genannt wird, entspricht der Lorentzkurve im Frequenzraum für atomare Übergänge. Aufgrund seiner endlichen Lebensdauer besitzt das Teilchen also auch in seinem Ruhe-

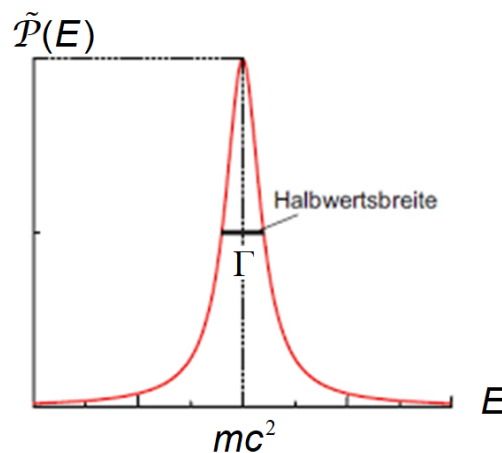


Abbildung III.3: Wahrscheinlichkeitsdichte  $\tilde{\mathcal{P}}$  eines Teilchens im Energieraum (Ruhe-system). Diese Verteilung, die in der Teilchenphysik **Breit-Wigner-Verteilung** genannt wird, entspricht der Lorentzkurve im Frequenzraum für atomare Übergänge.

<sup>6</sup>Wenn das Teilchen bei  $t = 0$  produziert wird, kann man die untere Integralgrenze zu  $t = 0$  setzen. Die Berechnung des Integrals kann man dann leicht mit Wolfram-Alpha durchführen.



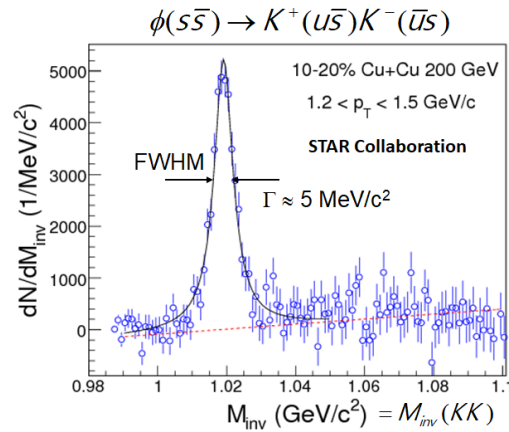


Abbildung III.4: Gemessene invariante Masse für den Zerfall  $\phi \rightarrow K^+K^-$  (STAR-Experiment).

system eine endliche Energiebreite („Linienbreite“)  $\Delta E = \Gamma$  mit

$$\Gamma\tau = \hbar.$$

Misst man also für einen Teilchenzerfall  $A \rightarrow 1 + 2$  die invariante Masse  $m(A)$  des Teilchens  $A$

$$m(A) = \sqrt{p_A^2/c^2} = \sqrt{(p_1 + p_2)^2/c^2}$$

in dem man, aufgrund von 4er-Impulserhaltung  $p_A = p_1 + p_2$ , die 4er-Impulse der Zerfallsteilchen benutzt, so erhält man eine endliche Massenbreite, die umso breiter ist, je kürzer das Teilchen lebt.

Abbildung III.4 zeigt eine gemessene invariante Massenverteilung für den Zerfall eines  $\phi$ -Mesons nach zwei Kaonen ( $\phi \rightarrow K^+K^-$ ). Man erkennt deutlich die endliche Breite des  $\phi$ -Peaks, die sich nicht durch mögliche endliche Detektoraufösungen erklären lässt. Die Energiebreite  $\Gamma$  beträgt etwa 5 MeV. Daraus lässt sich die Lebensdauer des  $\phi$ -Mesons berechnen:  $\tau = \hbar/\Gamma \approx 1.3 \cdot 10^{-22}$  s.

### III.3.2 Partialbreiten

Falls ein Teilchen mehrere verschiedene Zerfallskanäle mit entsprechenden Verzweigungsverhältnissen  $\mathcal{B}_i$  besitzt, z.B.  $A \rightarrow a + b$ ,  $A \rightarrow c + d$  und  $A \rightarrow e + f$ , so lassen sich mit der Zerfallsbreite  $\Gamma$  partielle Zerfallsbreiten  $\Gamma_i$  definieren:

$$\Gamma_i = \mathcal{B}_i \cdot \Gamma \quad \text{mit} \quad \Gamma = \hbar/\tau$$

Partialbreiten  $\Gamma_i(A \rightarrow a + b)$  lassen sich genau wie Wirkungsquerschnitte berechnen.

### III.4 Übergangsraten und Fermi's Goldene Regel

Zu Anfang dieses Kapitels wurde bereits die Übergangsrate  $\omega_{fi}$ , d.h. die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit eingeführt. Mit der Übergangsrate  $\omega_{fi}$  für einen gegebenen Prozess  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ , ist für einen Zerfall<sup>7</sup> die Zerfallsrate ( $1/\tau$ ) bzw. Zerfallsbreite  $\Gamma_{fi}$  und für einen Streuprozess der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  bestimmt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau} &= \frac{\Gamma_{fi}}{\hbar} = \omega_{fi} \\ \sigma &= \frac{V}{v} \cdot \omega_{fi}\end{aligned}$$

Im Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt<sup>8</sup> ist  $v$  die Relativgeschwindigkeit der aufeinandertreffenden Teilchen (Fixed Target:  $v = v_i$ ; Kollision zweier Strahlen  $a$  und  $b$ :  $v = v_a + v_b$ ) und  $V$  das Wechselwirkungsvolumen, das betrachtet wird.

#### Fermi's Goldene Regel:

Die Übergangsrate oder die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit  $\omega_{fi}$  für einen Prozess  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$  mit dem Übergangsmatrixelement  $\mathcal{A}_{fi} = \langle f | \hat{H}_{WW} | i \rangle$  wird durch **Fermi's Goldene Regel** gegeben<sup>9</sup>

$$\omega_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{A}_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

Der Faktor  $\rho(E_f)$  wird als Zustandsdichte des Endzustandes mit Energie  $E_f$  bezeichnet:

$$\rho(E_f) = \frac{dN}{dE}(E_f),$$

<sup>7</sup>Der Einfachheit halber existiere für das Teilchen nur der Zerfall  $i \rightarrow f$ . Dann ist  $\Gamma_{fi} = \hbar/\tau$ .

<sup>8</sup>Für einen Streuprozess ist die Übergangsrate  $\omega_{fi}$  gegeben durch die Streurrate  $\dot{N}_s$  und den der Zahl der beteiligten Strahl- und Target-Teilchen  $N_i$  und  $N_t$ :

$$\omega_{fi} = \frac{\dot{N}_s}{N_i N_t} \quad \text{wobei} \quad \dot{N}_s = (n_i v_i N_t) \sigma \quad \text{und} \quad N_i = n_i v_i dt A$$

Das Wechselwirkungsvolumen ergibt sich aus  $V = v_i dt$ . Damit erhält man:

$$\omega_{fi} = \frac{v_i}{V} \cdot \sigma$$

Für kollidierende Teilchenstrahlen  $(n_a, v_a)$  und  $(n_b, v_b)$  erhält man analog:

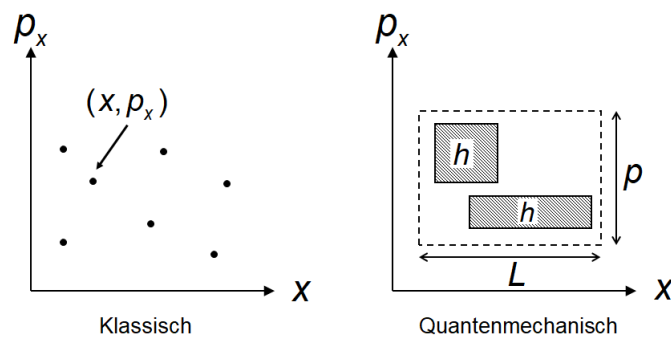
$$\omega_{fi} = \frac{\dot{N}_s}{N_a N_b} = \frac{(v_a + v_b) n_a n_b V}{n_a n_b V^2} \sigma = \frac{v}{V} \cdot \sigma$$

<sup>9</sup>Zur Herleitung von Fermi's Goldener Regel sei auf Lehrbücher, z.B. Frauenfelder und Garcia, verwiesen.

d.h.  $\rho(E_f)$  ist die Zahl der möglichen Zustände  $dN$  im Energieintervall  $[E_f; E_f + dE]$ . Der Begriff der Zustandsdichte wird im Folgenden erläutert.

### III.4.1 Zustandsdichte und Phasenraum

Zur Herleitung der Zustandsdichte<sup>10</sup> betrachtet man zunächst ein eindimensionales Problem, bei dem sich ein Teilchen mit Impuls  $p_x$  entlang der x-Achse bewegt. Um den Teilchenzustand zu bestimmen, muss man seine Lage im Orts-Impulsraum  $(x, p_x)$  (Phasenraum) angeben. Hier unterscheiden sich die klassische Mechanik und die Quantenmechanik sehr prinzipiell - siehe die folgende Abbildung.



Während man in der klassischen Mechanik Ort und Impuls beliebig genau bestimmen kann (der Teilchenzustand entspricht einem Punkt im Phasenraum), ist das in der Quantenmechanik aufgrund der Heisenberg'schen Unschärferelation,

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar,$$

nicht möglich. Der Teilchenzustand im Phasenraum wird daher durch eine Phasenraumzelle beschrieben (s. Abbildung). Die Form der Zelle hängt von der Beobachtung ab. Das Volumen (Fläche) der Zellen beträgt hingegen immer<sup>11</sup>  $h$ .

Die Zahl der Zustände  $dN$ , die in ein Phasenraumvolumen der Größe  $Ldp_x$  für den 1-dimensionalen Fall, bzw. der Größe  $Vd^3p$  im Falle von 3 Dimensionen passen, ergibt sich

<sup>10</sup>Die Herleitung folgt dem Lehrbuch von Frauenfelder und Garcia.

<sup>11</sup>Das kann man sich durch die Zahl der Teilchenwellen klarmachen, die in die Zelle mit Länge  $L$  passen.

durch Division mit dem Volumen  $h$  der Phasenraumzelle<sup>12</sup>:

$$\begin{aligned} \text{1-dim.: } dN &= \frac{Ldp_x}{h} = \frac{Ldp_x}{2\pi\hbar} \\ \text{3-dim.: } dN &= \frac{Vd^3p}{h^3} = \frac{Vd^3p}{(2\pi\hbar)^3} \\ \text{bzw. } N &= \frac{V \int d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \end{aligned}$$

In der letzten Zeile ist die Zahl der Zustände  $N$  für einen endlichen Impulsbereich angegeben. Mit diesem Ergebnis lassen sich die Zustandsdichten  $\rho = \frac{dN}{dE}$  für verschiedene Teilchenkonfigurationen im Endzustand berechnen. Hierbei benutzt man, dass

$$d^3p = p^2 dp d\Omega \quad \text{und} \quad c^2 p dp = E dE \quad (\text{wegen: } E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2),$$

(wobei hier  $p = |\vec{p}|$  ist) so dass man für die Zahl der Zustände  $N$  den Ausdruck

$$N = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int p^2 dp d\Omega = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{pE}{c^2} dE \int d\Omega$$

erhält.  $\Omega$  ist der Raumwinkel des ausgehenden Teilchens.

#### 1-Teilchen-Zustandsdichte:

Für ein einzelnes Teilchen im Endzustand erhält man dann die Zustandsdichte:

$$\rho_1 = \frac{dN}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \int d^3p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{pE}{c^2} \int d\Omega$$

#### 2-Teilchen-Zustandsdichte:

Werden zwei Teilchen in einem Zerfall oder in einer Streureaktion produziert, so sind ihre Impulse nicht unabhängig und im CMS der Teilchen gilt:  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ . Aufgrund dieser Korrelation entspricht der 2-Teilchenphasenraum dem eines einzelnen Teilchens, wenn die Gesamtenergie  $E = E_1 + E_2$  benutzt wird:

$$\rho_2 = \frac{dN}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \int d^3p_1 = \dots = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p_1}{c^2} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \int d\Omega_1$$

<sup>12</sup>Zur Herleitung (s. Frauenfelder-Garcia) betrachtet man eine normierte freie Welle in einer „Schachtel“ mit Seitenlänge  $L$ :

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$$

Periodische Randbedingungen  $\psi(0) = \psi(L)$  führen zu  $k = \pm \frac{2\pi N}{L}$  mit  $N = 0, 1, 2, \dots$ . Die Zahl der Zustände pro Impulsintervall für  $N \gg 1$  ist dann gegeben durch:

$$\frac{dN}{dp} = \frac{1}{\hbar} \frac{dN}{dk} = \frac{L}{2\pi\hbar} \quad \text{bzw.} \quad dN = \frac{Ldp}{2\pi\hbar}$$

n-Teilchen-Zustandsdichte:

Bei  $n$  Teilchen im Endzustand sind nur  $(n - 1)$  Teilchenimpulse frei wählbar, da sich im CMS die Impulse zu Null addieren. Die Zustandsdichte ist dann gegeben durch

$$\rho_n = \frac{dN}{dE} = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \frac{d}{dE} \int d^3p_1 d^3p_2 \cdots d^3p_{n-1}$$

Lorentzinvarianz:

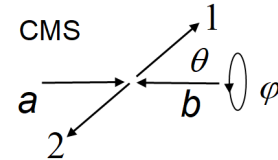
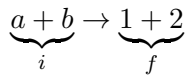
Die angegebenen Zustandsdichten sind nicht lorentzinvariant da  $E$ ,  $E_i$  und  $\vec{p}_i$  keine lorentzinvarianten Größen sind. Um die Phasenraumintegrale über  $d^3p_i$  lorentzinvariant zu machen, muss man durch die Energie  $E_i$  der Teilchen dividieren. Das führt zum lorentzinvarianten Phasenraum (englisch: Lorentz-invariant phase space LIPS) den man in de Literatur findet:

$$d\Phi_n(P, p_1, \cdots p_n) = \delta^4(P - \sum_i p_i) \cdot \frac{d^3p_1}{(2\pi\hbar)^3 2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi\hbar)^3 2E_2} \cdots \frac{d^3p_n}{(2\pi\hbar)^3 2E_n} = dLIPS$$

Die auftretende Delta-Funktion stellt 4er-Impuls Erhaltung zwischen Anfangszustand  $P$  und den Endzustandsteilchen  $\sum_i p_i$  sicher was dann auch wieder zu nur  $(n - 1)$  frei wählbaren Impulsen  $p_i$  führt. Das Normierungsvolumen wurde zu  $V = 1$  gewählt (s. a. nächster Abschnitt). Nutzt man den LIPS, so muss man in Fermi's Goldener Regel auch das lorentzinvariante Matrixelement  $\mathcal{M}_{fi}$  benutzen.

III.4.2 Wirkungsquerschnitt für 2-Teilchenreaktion

Wir betrachten im Folgenden die Reaktion:



Sowohl a und b als auch 1 und 2 seien hochrelativistisch.

Der Wirkungsquerschnitt dieser Reaktion ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{V}{v} \omega_{fi} &= \frac{V}{v} \cdot \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \left( \int |\mathcal{A}_{fi}|^2 d^3p_1 \right) \\ &= \frac{1}{2c} \cdot \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{|\vec{p}_1|}{c^2} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \int |\mathcal{A}_{fi}|^2 d\Omega_1 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die oben berechnete 2-Teilchenzustandsdichte verwendet. Zusätzlich wurde das Normierungsvolumen<sup>13</sup>  $V = 1$  und die Relativgeschwindigkeit  $v = v_a + v_b \approx 2c$  gesetzt.

<sup>13</sup>Das Normierungsvolumen tritt an mehreren Stellen auf (unter anderem auch in  $\mathcal{A}_{fi}$ ) und kürzt sich am Ende aus der Rechnung.

Falls die beiden Teilchen 1 und 2 gleiche Massen haben, erhält man wegen  $s = E_{\text{CMS}}^2 = (E_1 + E_2)^2$  und  $E_1 = E_2$  für den differentiellen Wirkungsquerschnitt<sup>14</sup>:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim s \cdot |\mathcal{A}_{fi}|^2$$

### III.4.3 Zerfallsbreite für 2-Teilchenzerfall

Für den Zerfall eines Teilchen  $A$  in zwei Teilchen 1 und 2 ( $A \rightarrow 1+2$ ) ist die Zerfallsbreite  $\Gamma$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \Gamma = \hbar\omega_{fi} &= 2\pi \cdot \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \left( \int |\mathcal{A}_{fi}|^2 d^3p_1 \right) \\ &= 2\pi \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{|\vec{p}_1|}{c^2} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \int |\mathcal{A}_{fi}|^2 d\Omega_1 \\ &= 2\pi \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{|\vec{p}_1|}{c^2} \frac{E_1 E_2}{m_A c^2} \int |\mathcal{A}_{fi}|^2 d\Omega_1 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass im Ruhesystem des Teilchens  $A$  für die Energien gilt:  $E_1 + E_2 = m_A c^2$ . Bei gleichen Massen von Teilchen 1 und 2 ist  $E_1 = E_2 = m_A c^2 / 2$  und man erhält für die differentielle Zerfallsbreite:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} \sim m_A p_1 |\mathcal{A}_{fi}|^2$$

Der Phasenraumfaktor bewirkt also eine lineare Abhängigkeit von  $|\vec{p}_1|$  der Endzustandsteilchen.

### III.5 Wirkungsquerschnitt für die $e^+e^-$ -Annihilation

Für den Annihilationsprozess  $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$  mit  $f\bar{f} = \mu^-\mu^+, \tau^-\tau^+, q\bar{q}$ <sup>15</sup> soll die Übergangsamplitude bestimmt und damit der Wirkungsquerschnitt angegeben werden.

<sup>14</sup>Benutzt man den lorentzinvarianten Phasenraum (s.o.) sowie die lorentzinvariante Übergangsamplitude,

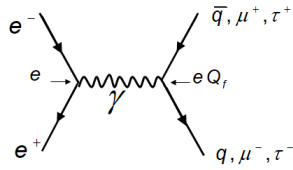
$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = 2E_a 2E_b 2E_1 2E_2 |\mathcal{A}_{fi}|^2 = s^2 |\mathcal{A}_{fi}|^2,$$

wie dies in vielen Lehrbüchern der Fall ist, erhält man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{1}{s} \cdot |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

<sup>15</sup>Aufgrund der Interferenz der beiden Amplituden  $q^2 \leq 0$  (s.o.) ist der Prozess  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  komplizierter und wird hier nicht diskutiert.

Für das Übergangsmatrixelement findet man mit den Feynman-Regeln der Vorlesung:



$$\mathcal{A}_{fi} \sim e \cdot \frac{1}{q^2} \cdot eQ_f$$

wobei  $Q_f$  die Ladung der erzeugten Fermionen ist:  $Q_f = 1$  für die geladenen Leptonen,  $Q_f = \frac{2}{3}$  für u-Typ-Quarks und  $Q_f = \frac{1}{3}$  für d-Typ-Quarks. Zur Berücksichtigung der Dimension und der Normierung fehlen noch Vorfaktoren die hier erst einmal ignoriert werden.

Die Amplitude in dieser Form ignoriert ebenfalls den Spin der einkommenden Elektronen und der ausgehenden Fermionen. Da das Photon Spin 1 trägt, sind nicht alle Spinkonfigurationen mit gleicher Wahrscheinlichkeit möglich. Das ist in Abbildung III.5 dargestellt<sup>16</sup>: Als Quantisierungsachse zur Beschreibung des Spins wählt man für die einfallenden Teilchen die Richtung des Elektrons und für die ausgehenden Teilchen die Flugrichtung des Myons (Fermions). Die Drehimpulserhaltung bewirkt eine Winkelabhängigkeit für die einzelnen Spinkonfigurationen. Da die unterschiedlichen Konfigurationen prinzipiell un-

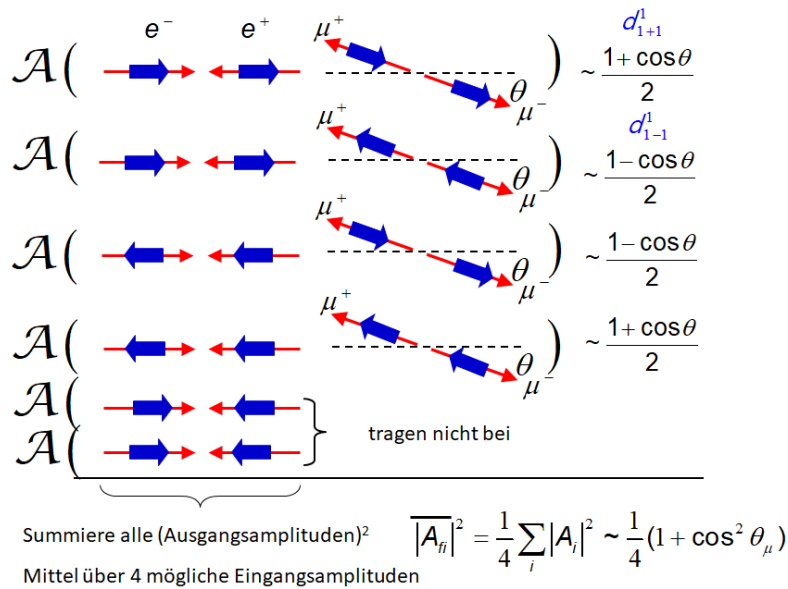


Abbildung III.5: Mögliche Spin-Amplituden für die Reaktion  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  unter Berücksichtigung des Spins des virtuellen Photons (Spin 1). Die roten Pfeile stehen für die Impulsrichtung, die blauen Pfeile für die Spinrichtung der Elektronen und Myonen.

terscheidbar sind, werden die entsprechenden Amplitudenbeiträge quadratisch addiert

<sup>16</sup>Die Berücksichtigung der Teilchen-Spins bei der Berechnung des Übergangsmatrixelementes geht über den Stoff der Vorlesung hinaus und soll hier nur motiviert werden.

wobei man aber über die Konfigurationen des Anfangszustandes, die man nicht kennt, mitteln muss. Bis auf Vorfaktoren erhält man:

$$\overline{|\mathcal{A}_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{A}_{\text{Spin}}|^2 \sim \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta_f) \frac{\alpha^2}{q^4} \cdot Q_f^2$$

Im letzten Schritt wurde die Ladung  $e$  durch die Feinstrukturkonstante ersetzt. Der 4er-Impulsübertrag  $q^2$  beträgt hier gerade  $q^2 = E_{\text{CMS}}^2$  (s.o.). Zusammen mit dem Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt und unter Berücksichtigung der fehlenden Vorfaktoren findet man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{\alpha^2 Q_f^2}{4} \frac{1}{E_{\text{CMS}}^2} (1 + \cos^2 \theta_f) \cdot (\hbar c)^2$$

Den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man durch Integration über den Streuwinkel  $\Omega_f$  des ausgehenden Fermions:

$$\sigma = \frac{4\alpha^2 Q_f^2}{3} \frac{1}{E_{\text{CMS}}^2} (\hbar c)^2 = \frac{Q_f^2 \cdot 87\text{nb}}{E_{\text{CMS}}^2 [\text{GeV}^2]}$$

Abbildung III.6 zeigt den für die Reaktion  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  als Funktion von  $s = E_{\text{CMS}}^2$  die bei SLAC und bei PETRA (DESY) gemessene Wirkungsquerschnitte. Die Daten werden durch den theoretischen Wirkungsquerschnitt sehr gut beschrieben.

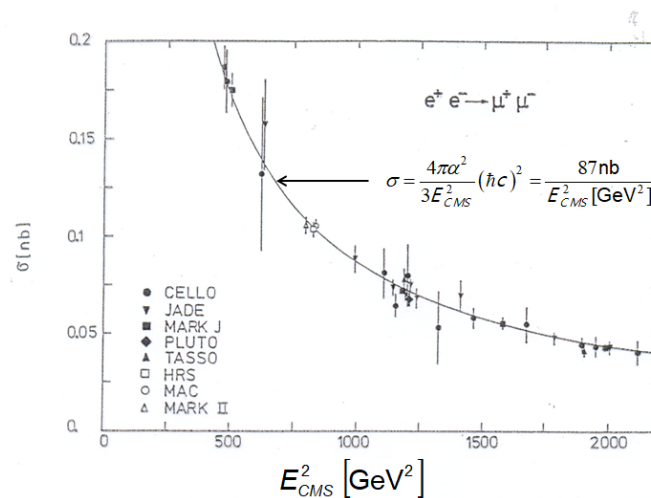


Abbildung III.6: Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  als Funktion von  $s = E_{\text{CMS}}^2$ : Die Daten der Experimente bei SLAC und am PETRA-Beschleuniger (schwarze Marker) werden durch den berechneten Wirkungsquerschnitt sehr gut beschrieben. Entnommen Doktorarbeit J.Mnich(?).



# Kapitel IV

## Wechselwirkung von Teilchen mit Materie

Das folgende Kapitel führt die in die Wechselwirkungen von Teilchen mit Materie und in die verschiedenen Nachweismechanismen ein. Es behandelt den Energieverlust und die verschiedenen Wechselwirkungsprozesse geladener Teilchen, die Wechselwirkung von Photonen und die starke Wechselwirkung von Hadronen mit Materie. Abgeschlossen wird das Kapitel durch eine kurze Einführung in den Aufbau moderner Teilchendetektoren.

### IV.1 Energieverlust geladener Teilchen durch Ionisation

Für „schwere“ geladene Teilchen - wobei hier unter „schwer“ alle Teilchen außer dem Elektron verstanden werden - dominiert beim Durchgang durch Materie der Energieverlust aufgrund von Ionisation der Atome des Mediums<sup>1</sup>. Für Elektronen wird bereits bei niedrigen Elektronenenergien ( $> 10$  MeV) die Bremsstrahlung zum dominanten Mechanismus.

Beim Durchgang durch ein Medium übt das geladene Teilchen mit Ladung  $ze$  aufgrund seiner elektrischen Ladung eine Kraft auf die gebundenen Elektronen der Mediumatome aus. Es kommt zu einem Impulsübertrag, der die Atome ionisiert. Der mittlere Energieverlust des Teilchens lässt sich aus dem mittleren Impulsübertrag berechnen. Hierzu muss über die mögliche Stoßparameter integriert werden, wobei quantenmechanische Effekte berücksichtigt werden müssen, weshalb die genaue Rechnung schwierig ist. Eine klassische Betrachtung ist im nachfolgenden Kasten skizziert. Die quantenmechanische Rechnung für nicht zu dünne Absorber führt zur **Bethe-Bloch-Formel**, die den mittleren spezifischen Energieverlust durch Ionisation beschreibt <sup>2</sup>:

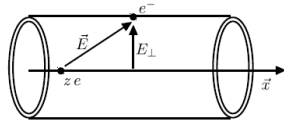
$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{ion}} = - \underbrace{\left( \rho N_A \frac{Z}{A} \right)}_{n_e} 4\pi r_e^2 m_e c^2 z^2 \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \left( \ln \frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} - \beta^2 \right)$$

---

<sup>1</sup>Hadronische Wechselwirkungen sollen hier erst einmal vernachlässigt werden.

<sup>2</sup>Die angegebene Formel vernachlässigt den Dichteeffekt sowie die von der Teilchenmasse abhängige maximal übertragbare Energie.

Hier ist  $I$  die mittlere Anregungsenergie der Atome und  $\beta$  sowie  $\gamma$  sind die relativistischen Größen des Teilchens. Für die mittlere Anregungsenergie findet man für Materialien mit  $Z > 20$  Werte  $I \approx 10 \text{ eV} \cdot Z$ .



(Einheiten:  $\epsilon_0 = 1$ )

**Klassische Herleitung:  
Energieverlust geladener Teilchen**

Impulsänderung:

$$\begin{aligned} |\Delta p_x| &= \int_{-\infty}^{\infty} e E_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e E_{\perp} \frac{dx}{v} \\ &= \frac{e}{2\pi b v} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E} \cdot \frac{\vec{r}}{r} 2\pi b dx = \frac{e}{2\pi b v} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \\ &= \frac{e}{2\pi b v} \int_{-\infty}^{\infty} \rho dV = \frac{2ze^2}{4\pi b v} \end{aligned}$$

Energieübertrag:

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{\Delta p_{\perp}^2}{2m_e} = \frac{2}{m_e} \left( \frac{ze^2}{4\pi v b} \right)^2$$

Elektronen in  $2\pi b db dx$

$$N_e = n_e 2\pi b db dx$$

Elektronendichte  $n_e$ :

$$n_e = \rho N_A \frac{Z}{A}$$

Klass. e-Radius  $r_e$ :

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi m_e c^2}$$

Energieverlust pro Weglänge:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{ion}} &= -2\pi n_e \int b \Delta E_{\text{kin}} db \\ &= -\frac{4\pi n_e z^2 e^4}{(4\pi)^2 m_e v^2} \int \frac{db}{b} \\ &= -\frac{4\pi n_e z^2 e^4}{(4\pi)^2 m_e v^2} \ln \frac{b_{\text{max}}}{b_{\text{min}}} \end{aligned}$$

Die Integrationsgrenzen ergeben sich zum einen aus der De Broglie Wellenlänge des Teilchens ( $b_{\text{min}} \approx \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma m_e v}$ ). Zum anderen aus der Bedingung, dass für große Zeiten  $\Delta t$ , die das Teilchen das Atom stört (groß gegenüber der mittleren Anregungsfrequenz  $\langle \nu \rangle$ ), dieses angeregt wird und danach wieder in den Ausgangszustand zurückkehrt und so keine Energie übertragen wird: Mit der Heisenberg'schen Unschärfe ( $\Delta t \langle \nu \rangle \lesssim 1$ ) findet man  $b \lesssim \frac{v}{\langle \nu \rangle} = b_{\text{max}}$ . Damit erhält man das klassische Ergebnis<sup>a</sup>

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{ion}} = - \left( \rho N_A \frac{Z}{A} \right) 4\pi r_e^2 m_e c^2 z^2 \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \ln \left( \frac{m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} \right)$$

<sup>a</sup>Relativ zum quantenmechanischen Resultat fehlt im Argument des Logarithmus ein Faktor 2 vor dem Bruch, sowie der Term  $\sim \beta^2$ .

Häufig wird statt der Größe  $\langle \frac{dE}{dx} \rangle$  die Größe  $\frac{1}{\rho} \langle \frac{dE}{dx} \rangle$  angegeben, die eine geringere Materialabhängigkeit aufweist<sup>3</sup>:

$$\frac{1}{\rho} \langle \frac{dE}{dx} \rangle = - \underbrace{(N_A 4\pi r_e^2 m_e c^2)}_K z^2 \frac{Z}{A} \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \left( \ln \frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} - \beta^2 \right)$$

Die Konstante  $K$  beträgt  $K/A = 0.307 \text{ MeV g}^{-1} \text{ cm}^2$  mit  $A = 1 \text{ g} \cdot \text{Mol}^{-1}$ .

**Bemerkung:** Die quantenmechanische Rechnung nimmt die Mittelung über viele Stöße an. Erst eine große Zahl von Stößen liefert eine Verteilung des Energieverlustes, deren Mittelwert durch die Bethe-Bloch-Formel beschrieben wird. Bei dünnen Absorbern mit wenigen Stößen kommt es aber aufgrund von Fluktuationen zu starken Abweichungen und sehr asymmetrischen Verteilungen.

Abbildung IV.1(oben) zeigt den Verlauf des spezifischen Energieverlustes  $-\frac{1}{\rho} \langle \frac{dE}{dx} \rangle$  als Funktion von  $\beta\gamma$  des ionisierenden Teilchens (**Bethe-Bloch-Kurve**):

- für kleine Werte von  $\beta\gamma$  ist der Energieverlust proportional zu  $1/\beta^2$ : Sehr langsame Teilchen verlieren sehr stark Energie und haben deshalb eine sehr kurze Reichweite in Materie.
- Man findet für alle Absorbermaterialien unabhängig von der Teilchenspezies ein Minimum bei  $\beta\gamma \approx 3.5$ . Der spezifische Energieverlust beträgt hier mit Ausnahme von Wasserstoff zwischen 1 und 2  $\text{MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$  (z.B. für Plastik mit  $\rho \approx 1 \text{ g cm}^{-3}$  typisch etwa 2  $\text{MeV/cm}$ ). Teilchen im Minimum nennt man minimal ionisierende Teilchen<sup>4</sup>.
- Nach dem Minimum steigt der Energieverlust wieder an: Aufgrund des Lorentz-Boosts  $\beta\gamma$  nimmt die transversale E-Feldkomponente des Teilchens stark zu und führt zu stärkeren Ionisationseffekten (relativistischer Anstieg). Bei sehr hohen  $\beta\gamma$  kommt es aufgrund des Dichteffektes zu einer Abflachung. Bei noch höheren Werten von  $\beta\gamma$  verlieren die Teilchen aufgrund von Bremsstrahlung signifikant Energie.

**Teilchenidentifikation:** Der für einen bekannten Teilchenimpuls  $|\vec{p}|$  gemessene spezifische Energieverlust kann zur Teilchenidentifikation benutzt werden: Der gemessene Energieverlust bestimmt den  $\beta\gamma$ -Wert eines Teilchens. Mit  $\beta\gamma = |\vec{p}|/(cM)$  kann hieraus die Teilchenmasse ermittelt werden. Abbildung IV.1(unten) zeigt den mit der Time Projection Chamber des ALICE-Experimentes gemessenen spezifischen Energieverlust für

<sup>3</sup>Für große  $Z$  gilt für alle Elemente näherungsweise  $\frac{Z}{A} \approx 0.5$ .

<sup>4</sup>Da der Anstieg nach dem Minimum moderat ist, verwendet man diesen Ausdruck häufig auch für Teilchen mit Impulsen jenseits des Minimums.

verschiedene Teilchenarten als Funktion des Teilchenimpulses. Man erkennt klar, wie die Teilchenarten verschiedenen Bändern entsprechen.

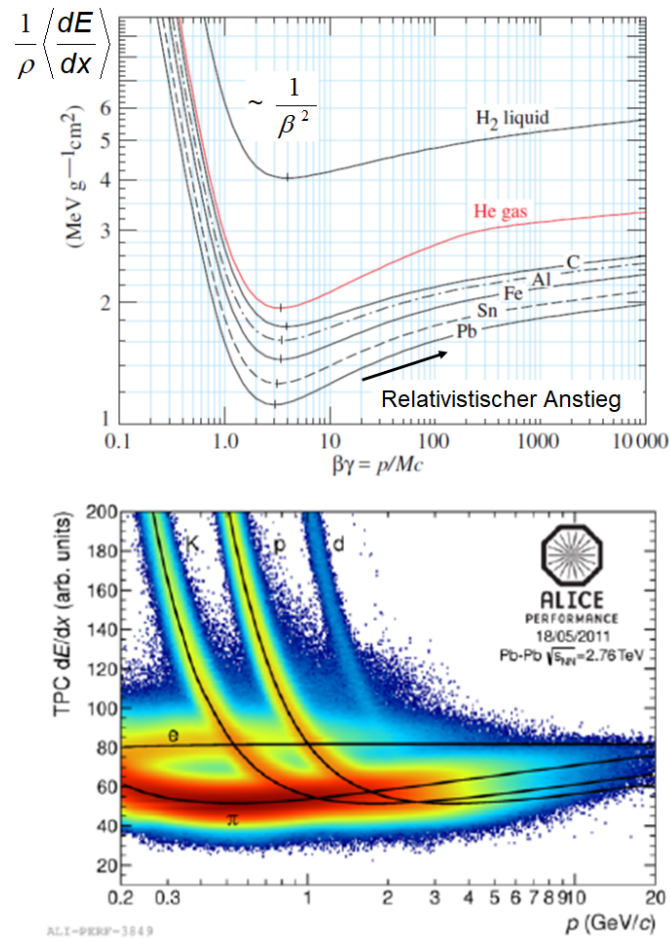


Abbildung IV.1: Oben: Spezifischer Energieverlust  $-\frac{1}{\rho} \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$  durch Ionisation beim Durchgang geladener Teilchen durch Materie in Abhängigkeit des Wertes  $\beta\gamma$  der Teilchen (entnommen PDG). Unten: Spezifischer Energieverlust gemessen mit der ALICE TPC für verschiedene Teilchenarten als Funktion des Teilchenimpulses (ALICE).

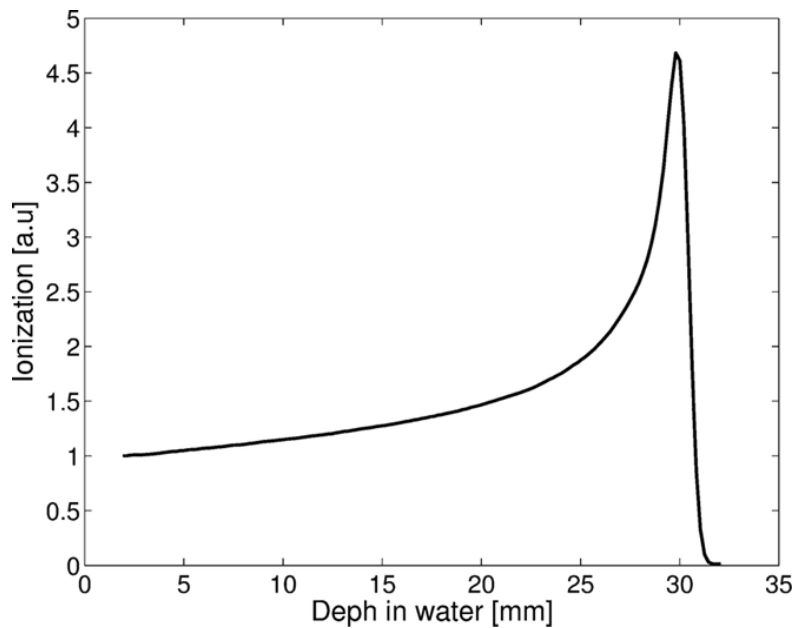


Abbildung IV.2: Bragg-Peak: Energieverlust eines niederenergetischen Teilchens durch Ionisation beim Eindringen in einem Wasserabsorber. Am Ende der Reichweite des Teilchens wird ein erheblicher Anteil der Teilchenenergie deponiert.

**Bragg-Peak:** Aufgrund der starken Impulsabhängigkeit bei kleinen  $\beta\gamma$ -Werten ( $\sim 1/\beta^2$ ) kommt es für langsame Teilchen zu einer starken Zunahme des Energieverlustes als Funktion der Eindringtiefe. Ein großer Teil der Teilchenenergie wird dann innerhalb einer sehr kurzen Wegstrecke am Ende der maximalen Reichweite der Teilchen deponiert. Diese als Bragg-Peak bezeichnete hohe Energiedeposition am Ende der Reichweite der Teilchen ist in Abbildung IV.2 dargestellt. Die auf eine kurze Wegstrecke limitierte hohe Energiedeposition macht man sich bei der Tumor-Strahlentherapie zunutze. Wenn man schwere Teilchen (Protonen oder sogar leichte Ionen) für die Strahlentherapie nutzt, kann man durch korrekte Wahl der Strahlenergie den maximalen Energieverlust auf die Tiefe des Tumors einstellen und schädigt dadurch das gesunde Gewebe entsprechend weniger.

## IV.2 Energieverlust von Elektronen

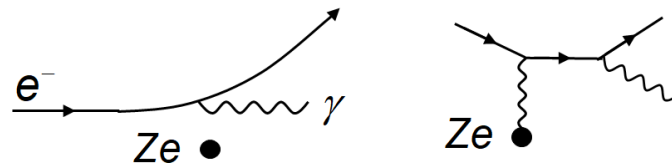
Neben dem Energieverlust durch Ionisation verlieren hochenergetische Elektronen vor allem durch Bremsstrahlung Energie:

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{ion}} + \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{Brems}}$$

Für den Energieverlust der Elektronen durch Ionisation muss berücksichtigt werden, dass Elektronen bereits bei sehr niedrigen Energien hochrelativistisch sind ( $\beta\gamma \gg 3.5$ ). Daneben führt ihre sehr kleine Masse beim Einzelstoß zu starken Ablenkungen und zu einem großen maximalen Energieübertrag  $\Delta E = \frac{1}{2}E_{\text{kin}}$ .<sup>5</sup>

Bremsstrahlung dominiert den Energieverlust bei hohen Energien. Für die Energie  $E_c$ , bei der der Energieverlust durch Bremsstrahlung und durch Ionisation gleich sind, findet man für flüssige und feste Medien die empirische Beziehung  $E_c \approx 610 \text{ MeV}/(Z + 1.2)$ . Für Blei dominiert die Bremsstrahlung den Energieverlust also bereits ab etwa 10 MeV.

**Energieverlust durch Bremsstrahlung:** Die folgende Skizze zeigt ein Elektron, das im E-Feld eines Kerns abgelenkt wird und als Folge ein Photon abstrahlt. Das entsprechende Feynman-Diagramm ist ebenfalls gezeigt:



Das Elektron koppelt an den Kern und sendet dann in der Folge das Photon aus. Die 4er-Impulserhaltung wird durch den Impulsaustausch mit dem Kern sichergestellt. Bremsstrahlung eines freien Elektrons ist aufgrund 4er-Impulserhaltung nicht möglich. Aufgrund der Kopplung des Elektrons an den Kern erwartet man für die  $|\mathcal{A}_{fi}|^2$ :

$$|\mathcal{A}_{fi}|^2 \sim (Ze \cdot e \cdot e)^2$$

Der Energieverlust von Elektronen durch Bremsstrahlung beträgt:

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{Brems}} = - \underbrace{\rho N_A \frac{Z^2}{A} \cdot 4\alpha \cdot r_e^2 \cdot \ln \left( \frac{183}{Z^{1/3}} \right)}_{\frac{1}{X_0}} \cdot E$$

Wegen  $Z^2\alpha r_e^2 \sim (1/m_e)^2 \cdot Z^2 e^6$  findet man die aufgrund von  $|\mathcal{A}_{fi}|^2$  erwartete Abhängigkeit von der Kopplungskonstanten  $e$ . Weiter findet man dass der Energieverlust  $\sim \frac{1}{m_e^2}$  ist. Die Bremsstrahlung ist also vor allem für leichte Teilchen relevant. Mit der Konstanten  $1/X_0$  ergibt sich der Energieverlust zu:

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{\text{Brems}} = - \frac{1}{X_0} E$$

Integriert man diese Gleichung, so erhält man einen exponentiellen Ausdruck für Energie eines Elektrons mit der Anfangsenergie  $E_0$  als Funktion der zurückgelegten Wegstrecke

<sup>5</sup>Der Faktor  $\frac{1}{2}$  für den maximalen Energieübertrag berücksichtigt, dass einfallendes Elektron und das Hüllelektron, an dem gestreut wird, ununterscheidbare Teilchen sind.

$x$  im Absorber:

$$E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}$$

Die materialabhängige Konstante  $X_0$ , mit

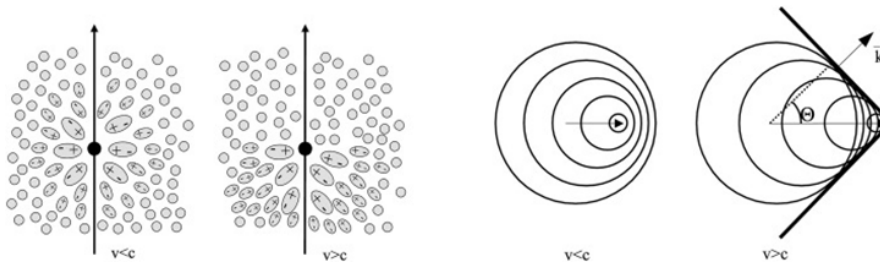
$$\frac{1}{X_0} = \rho N_A \frac{Z^2}{A} \cdot 4\alpha \cdot r_e^2 \cdot \ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right),$$

die die Dimension einer Länge besitzt, wird als Strahlungslänge bezeichnet. Sie entspricht der Strecke, die ein hoch-energetisches Elektron in einem Absorber zurücklegen muss, um 63% seiner Energie durch Bremsstrahlung zu verlieren. Die Strahlungslänge für verschiedene Materialien ist tabelliert (s. PDG). Die folgende Tabelle gibt für einige Materialien die Strahlungslänge an. Es ist üblich, einen Teil der Materialabhängigkeit durch Multiplikation mit der Dichte zu eliminieren  $\tilde{X}_0 = \rho X_0$ .

Material	$X_0$ [cm]	$\tilde{X}_0$ [g cm <sup>-2</sup> ]
H <sub>2</sub> (Gas)	731×10 <sup>3</sup>	61.3
C	18.8	42.7
Al	8.9	24.0
Pb	0.6	6.4

### IV.3 Cherenkov-Strahlung für geladene Teilchen

Cherenkov-Strahlung entsteht beim Durchgang geladener Teilchen durch Materie, falls die Teilchengeschwindigkeit  $v$  größer als die Lichtgeschwindigkeit im Medium mit dem Brechungsindex  $n$  ist:  $v > c/n$ .



Die Abbildung zeigt anschaulich wie sich das Medium beim Durchgang einer Ladung polarisiert. Falls die Geschwindigkeit der Ladung kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, so führt die Polarisation des Mediums zu einer teilweisen Abschirmung. Für Geschwindigkeiten  $v > c/n$  entsteht ein sich zeitlich ändernder Dipol der elektromagnetische Strahlung aussendet. Der überwiegende Teil der Strahlung liegt im Bereich des kurzweligen Lichtes (blau) und im UV-Bereich. Der Energieverlust durch Cherenkov-Strahlung

ist absolut sehr klein ( $-\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \approx 10^{-3} \text{ MeVg}^{-1} \text{ cm}^2$ ), der Effekt wird aber zur Teilchendetektion und Identifikation genutzt. Zum Nachweis muss das Medium transparent für die Strahlung sein.

Wie in obiger Abbildung angedeutet wird die Cherenkov-Strahlung auf einem Kegel mit Öffnungswinkel  $\theta$  ausgestrahlt. Ähnlich wie beim Überschallknall findet man für den Öffnungswinkel die folgende Beziehung:

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$$

Durch Messung des Öffnungswinkels kann die ausgestrahlte Cherenkov-Strahlung zur Messung der Geschwindigkeit eines geladenen Teilchens bzw., falls man den Impuls des Teilchens kennt, auch zur Bestimmung der Masse und damit der Teilchenspezies genutzt werden.

#### IV.4 Wechselwirkung von Photonen mit Materie

Die Wechselwirkung zwischen Photonen und Materie führt zur Absorption der Photonen und damit zur Abschwächung der Intensität der einfallenden Photonen (s.a. Absorption von Röntgenstrahlung):

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} \quad \text{mit } \mu = \text{Absorptionskoeffizient und } I_0 = \text{Anfangsintensität}$$

Neben der für die Röntgenstrahlung diskutierten Elektronenanregung und Ionisation (Photo-Effekt) existiert für Photonen hoher Energie noch die Compton-Streuung und die Möglichkeit von Paarbildung ( $\gamma \rightarrow e^+e^-$ ). Für niederenergetische Photonen existiert zudem die Streuung der Photonen an freien Elektronen (Thomson-Streuung) und die kohärente Streuung an der Hülle des Atoms - beide Effekte bewirken keine Ionisation bzw. Anregung sondern führen zum Aussenden von Photonen gleicher Energie. Der Absorptionskoeffizient  $\mu = n_t \sigma$  setzt sich deshalb aus drei Anteilen zusammen:

$$\mu = \mu_{\text{Ph}} + \mu_{\text{Comp}} + \mu_{\text{Paar}}$$

Abbildung IV.3 zeigt den totalen Absorptionsquerschnitt  $\sigma$  für einen Bleiabsorber für Photonen verschiedener Energie: Bei kleinen Energien dominiert der Photoeffekt den Wirkungsquerschnitt (hier sind die Röntgen-Absorptionskanten deutlich erkennbar), im mittleren Energiebereich die Compton-Streuung und bei hohen Energien die Paarbildung.



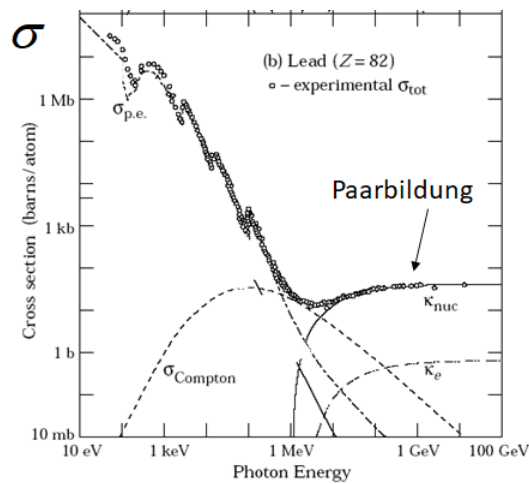
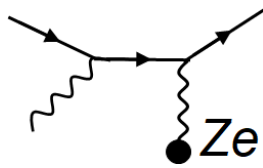


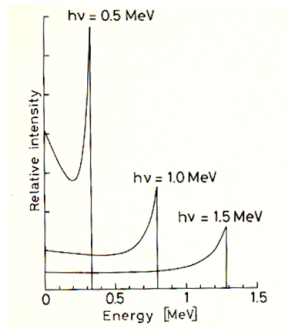
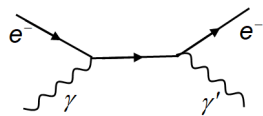
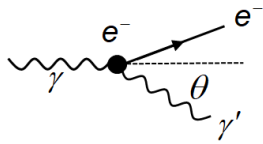
Abbildung IV.3: Photon-Absorptionsquerschnitt  $\sigma$  für Blei als Funktion der Photonenergie (entnommen PDG). Für die Paarbildung sind die Beiträge für Paarbildung am Kern ( $\kappa_{\text{nuc}}$ ) und für Paarbildung an den Hüllelektronen ( $\kappa_e$ ) einzeln gezeigt.

#### IV.4.1 Photo-Effekt



Beim Photo-Effekt überträgt das Photon seine Energie an ein Elektron der Hülle eines Absorber-Atoms. Aufgrund der 4er-Impulserhaltung ist der Effekt nur für gebundene Elektronen möglich. Der Kern, an den die Elektronen gebunden sind, wirkt dann als Stoßpartner und kann den Rückstoß aufnehmen. Der Photoeffekt ist  $\sim 1/E_\gamma^{3.5}$  und fällt also mit der Energie stark ab.

IV.4.2 Compton-Effekt



Beim Compton-Effekt handelt es sich um einen Streuprozess eines Photons  $\gamma$  mit Energie  $E_\gamma$  an einem quasi-freien Elektron. Der Endzustand besteht aus einem neuen Photon  $\gamma'$  mit Energie  $E'_\gamma$  und dem gestreuten Elektron. Die Energie des gestreuten Photons beträgt:

$$E'_\gamma = E_\gamma \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{E_\gamma}{m_e c^2}}_\epsilon (1 - \cos \theta_{\gamma'})}$$

Für die Rückwärtsstreuung des Photons,  $\theta_{\gamma'} = 180^\circ$ , ist die Energie des Photons minimal und die kinetische Energie des den Rückstoß aufnehmenden Elektrons maximal (Compton-Kante):

$$E'_\gamma|_{\min} = \frac{E_\gamma}{1 + 2\epsilon}$$

$$E_{\text{kin}}^e|_{\max} = E_\gamma - E'_\gamma = E_\gamma \frac{2\epsilon}{1 + 2\epsilon}$$

Die Compton-Kanten der Elektronenergie für verschiedene Photon-Energien  $E_\gamma$  sind in der nebenstehenden Abbildung gezeigt. Der Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung wird durch die Klein-Nishina-Formel gegeben (s. Kasten).

**Inverser Compton-Effekt:** Trifft ein Photon auf ein hoch-energetisches Elektron kann ein Teil der Elektronenenergie auf das Photon übertragen werden, so dass die Energie  $E'_\gamma > E_\gamma$ . Die inverse Compton-Streuung an hoch-energetischen Elektronen ist eine Quelle hoch-energetischer  $\gamma$ -Strahlung in der kosmischen Strahlung.

Klein-Nishina-Formel: Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung (QED)

$$\frac{d\sigma_{\text{Comp}}}{d\Omega_\gamma} = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{E'_\gamma}{E_\gamma}\right)^2 \left(\frac{E'_\gamma}{E_\gamma} + \frac{E_\gamma}{E'_\gamma} - \sin^2 \theta_\gamma\right)$$

Grenzfälle:

Für  $E_\gamma \ll m_e c^2$ :  $\frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \rightarrow 1$

Klein-Nishina-Wirkungsquerschnitt geht gegen den Thomson-Wirkungsquerschnitt:

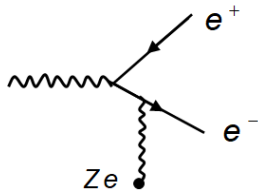
$$\frac{d\sigma_{\text{Comp}}}{d\Omega_\gamma} \rightarrow \frac{d\sigma_{\text{Thom}}}{d\Omega_\gamma} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta_\gamma) \quad \text{b.w.} \quad \sigma_{\text{Comp}} \rightarrow \sigma_{\text{Thom}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

Für  $E_\gamma \gg m_e c^2$ :

$$\sigma_{\text{Comp}} = \frac{\pi \alpha^2 \hbar^2}{E_\gamma m_e} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{2E_\gamma}{m_e c^2}\right) \sim \frac{\ln E_\gamma}{E_\gamma} \quad \text{für große } E_\gamma$$

#### IV.4.3 Paarbildung

Die Konversion eines reellen Photons in ein  $e^+ e^-$ -Paar ist ohne Stoßpartner aufgrund von 4er-Impulserhaltung nicht möglich. Der Rückstoß muss beispielsweise an einen Kern abgeleitet werden. Die kinematische Schwelle hängt von der Energie, die der Stoßpartner aufnimmt, ab:



$$\begin{aligned} E_\gamma &> 2m_e c^2 + 2 \frac{m_e^2 c^4}{M c^2}, \quad M = \text{Masse des Stoßpartner} \\ &\gtrsim 1.02 \text{ MeV} \quad \text{für Rückstoß an schwerem Kern} \\ &\gtrsim 4m_e c^2 \approx 2.04 \text{ MeV} \quad \text{für Rückstoß an Elektron} \end{aligned}$$

Die Wirkungsquerschnitt für die Paarproduktion wächst mit der Energie bis zu einem Sättigungswert  $\sigma_{\text{Paar}}$  an:

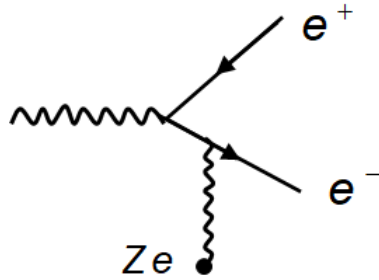
$$\sigma_{\text{Paar}} = \frac{7}{9} \cdot 4\alpha r_e^2 Z^2 \ln \frac{183}{Z^{1/3}} = \frac{7}{9} \cdot \underbrace{\frac{A}{\rho N_A}}_{1/n} \cdot \frac{1}{X_0}$$

mit der Strahlungslänge  $X_0$ , die bereits bei der Bremsstrahlung eingeführt wurde. Die mittlere freie Weglänge eines Photons bis zur Paarbildung beträgt dann:

$$\lambda_{\text{Paar}} = \frac{1}{n\sigma} = \frac{9}{7} X_0$$

Paarbildung und Bremsstrahlung werden durch die gleiche materialabhängige Größe  $X_0$  beschrieben, was in sofern verständlich ist, als dass es sich um sehr ähnliche Prozesse handelt und die beiden Feynman-Graphen topologisch gleich sind (man muss nur die ein- und ausgehenden Teilchen entsprechend „verbiegen“).

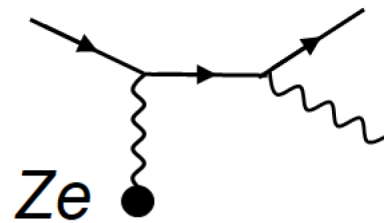
**Paarbildung**



Photonstrahlabschwächung:

$$I(x) = I_0 \exp\left(-\frac{7}{9} \frac{x}{X_0}\right)$$

**Bremsstrahlung**

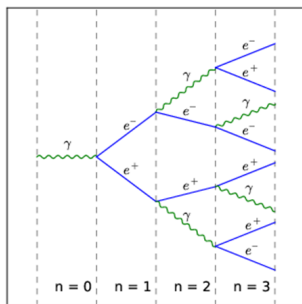


Energieverlust:

$$E(x) = E_0 \exp\left(-\frac{x}{X_0}\right)$$

**IV.5 Elektromagnetische Schauer**

Durch die Kombination von Bremsstrahlung und Paarproduktion kommt es bei der Wechselwirkung hochenergetischer Elektronen und Photonen mit Materie zur Ausbildung elektromagnetischer Schauer. Ein sehr einfaches Schauermodell ist in der Abbildung skizziert. Im Mittel kommt es nach etwa einer Strahlungslänge  $X_0$  zur Aussendung von Bremsstrahlung bzw. zur Paarbildung.



In jedem Schritt verdoppelt sich die Zahl der Schauer-  
 erteilchen. Die mittlere Energie pro Teilchen halbiert  
 sich dann entsprechend und beträgt bei einer Schau-  
 ertiefe von  $n \cdot X_0$  gerade  $E_n = E/2^n$ . Der Schauerpro-  
 zess bricht ab, wenn der Energieverlust durch Ionisa-  
 tion dominant wird ( $E_n \approx E_c$ ). Man kann sich dann  
 die Tiefe  $x_{\max}$  des Schauers überlegen:

$$x_{\max} = \frac{\ln(E/E_c)}{\ln 2} X_0$$

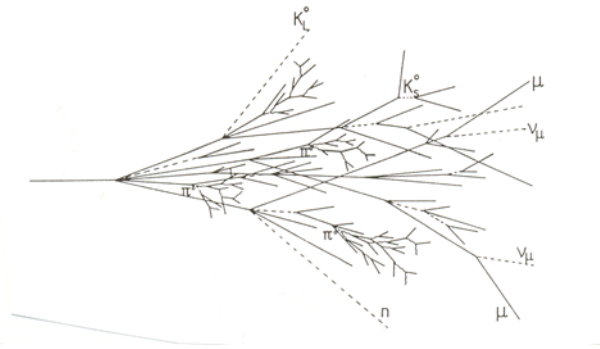
Teilchendetektoren zur Messung der Energie hochenergetischer Elektronen und Photonen  
 - sogenannte elektromagnetische Kalorimeter - müssen deshalb mit  $\sim \ln E$  tiefer werden.

## IV.6 Hadronische Wechselwirkung und hadronische Schauer

Hochenergetische Hadronen ( $E \gg 1 \text{ GeV}$ ) wechselwirken stark mit den Kernen  $A$  und den Nukleonen der Materie und bilden sekundäre Hadronen und Kernfragmente:

$$n, p, \pi^\pm, K^\pm, K^0 + A \longrightarrow \text{sekundäre Hadronen}$$

Die sekundären Hadronen und Nukleonen werden, solange sie hochenergetisch sind, auch wieder sekundäre Teilchen auslösen, dadurch entsteht ein hadronischer Schauer.



Die Schauerskala wird durch die Wechselwirkungslänge  $\lambda_{\text{WW}}$  der Hadronen im jeweiligen Material gegeben.

$$\lambda_{\text{WW}} = \frac{1}{n \cdot \sigma_{\text{WW}}} = \frac{A}{\rho N_A} \cdot \frac{1}{\sigma_{\text{WW}}}$$

Für den materialabhängigen Wechselwirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{WW}}$  findet man empirisch für hochenergetische Hadronen<sup>6</sup>  $\sigma_{\text{WW}} \approx 35 \text{ mb } A^{0.7}$ . Die Tabelle IV.1 gibt für einige häufig verwendete Materialien die gemessene hadronische Wechselwirkungslänge an.

Element	$\lambda_{\text{WW}}$
Fe	16.8 cm
Pb	17.6 cm
C	39 cm

Tabelle IV.1: Hadronische Wechselwirkungslänge für hochenergetische Hadronen.

<sup>6</sup> $E_H \gtrsim 50 \text{ GeV}$  - Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts ist dann gering

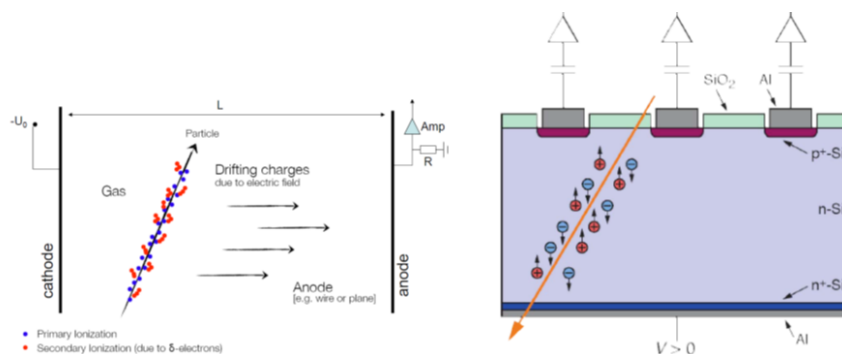


Abbildung IV.4: Technologien zum Nachweis der Trajektorien geladener Teilchen: (links) Gasdetektoren und Silizium-Halbleiterdetektoren

## IV.7 Detektoren in der Teilchenphysik

Detektorsysteme in der Teilchenphysik bestehen aus verschiedenen Detektorkomponenten, die für sehr unterschiedliche Aufgaben optimiert werden:

- Spurdetektoren dienen dem Nachweis der Trajektorien geladener Teilchen
- Spektrometer messen den Impuls geladener Teilchen
- Elektromagnetische und hadronische Kalorimeter dienen der Energiemessung
- Myondetektoren dienen dem Nachweis von Myonen
- Detektoren zur Teilchenidentifizierung unterscheiden geladene Hadronen und Leptonen.

Im Folgenden werden sehr kurz die verschiedenen Funktionen erläutert und Beispiele für verwendete Detektortechnologien gegeben.

### Spursysteme:

Aufgrund ihres Energieverlustes (Bethe-Bloch) erzeugen geladene Teilchen beim Durchgang durch ein Medium freie Ladungsträger. Diese Ladungsträger können nachgewiesen werden und zum Nachweis des Teilchens und zur Rekonstruktion des Ortes des Teilchendurchgangs genutzt werden. Innerhalb einer Sensorebene erlaubt das eine zweidimensionale Bestimmung des Teilchendurchgangs. Mehrere Detektorlagen können für eine 3-dimensionale Rekonstruktion der Teilchen-Trajektorie benutzt werden. Je nach der verlangten Ortsauflösung, der Teilchen-Multiplizität und der Größe der abzudeckenden Flächen, kommen verschiedene Technologien zum Einsatz. Die am häufigsten eingesetzten Technologien sind Gasdetektoren für den Bau großflächiger Spurdetektoren und Halbleiterdetektoren, wenn eine hohe Granularität und exzellente Ortsauflösung verlangt wird. Beide Technologien sind in Abbildung IV.4 skizziert

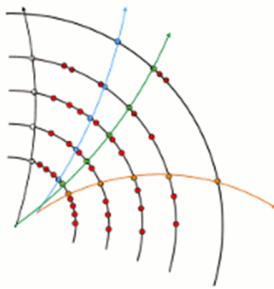
Gasdetektoren: Geladene Teilchen ionisieren ein Gas. Die entstandenen Elektronen und

Gasionen driften im elektrischen Feld einer Kathoden-Anoden-Konfiguration zur Anode ( $e^-$ ) bzw. Kathode ( $\text{Ion}^+$ ). In der Regel wird das Elektronensignal im Feld der Anode durch die Erzeugung sekundärer Elektronen verstärkt (Gasverstärkung) und kann dann elektronisch nachgewiesen werden. Aus der Driftzeit der Elektronen kann man den genauen Teilchengurchang rekonstruieren.

**Silizium-Halbleiterdetektoren:** Die Detektoren bestehen aus dotiertem Silizium. Durch Anlegen einer Spannung wird das Silizium wie eine Diode in Sperrrichtung betrieben. Erzeugte Ladungsträger werden von den Elektronen an der Oberfläche des Detektors abgesaugt und hier nachgewiesen. Der Nachweis des Signals durch mehrere Elektroden (typischerweise Streifen im Abstand von  $O(300\mu\text{m})$ ) können sehr hohe Auflösungen transversal zu den Elektrodenstreifen erzielt werden ( $< 50\mu\text{m}$ ).

### Impulsmessungen:

Impulse geladener Teilchen werden über die Ablenkung der Teilchen in einem Magnetfeld bestimmt. Die Abbildung zeigt eine Standardkonfiguration mit zylindrischen Lagen von Spurdetektoren, die sich in einem axialen Magnetfeld parallel zur Zylinderachse befinden.



Geladene Teilchen bewegen sich auf gekrümmten Bahnen mit Radius  $R$ . Für den Impulsanteil des Teilchens transversal zum Magnetfeld  $p_{\perp}$  findet man aufgrund der Lorentzkraft:

$$p_{\perp} = q \cdot B \cdot R \quad \text{bzw.} \quad p_{\perp}[\text{GeV}] = 0.3 \cdot B[\text{T}] \cdot R[\text{m}]$$

Die Teilchenladung  $q$  ist im letzten Schritt zu  $q = 1$  gesetzt worden. Um den Gesamtimpuls des Teilchens zu bestimmen, muss man noch die Richtung des Teilchens relativ zum Magnetfeld berücksichtigen.

### Energiemessung mittels Kalorimeter:

Aufgrund der sehr unterschiedlichen Skalen der elektromagnetischen und hadronischen Schauer ( $X_0$  und  $\lambda_{\text{WW}}$ ) werden in der Regel unterschiedliche Kalorimeter für die Energiemessung von Elektronen und Photonen einerseits und von Hadronen andererseits benutzt. Bei elektromagnetischen Kalorimetern unterscheidet man homogene Kalorimeter, bei denen das Absorber- oder Schauermedium auch zur Energiemessung benutzt wird, und Sampling-Kalorimeter, bei denen die Schauerentwicklung und der Nachweis der Schauerteilchen in verschiedenen Materialien geschieht.

Die Energieauflösung von Kalorimetern ist durch die statistische Fluktuation des erzeugten Signals gegeben. Das gemessene Signal  $N$  (beispielsweise die Zahl der Photonen bei Verwendung von Szintillatoren oder die Zahl erzeugter Ladungsträger im Falle von Halbleitern) ist proportional zur Teilchenenergie  $E$  ( $N \sim E$ ). Die statistische Fluktuation des Signals wird durch  $\sqrt{N}$  gegeben, so dass die Energieauflösung eines Kalorimeters

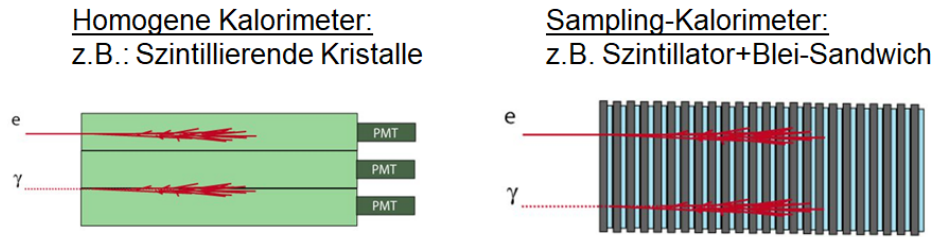


Abbildung IV.5: Elektromagnetische Kalorimetern sind entweder als homogene Kalorimeter oder als Sampling-Kalorimeter aufgebaut

bei Vernachlässigung anderer Effekte durch

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{C}{\sqrt{E}}$$

gegeben ist.

Für hadronische Kalorimeter wird nur die Sampling-Technologie verwendet: Alle Materialien, die eine große hadronische Wirkungsquerschnitt haben um die Kalorimeter kompakt bauen zu können, sind nicht aktiv und erzeugen kein Signal. Zur Signalerzeugung kommt deshalb nur die Sampling-Technologie mit aktiven Lagen in Frage.

### Teilchenidentifikation:

Zur Unterscheidung geladener quasi-stabiler<sup>7</sup> Teilchen  $\mu$ ,  $e$ ,  $\pi$ ,  $K$ ,  $p$  kommen sehr verschiedene Technologien zur Anwendung:

- Messung des spezifischen Energieverlustes  $\frac{dE}{dx}(\beta\gamma)$  bei bekanntem Impuls
- Flugzeitmessung  $t(v)$  für eine bekannte Strecke bei bekanntem Impuls
- Messung des Cherenkov-Winkels  $\theta(v)$  bei bekanntem Impuls

In allen Fällen hängt die Messgröße von der Geschwindigkeit des Teilchens ab. Bei bekanntem Impuls kann man so aus der Messung die Masse bestimmen und erhält damit eine Teilchenhypothese.

Myonidentifikation: Eine Ausnahme bilden Myonen. Myonen sind über weite Impulsbereiche minimal ionisierend und bilden weder elektromagnetische noch hadronische Schauer. Sie sind deshalb die einzigen geladenen Teilchen, die einen dicken Absorber unbeschadet durchqueren können und danach mit sogenannten Myondetektoren als minimal ionisierende Teilchen nachgewiesen werden können.

### Teilchendetektor:

Moderne Teilchenphysik-Detektoren an Beschleunigern sollen möglichst viele der obigen Funktionen gleichzeitig erfüllen. Bewährt hat sich ein Detektordesign, bei dem die

<sup>7</sup>quasi-stabil heißt, dass die Teilchen den Detektor passieren, ohne zu zerfallen (Wechselwirkungen sind aber möglich).



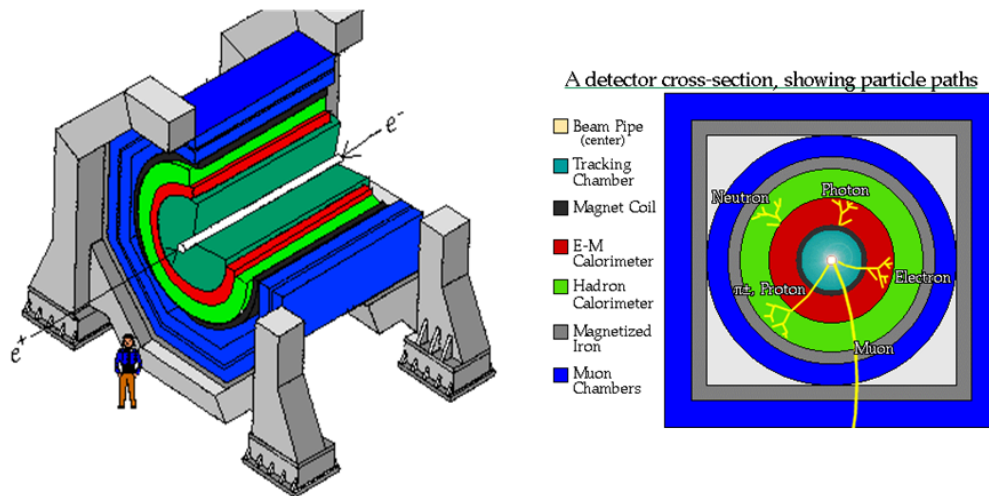


Abbildung IV.6: (links) Prototyp Detektor für einen  $e^+e^-$ -Beschleuniger: Die Komponenten umschließen den  $e^+e^-$ -Vertex konzentrisch: Strahlrohr, Spurdetektor, Magnetspule, elektromagnetisches Kalorimeter, hadronisches Kalorimeter, Eisen zur Rückführung des Magnetfeldes, Myondetektor. (rechts) Typische Detektorsignaturen verschiedener Teilchen. in den Detektorkomponenten. Bemerkung: Der hadronische Schauer des Protons beginnt - anders als hier gezeigt - meist schon im elektromagnetischen Kalorimeter.

einzelnen Detektorkomponenten den Wechselwirkungspunkt konzentrisch wie Zwiebelschalen umschließen. Abbildung IV.6 zeigt schematisch den Aufbau eines Detektors für einen  $e^+e^-$ -Beschleuniger. Moderne Detektoren wie ATLAS und CMS am LHC folgen prinzipiell dem gleichen Schema.

Die verschiedenen Teilchen hinterlassen die folgenden Signaturen in den Detektorkomponenten:

**Geladene Teilchen** hinterlassen Spuren in den Spurdetektoren, die je nach Ladung, Magnetfeld und Teilchenimpuls unterschiedliche Krümmungen aufweisen. **Elektronen** produzieren zudem Schauer im elektromagnetischen Kalorimeter. **Hadronen** bilden hadronische Schauer die meist bereits im elektromagnetischen Kalorimeter beginnen, sich aber überwiegend im hadronischen Kalorimeter ausbilden. **Myonen** hinterlassen in allen Detektorkomponenten nur die Signatur minimal ionisierender Teilchen und erreichen bei minimalem Energieverlust die Myonkammern.

**Neutrale Teilchen** hinterlassen keine Signatur im Spurdetektor. **Photonen** bilden eine Schauer im elektromagnetischen Kalorimeter. **Neutrale Hadronen** bilden hadronische Schauer überwiegend im hadronischen Kalorimeter.

## Kapitel V

# Symmetrien und Erhaltungssätze

Die Invarianz von Naturgesetzen unter Transformationen, wie z.B. Spiegelungen oder Zeittransformationen, wird als Symmetrie bezeichnet und spielen in der Physik eine sehr wichtige Rolle. Sie werden als Schlüssel zur Formulierung von Naturgesetzen betrachtet.

Mit Symmetrien (Invarianzen) sind Erhaltungsgrößen (in der Quantenmechanik: Quantenzahlen) verknüpft. Dieser grundlegende Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen wurde erstmalig von Emmy Noether (Noether Theorem) formuliert<sup>1</sup> 1918 formuliert: „Zu jeder Symmetrie-Transformation existiert eine Erhaltungsgröße“.

Das Noether-Theorem gilt sowohl für klassische als für quantenmechanische Systeme. Man unterscheidet verschiedene Arten von Symmetrie-Transformationen:

- Kontinuierliche Transformationen, die zu additiven Erhaltungsgrößen führen. Beispiele sind:
  - Raum-Zeit-Symmetrien (z.B. Translation  $\rightarrow$  Impulserhaltung)
  - Innere-Symmetrien (Phasentransformationen  $\rightarrow$  Erhaltung einer verallgemeinerten Ladung)
- Diskrete Transformationen, die zu multiplikativen Erhaltungsgrößen führen. Beispiele sind Parität oder Ladungskonjugation.

---

<sup>1</sup>Das Noether-Theorem wurde formuliert und bewiesen für Lie-Gruppe: Ist ein System invariant unter der Transformation einer Lie-Gruppe, so existiert eine Erhaltungsgröße zu jedem Element der Lie-Algebra.

## V.1 Erhaltungsgrößen und Transformationen

### V.1.1 Observablen und Erhaltungsgrößen<sup>2</sup>

Ein Operator  $\hat{Q}$  entspricht einer physikalischen Observablen, wenn der Operator hermitesch ist,  $\hat{Q} = \hat{Q}^\dagger$  (für Matrizen:  $Q_{ik} = Q_{ki}^*$ ), und sein Erwartungswert  $\langle \hat{Q} \rangle$  reell ist. Die Observable ist erhalten wenn

$$0 = \frac{d\langle \hat{Q} \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \cdot \langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle = \frac{i}{\hbar} \cdot \langle \hat{H}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{H} \rangle$$

D. h., eine Observable ist erhalten, wenn der entsprechende Operator  $\hat{Q}$  mit dem Hamilton-Operator  $\hat{H}$  vertauscht  $[\hat{H}, \hat{Q}] = 0$ . Eigenfunktionen von  $\hat{H}$  können dann so gewählt werden, dass sie auch Eigenfunktionen zu  $\hat{Q}$  sind. Sie lassen sich dann nach Eigenwerten  $Q = \langle \psi_Q | \hat{Q} | \psi_Q \rangle$  sortieren (s. Atomphysik:  $\psi_{nlm}$ ).

### V.1.2 Symmetrie-Transformationen

Eine Symmetrie-Transformation sei definiert durch einen Operator  $\hat{U}$  mit:

$$\psi' = \hat{U}\psi$$

Da die Normierung der Wellenfunktion erhalten bleiben soll, muss  $\hat{U}$  unitär sein:

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = 1 \quad \text{also} \quad \hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$$

Die Wirkung der Transformation  $\hat{U}$  auf ein System das durch  $\hat{H}$  beschrieben wird ist:

$$\hat{U}\hat{H}\psi = \underbrace{\hat{U}\hat{H}\hat{U}^{-1}}_{\hat{H}'} \underbrace{\hat{U}\psi}_{\psi'} = \hat{H}'\psi'$$

Wenn  $\hat{H}$  invariant unter  $\hat{U}$  ist, d. h. wenn

$$\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^{-1} = \hat{H}$$

folgt

$$\hat{U}\hat{H} = \hat{H}\hat{U} \quad \text{bzw.} \quad [\hat{H}, \hat{U}]$$

In diesem Fall erfüllt  $\psi' = \hat{U}\psi$  die gleiche Schrödinger-Gleichung wie  $\psi$  und das System ist invariant unter  $\hat{U}$ .

Transformation  $\hat{U}$  und mögliche Erhaltungsgrößen:

---

<sup>2</sup>Dieser Abschnitt folgt der Diskussion im Lehrbuch von Frauenfelder und Garcia

- Wenn  $\hat{U}$  ebenfalls hermitesch ist ( $\hat{U} = \hat{U}^\dagger$ ), dann gibt es eine entsprechend erhaltene Observable. Wegen  $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$  ist  $\hat{U} = \hat{U}^{-1}$  und  $\hat{U}^2 = 1$ . Diese Bedingung führt zu multiplikativen Quantenzahlen. Ein Beispiel ist die Paritätsoperation  $\hat{P}$  (Punktspiegelung am Ursprung) für die ebenfalls  $\hat{P}^2 = 1$  und die multiplikative Eigenwerte besitzt.
- Wenn  $\hat{U}$  nicht hermitesch ist, kann es einen hermetischen Operator  $\hat{F}$  geben, der die Transformation  $\hat{U}$  generiert<sup>3</sup>:  $\hat{U} = \exp(i\epsilon\hat{F})$ . Für kleine Werte von  $\epsilon$  kann man die Operator-Funktion entwickeln, so dass gilt:

$$\hat{U}\psi = \exp(i\epsilon\hat{F})\psi = \left(1 + i\epsilon\hat{F} + \frac{(i\epsilon\hat{F})^2}{2!} + \dots\right)\psi$$

In diesem Fall ist der Erwartungswert von  $\hat{F}$  erhalten und  $\hat{F}$  wird als Generator der Symmetrieoperation  $\hat{U}$  bezeichnet. Beispiele hierfür sind Drehungen mit dem Drehimpuls als Erhaltungsgröße oder Phasentransformationen mit einer erhaltenen generalisierten Ladung. Im Gegensatz zum obigen Fall sind diese Transformationen kontinuierlich und führe zu additiven Erhaltungsgrößen.

## V.2 Kontinuierliche Raumtransformationen und ihre Erhaltungsgrößen

Im folgenden werden Translations- und Rotationsinvarianz und die damit verbundenen Erhaltungsgrößen diskutiert.

### V.2.1 Räumliche Translation

Räumliche Translationen  $\hat{U}$  sind durch die folgende Bedingung definiert:

$$\psi'(\vec{r}, t) = \hat{U}\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t)$$

Mit der infinitesimalen Transformation um  $\delta\vec{r}$

$$\psi'(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) + \delta\vec{r} \frac{d}{d\vec{r}} \psi(\vec{r}, t) = \left(1 + \frac{i}{\hbar} \delta\vec{r} \hat{p}\right) \psi$$

(im letzten Schritt wurde der Impulsoperator  $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{d\vec{r}}$  verwendet) kann man durch wiederholte Anwendung die endliche Translation um den Wert  $\Delta\vec{r} = n \cdot \delta\vec{r}$  erzeugen:

$$\hat{U}(\Delta\vec{r}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{\hbar} \delta\vec{r} \hat{p}\right)^n \quad (\text{V.1})$$

$$= \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta\vec{r} \hat{p}\right) \quad (\text{V.2})$$

<sup>3</sup>i. a. ist  $\exp(i\epsilon\hat{F}) \neq \exp(-i\epsilon\hat{F}^\dagger)$ , d. h.  $\hat{U}$  ist nicht hermetisch.

Die Invarianz unter Translationen  $\hat{U}$  bedeutet dass  $[\hat{H}, \hat{p}] = 0$ , d.h. dass der Impuls eine Erhaltungsgröße ist. Der Generator der Translation ist also der Impulsoperator.

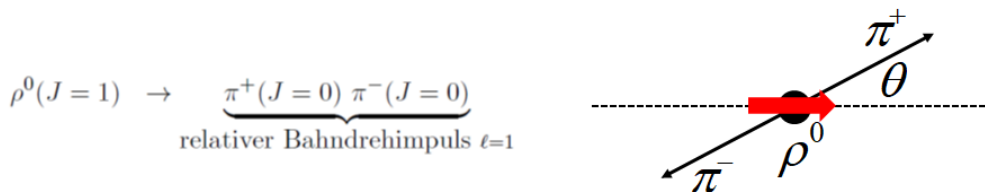
### V.2.2 Rotationen

Sowie Translationen durch den Impulsoperator generiert werden, findet man, dass Rotationen um einen endlichen Winkel  $\Delta\phi$  um eine Achse  $\vec{n}$  durch den Drehimpulsoperator  $\hat{L}$  erzeugt werden:

$$\hat{U} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Delta\phi\vec{n}\hat{L}\right)$$

Auch hier bedeutet die Invariant unter Rotation, dass  $[\hat{H}, \hat{L}] = 0$ , und dass der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße des Systems ist. Diese Eigenschaft hat man in der Atomphysik genutzt, um gemeinsame Eigenfunktionen zu  $\hat{H}$ ,  $\hat{L}_z$  bzw.  $\hat{L}^2$  zu finden. Da es sich bei Rotationen um kontinuierliche Transformationen handelt sind, sind die Quantenzahlen additiv: Drehimpulse addieren.

Die Bedeutung der Drehimpulserhaltung für Teilchenreaktionen kann man sich am Beispiel des Zerfalls des  $\rho$ -Mesons klarmachen. Beim  $\rho$ -Meson handelt es sich um ein Spin-1 Teilchen ( $J = 1$ ), das in zwei Pionen mit Spin-0 zerfällt:



Aufgrund von Drehimpulserhaltung müssen die beiden Pionen einen relativen Bahndrehimpuls von  $\ell = 1$  haben. Wählt man die Quantisierungsachse für den Spin des  $\rho$  in Richtung der gestrichelten Achse (Flugrichtung des  $\rho$ ) so wird die Winkelverteilung  $\mathcal{P}(\theta, \phi)$  (s. Abbildung) des  $\pi^+\pi^-$ -Systems im Ruhesystem des  $\rho$  nicht durch eine kugelsymmetrische Verteilung gegeben sondern, durch die Kugelflächenfunktion  $Y_{\ell=1}^{m_{\ell}=1}(\theta, \phi)$ :

$$\mathcal{P}(\theta, \phi) \sim |Y_1^1(\theta, \phi)|^2 = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta$$

Die Analyse der Winkelverteilung der Zerfallsteilchen relativ zur Flugrichtung des Mutterteilchens erlaubt also die Bestimmung des Spins des zerfallenden Mutterteilchens.

## V.3 Innere Symmetrien und Ladungserhaltung

Im Folgenden werden Phasentransformationen diskutiert. Die Invarianz eines Systems (repräsentiert durch den Hamilton-Operator oder die Lagrangedichte) unter Phasentransformationen führt zur Erhaltung einer Ladung. Da Phasentransformationen ebenfalls kontinuierlich sind, sind die erhaltenen Ladungen additive Quantenzahlen.

### V.3.1 Eindimensionale Phasentransformationen

In der Regel ist die absolute Phase einer Wellenfunktion nicht beobachtbar. Entsprechend können globale Phasentransformationen durchgeführt werden, die das System invariant lassen:

$$\psi(\vec{r}, t) \rightarrow \psi'(\vec{r}, t) = e^{i\alpha} \psi(\vec{r}, t)$$

Nach dem Noether-Theorem ist die Invarianz des System unter der globalen Phasentransformation mit der Erhaltung einer „generalisierten“ Ladung (nicht unbedingt die elektrische Ladung) verbunden.

#### **Elektrische Ladungserhaltung**

Mit dem Operator der elektrischen Ladung  $\hat{Q}$ , wobei  $\hat{Q}|e^\pm\rangle = \pm|e^\pm\rangle$ , lässt sich die folgende globale Phasentransformation<sup>4</sup> definieren:

$$\hat{U} = \exp(i\alpha\hat{Q})$$

Wendet man  $\hat{U}$  auf den Zustand  $|\psi\rangle$  eines Teilchen mit Ladung  $Q_{el}$  an, so erhält man,

$$\hat{U}|\psi\rangle = \exp(i\alpha\hat{Q})|\psi\rangle = \exp(i\alpha Q_{el})|\psi\rangle,$$

wobei im letzten Schritt  $\hat{Q}|\psi\rangle = Q_{el}|\psi\rangle$  verwendet wurde. Ist der Hamilton-Operator invariant unter  $\hat{U}$ , so ist die Ladung  $Q_{el}$  erhalten. Ladungserhaltung gilt für alle Wechselwirkungen.

Beispiel:	$\pi^-$	$p$	$\rightarrow$	$\pi^0$	$\pi^+$	$\pi^-$	$n$	
	$Q_{el}$	-1	+1	$\rightarrow$	0	+1	-1	0

#### **Leptonzahlerhaltung**

Statt mit dem Operator der elektrischen Ladung kann man globale Phasentransformationen auch mit Operatoren, die als Eigenwerte andere verallgemeinert Ladungsquantenzahlen haben, wie beispielsweise die Leptonzahl  $\mathbf{L}$  oder die Baryonzahl  $\tilde{\mathbf{B}}$ , erzeugen. Die

<sup>4</sup>Neben globalen Phasentransformationen spielen auch lokale Transformationen, bei denen  $\alpha = \alpha(x)$  ist, eine wichtige Rolle in Eichtheorien. Die Forderung nach Invarianz unter der lokalen Transformation  $\hat{U} = \exp(i\alpha(x)\hat{Q})$  erzeugt in der QED die Kopplung  $Q_{el}$  an das Photon (Eichfeld), was die Identifikation von  $Q_{el}$  mit der elektrischen Ladung erlaubt.

Lagrangedichte des Standardmodells der Teilchenphysik ist invariant unter diesen beiden Phasentransformationen, so dass die entsprechenden Quantenzahlen erhalten sind.

Sieht man von der Neutrinooszillation ab, so sind alle experimentellen Befunde konsistent mit der Annahme von Leptonzahlerhaltung und zwar sowohl für jede Generation getrennt ( $\mathbf{L}_e, \mathbf{L}_\mu, \mathbf{L}_\tau$ ) als auch für die Summe der Leptonen  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_e + \mathbf{L}_\mu + \mathbf{L}_\tau$ . D.h. bei allen Prozessen gilt:

$$\sum_i \mathbf{L}_{e,i} = \text{const.}, \quad \sum_i \mathbf{L}_{\mu,i} = \text{const.}, \quad \sum_i \mathbf{L}_{\tau,i} = \text{const.}, \quad \sum_i \mathbf{L}_i = \text{const.}$$

Die Leptonzahl von Teilchen und Antiteilchen sind +1 und -1. So gilt für die Elektronleptonzahl:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_e(e^-) &= +1 & \mathbf{L}_e(\nu_e) &= +1 \\ \mathbf{L}_e(e^+) &= -1 & \mathbf{L}_e(\bar{\nu}_e) &= -1 \end{aligned}$$

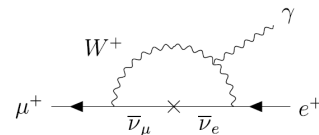
Alle anderen Teilchen haben eine Elektronleptonzahl von 0. Die Definitionen von  $\mathbf{L}_\mu$  und  $\mathbf{L}_\tau$  sind analog. Betrachtet man beispielsweise den Myonzerfall, so gilt:

	$\mu^-$	$\rightarrow$	$\nu_\mu$	$e^-$	$\bar{\nu}_e$
$\mathbf{L}_\mu$	+1		+1	0	0
$\mathbf{L}_e$	0		0	+1	-1
$\mathbf{L}$	+1		+1	+1	-1

Wie bereits bei der Einführung der Feynman-Graphen diskutiert wurde, ist die Leptonzahl an allen Vertices aller Wechselwirkungen erhalten. Neutrino-Oszillationen verletzen die Leptonzahl aber.

Unter Neutrino-Oszillation versteht man, dass ein Neutrino das als  $\nu_i$  erzeugt wird, nach einer gewissen Flugstrecke als Neutrino  $\nu_j$  nachgewiesen wird. Bei der Oszillation ist also sowohl die Leptonzahl  $\mathbf{L}_i$  als auch die Leptonzahl  $\mathbf{L}_j$  verletzt.  $\mathbf{L}$  ist hingegen erhalten. Das Phänomen der Neutrino-Oszillation ist mit einer endlichen Neutrinomasse und einer Mischung der Flavorzustände zu den propagierenden Massenzuständen verbunden<sup>5</sup>.

Berücksichtigt man die Möglichkeit von Neutrino-Oszillationen in Quanten-Loops, so kann man Prozesse konstruieren, die prinzipiell auch für geladene Leptonen die Leptonzahl verletzen. Ein solcher Prozess ist in der Abbildung gezeigt.

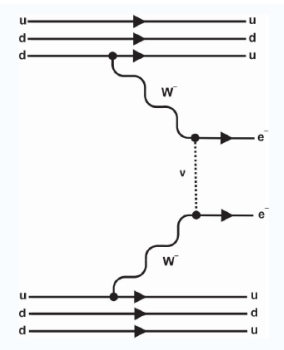


<sup>5</sup>In der ursprünglichen Formulierung des Standardmodells wurden Neutrinos als masselos angenommen. Damit waren Oszillationen ausgeschlossen. Es ist aber sehr einfach möglich, das Standardmodell um massive Neutrinos zu erweitern. Dann sind Neutrino-Oszillationen möglich.

Aufgrund der sehr kleinen Neutrinomassen sind diese Quanten-Loops aber extrem stark unterdrückt. Für den dargestellten leptonzahl-verletzenden Prozess  $\mu \rightarrow e\gamma$  findet man deshalb ein theoretisches Zerfallsverhältnis das unmessbar klein ist ( $< 10^{-52}$ ). Die Beobachtung eines leptonzahl-verletzenden Zerfalls wäre deshalb ein Anzeichen neuer physikalischer Effekte. Die Suche nach diesen Zerfällen ist Gegenstand aktueller Forschung auch in Heidelberg.

**Neutrinos: Dirac oder Majorana-Teilchen?**

Für die neutralen Neutrinos ist unklar, ob sie sogenannte Dirac-Fermionen sind, für die Teilchen und Anti-Teilchen verschieden sind, so wie das im Standardmodell angenommen wird. Neutrinos könnten auch Majorana-Fermionen sein, für die Teilchen und Anti-Teilchen gleich sind. Die Existenz von Majorana-Neutrinos wäre per se leptonzahl-verletzend. Eine experimentelle Signatur für die Majorana-Natur der Neutrinos ist der neutrinolose Doppelbeta-Zerfall, der ebenfalls leptonzahlverletzend ist. Die Abbildung zeigt einen Feynman-Graphen für einen neutrinolosen doppelten Beta-Zerfall zweier Neutronen. Die eingezeichnete innere Neutrino/Antineutrino-Linie ist im Standardmodell so nicht existent. Die Suche nach dem neutrinolosen Doppel-Beta-Zerfall ist ein sehr aktuelles Forschungsgebiet an dem auch Heidelberger Physiker beteiligt sind.



**Baryonenzahlerhaltung**

Die Baryonenzahl  $\tilde{B}$  ist für alle Hadronen definiert, und ist durch die Zahl  $n_q$  der Quarks mit Baryonenzahl  $+\frac{1}{3}$  und durch die Zahl der Anti-Quarks  $n_{\bar{q}}$  mit Baryonenzahl  $-\frac{1}{3}$  gegeben. Für ein Hadron ist die Baryonenzahl also:

$$\tilde{B} = \frac{n_q - n_{\bar{q}}}{3}$$

Damit tragen Baryonen wie  $p, n, \Lambda$   $\tilde{B} = +1$ , und Anti-Baryonen wie  $\bar{p}, \bar{n}, \bar{\Lambda}$  tragen  $\tilde{B} = -1$ . Mesonen haben  $\tilde{B} = 0$ .

Die Baryonenzahl ist wie die Leptonzahl und die Ladung eine additive Quantenzahl. Die Baryonenzahl ist in allen Prozessen, die das Standardmodell erlaubt, erhalten. So ist die Baryonenzahl beim folgenden Prozess sowohl im Anfangs als auch im Endzustand  $\tilde{B} = 2$ :

$$\begin{array}{cccccccc} & p & p & \rightarrow & p & \bar{p} & n & p & \pi^+ \\ \tilde{B} & +1 & +1 & & +1 & -1 & +1 & +1 & 0 \end{array}$$

Auch wenn bisher kein Prozess mit Baryonenzahlverletzung beobachtet wurde, so erlau-



ben GUT-Theorien (GUT: Grand Unified Theory) die Verletzung der Leptonzahl- und Baryonenzahl-Symmetrie bei sehr hohen Energien. Bei den bisher erreichbaren Energien könnte sich diese Verletzung durch den Zerfall des Protons manifestieren. Das Proton ist das leichteste Baryon und kann deshalb nicht zerfallen, ohne die Baryonenzahl zu verletzen. Ein möglicher baryonenzahl-verletzender Zerfall wäre  $p \rightarrow \pi^0 e^-$ . Bisher wurde aber kein Protonzerfall beobachtet. Das experimentelle Limit der Protonlebensdauer beträgt  $\gtrsim 10^{32}$  Jahre, was im Vergleich zum Alter des Universums ( $13 \cdot 10^9$  Jahre) eine extrem große Lebensdauer ist. Experimentell konnte man dieses Limit durch die Beobachtung einer sehr großen Zahl von Protonen erhalten.

### V.3.2 Mehrdimensionale Phasentransformationen und Isospin-Symmetrie

Ausgehend vom Spin wird im folgenden Abschnitt das Isospinkonzept für Hadronen eingeführt. Die zugrundeliegenden mehrdimensionalen Transformationen sind Elemente einer Gruppe, die in der Mathematik als  $SU(2)$  bezeichnet wird, im Gegensatz zu den eindimensionalen Phasentransformationen der Gruppe  $U(1)$ , die der Ladungserhaltung zugrunde liegen.

#### Spin für nicht relativistische Elektronen

Für nicht relativistische Spin- $\frac{1}{2}$  Teilchen kann man den Teilchenspin durch einen 2-dimensionalen Spinor beschreiben, so dass man dann für die Wellenfunktion eines Elektrons, das sich mit Wahrscheinlichkeit  $a^2$  im Spin-Up und mit der Wahrscheinlichkeit  $b^2$  im Spin-Down Zustand befindet, die folgende Darstellung erhält:

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \psi$$

wobei  $\psi$  die normierte Ortswellenfunktion des Teilchens ist. Ohne ein äußeres Magnetfeld ist der Spin des Teilchens nicht beobachtbar und das System ist invariant unter der 2-dimensionalen Transformation im Spinorraum:

$$\tilde{\psi} \rightarrow \tilde{\psi}' = \hat{U} \tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \hat{U} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \psi$$

Der Operator  $\hat{U}$  ist in dieser Darstellung eine  $2 \times 2$ -Matrix und gegeben durch:

$$\hat{U} = \exp \left( i \vec{\alpha} \frac{\vec{\sigma}}{2} \right) \quad \text{mit} \quad \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \text{Paulimatrizen}$$

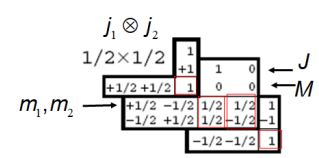
Der Gesamtspin des Teilchens und die dritte Komponente des Spins sind gleichzeitig beobachtbare Erhaltungsgrößen<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Die Pauli-Matrizen gehorchen der gleichen Algebra wie die Drehimpulsoperatoren  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$  und  $\hat{L}_z$  weshalb es ähnliche gleichzeitig messbare Erhaltungsgrößen gibt.

**Erinnerung: Kopplung von Spins**

Für Zustände mehrerer Teilchen kommt es wie in der Atomphysik zur Kopplung der Einzelspins zum Gesamtspin. Ein einfaches Beispiel ist der gebundene Zustand eines Elektrons und eines Positrons zu Positronium in dem die Spins  $|j_1, m_1\rangle = |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$  und  $|j_2, m_2\rangle = |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$  zum Gesamtspin  $J = 0$  (Singulett) bzw.  $J = 1$  (Triplet) koppeln:

$$J = 1 : \begin{cases} |1, +1\rangle = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle) \\ |1, -1\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{cases}$$



$$J = 0 : |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle)$$

Allgemein können die Spinzustände  $|j_1, m_1\rangle$  und  $|j_1, m_2\rangle$  zweier Teilchen zu einem Gesamtspin  $|J, M; j_1, j_2\rangle$  koppeln (s. a. Kapitel I):

$$|J, M; j_1, j_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M, j_1, j_2 \rangle |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$$

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten  $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M, j_1, j_2 \rangle$  sind reelle Koeffizienten. Sie sind gleich null, wenn die Bedingungen der Drehimpulsaddition

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \quad \text{und} \quad M = m_1 + m_2$$

nicht erfüllt ist. Die Koeffizienten sind tabelliert - ein Beispiel für die Kopplung der beiden Spins im Positronium ist in der Abbildung gegeben.

**Starker Isospin - verallgemeinerter Spin**

Der starke Isospin ist eine Symmetrie, die von Heisenberg 1932 vorgeschlagen wurde, zu einer Zeit in der Aufbau der Hadronen aus Quarks noch nicht bekannt war. Das Konzept führte zusammen mit einer weiteren Quantenzahl, der Strangeness, zu einem ersten Ordnungskonzept von Hadronen und dann in Folge zum statischen Quarkmodell. Die Erhaltung des starken Isospins spielt bei der Diskussion starker Hadronzerfälle sowie in der Kernphysik noch immer ein wichtige Rolle. Auf dem Quarklevel wird der Isospin aber heute durch die Quarkflavor-Quantenzahl abgelöst.

Da die starke Wechselwirkung (Kernkraft) nicht zwischen Proton und Neutron unterscheidet, und Proton und Neutron fast ähnliche Massen besitzen, schlug Heisenberg vor, Proton und Neutron für die starke Wechselwirkung als zwei Zustände des gleichen Teilchens zu betrachten. In Analogie zu einem Elektron, das als Spin-Up bzw. Spin-Down Zustand existiert, nannte er die damit verbunden Quantenzahl Isospin. Das Konzept macht natürlich nur Sinn, wenn man die elektromagnetische Wechselwirkung ignoriert, für die die Isospin-Symmetrie gebrochen ist. Weiterhin muss man für diese Symmetrie

den kleinen Massenunterschied zwischen Proton und Neutron ignorieren, der die Symmetrie ebenfalls bricht.

Unter diesen Voraussetzungen kann man das Proton als einen Zustand im Isospin-Raum mit  $|I, I_3\rangle = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$  und das Neutron als einen Zustand mit  $|I, I_3\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$  betrachten. Die starke Wechselwirkung ist invariant unter Isospin-Transformationen  $\hat{U}$  im zweidimensionalen Isospin-Raum:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \hat{U} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \hat{U} = \exp\left(i\vec{\alpha} \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \quad \text{und} \quad |p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Invarianz heißt, dass die starke Wechselwirkung den Isospin erhält. Aufgrund der zugrundeliegenden Drehimpuls-Algebra sind der Isospin  $I$  und seine dritte Komponente  $I_3$  gleichzeitig beobachtbare Erhaltungsgrößen und additive Quantenzahlen.

Ähnlich wie  $(p, n)$  die Zustände eines Isospin-Dubletts ( $I = \frac{1}{2}$ ) sind, kann man auch die drei Pion-Zustände ( $\pi^+, \pi^0, \pi^-$ ) als Zustände eines Isospin  $I = 1$  Triplets auffassen:

$$\pi(I = 1) : \begin{cases} \pi^+ : & |I = 1, I_3 = +1\rangle \\ \pi^0 : & |I = 1, I_3 = 0\rangle \\ \pi^- : & |I = 1, I_3 = -1\rangle \end{cases}$$

Aufgrund der Analogie zum Spin stellt sich die Frage, ob ebenfalls ein  $I = 0$  Singulett-Partner zum Pion existiert. In der Tat findet man das  $\eta$ -Meson mit  $|I = 0, I_3 = 0\rangle$ .

### Isospin für zusammengesetzte Systeme (Isospin-Kopplung)

Aufgrund der Analogie zum Spin und der zugrundeliegenden Drehimpuls-Algebra folgt die Kopplung des Isospins zweier Teilchen zum Gesamtisospin den Regeln der Drehimpulse. Das wird im Folgenden am Beispiel eines 2-Nukleonensystems nochmals diskutiert.

2-Nukleonensystem:  $NN'$  mit  $N, N' = p, n$  wobei  $p = |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$  und  $n = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

Aufgrund der Analogie zum Positronium gibt es sowohl Triplett-Zustände mit  $I = 1$ , als auch Singulett-Zustände mit  $I = 0$ :

$$I = 1 : \begin{cases} I_3 = +1 : & |p\rangle|p\rangle \\ I_3 = 0 : & \frac{1}{\sqrt{2}} (|p\rangle|n\rangle + |n\rangle|p\rangle) \\ I_3 = -1 : & |n\rangle|n\rangle \end{cases}$$

$$I = 0 : \quad I_3 = 0 : \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (|p\rangle|n\rangle - |n\rangle|p\rangle)$$

Berücksichtigt man das Neutron und Proton für die starke Wechselwirkung identische Teilchen so hat die Wellenfunktion  $\psi$  des  $NN'$ -Systems einen Raum-, Spin- und Isospin-Anteil und lautet:

$$\psi = \phi_{\text{Raum}} \cdot \chi_{\text{Spin}} \cdot \xi_{\text{Isospin}}$$

Die Wellenfunktion muss antisymmetrisch gegen Vertauschung der beiden Nukleonen sein. Betrachtet man das Deuteron  $d^+$  (pn-Kern), für das man einen relativen Bahndrehimpuls der beiden Nukleonen von  $\ell = 0$  findet und einen Gesamtspin  $J = 1$  sind  $\phi_{\text{Raum}}$  und  $\chi_{\text{Spin}}$  symmetrisch gegen Vertauschung, so dass  $\xi_{\text{Isospin}}$  anti-symmetrisch sein muss. D.h., das Deuteron  $d^+$  ist der obige Singulett-Zustand mit Isospin  $I = 0$  und  $I_3 = 0$ .

Die Isospin-Erhaltung in der starken Wechselwirkung kann man zur Abschätzung von Verhältnissen von Wirkungsquerschnitten oder Reaktionsraten starker Prozesse nutzen. Als Beispiel betrachten wir im Folgenden die starke Wechselwirkung von jeweils zwei Nukleonen miteinander:

$$\begin{array}{l} \text{Reaktion 1:} \\ p \quad + \quad p \quad \rightarrow \quad d^+ \quad + \quad \pi^+ \\ I = \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad \quad \quad 0 \quad \quad 1 \\ I_3 = \quad +\frac{1}{2} \quad + \quad +\frac{1}{2} \quad \quad \quad 0 \quad \quad +1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Reaktion 2:} \\ p \quad + \quad n \quad \rightarrow \quad d^+ \quad + \quad \pi^0 \\ I = \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad \quad \quad 0 \quad \quad 1 \\ I_3 = \quad +\frac{1}{2} \quad - \quad \frac{1}{2} \quad \quad \quad 0 \quad \quad 0 \end{array}$$

Während für den pp-Anfangszustand in Reaktion 1 nur die Möglichkeit  $|I, I_3\rangle = |1, +1\rangle$  existiert, kann das pn-System in Reaktion 2 sowohl in einem  $|1, 0\rangle$ -Zustand als auch in einem  $|0, 0\rangle$ -Zustand sein. Da der Endzustand ein  $|1, 0\rangle$ -Zustand ist, trägt aufgrund der Isospinerhaltung in der starken Wechselwirkung der  $|0, 0\rangle$ -Anteil des Anfangszustandes nicht bei. Für das Verhältnis der beiden Wirkungsquerschnitte findet man deshalb<sup>7</sup>.

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{|\langle I = 1, I_3 = 0 | \hat{H}_{\text{WW}} | pn \rangle|^2}{|\langle I = 1, I_3 = 1 | \hat{H}_{\text{WW}} | pp \rangle|^2} = \frac{|\langle I = 1, I_3 = 0 | pn \rangle|^2}{|\langle I = 1, I_3 = 1 | pp \rangle|^2} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

In diesem Fall war die Rechnung einfach, weil man aus den obigen Nukleon-Zuständen leicht sieht, dass  $|pn\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle + |0, 0\rangle)$ . Im allgemeinen Fall muss man die entsprechenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten benutzen.

### Strangeness und Strangeness-Erhaltung in der starken Wechselwirkung:

Strangeness wurde als eine zusätzliche Quantenzahl zur Charakterisierung von Hadronen eingeführt nach dem man Teilchen entdeckt hatte, die eine verhältnismäßig lange Lebensdauer aufwiesen (heute wissen wir, dass die Lebensdauer dadurch bedingt ist, dass diese Teilchen nur schwach zerfallen können) und eine sehr charakteristische V-artige Zerfallssignatur aufweisen. Aufgrund beider Eigenschaften hat man sie als „seltsam“ (engl. strange) bezeichnet und eine neue Quantenzahl eingeführt. Beispiele für „seltsame“ Teilchen sind das  $\Lambda^0$  und das  $K^0$ :

$$\begin{array}{l} \Lambda^0 \quad \rightarrow \quad p \quad + \quad \pi^- \\ K^0 \quad \rightarrow \quad \pi^+ \quad + \quad \pi^- \end{array}$$

<sup>7</sup>Der Anteil des Wechselwirkungsoperator  $\hat{H}_{\text{WW}}$ , der auf die Isospinzustände wirkt, ist die Identität **1**.

Eine genaue Untersuchung von Produktion und Zerfall dieser Teilchen hat die folgende Zuordnung der Strangeness-Quantenzahl  $S$  ergeben:

Teilchen	$K^0$	$\bar{K}^0$	$K^+$	$K^-$	$\Lambda$	$\bar{\Lambda}$
$S =$	+1	-1	+1	-1	-1	+1

Nach unserem heutigen Verständnis enthalten diese Teilchen ein  $s$ -Quark ( $S = -1$ ) oder ein  $\bar{s}$ -Quark ( $S = +1$ )<sup>8</sup>. Teilchen wie Proton, Neutron oder Pion, die keine  $s$ -Quarks enthalten, haben daher  $S = 0$ . Berücksichtigt man diese neue additive Quantenzahl, so findet man, dass die obigen beiden schwachen Zerfälle des  $\Lambda$  und des  $K^0$  die Strangeness nicht erhalten.

Genau wie der Isospin ist die Strangeness aber in starken Prozessen eine Erhaltungsgröße. Ein Beispiel ist die paarweise Erzeugung seltsamer Teilchen in starken Prozessen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 p & + & \pi^- & \rightarrow & \Lambda & + & K^0 \\
 S = & 0 & & & 0 & & 0 \\
 & & & & -1 & & +1
 \end{array}$$

Auf dem Quarklevel werden in der starken  $p\pi^-$ -Wechselwirkung  $s$  und  $\bar{s}$ -Quark paarweise erzeugt.

### Isospin- und Strangeness in verschiedenen Wechselwirkungen

Isospin und Strangeness sind in der **starken Wechselwirkung** erhalten. Beide Quantenzahlen sind in der **schwachen Wechselwirkung** keine Erhaltungsgrößen. Für die Strangeness wurde das oben bereits mit den schwachen Zerfällen von  $\Lambda$  und  $K^0$  gezeigt. Für den Isospin wird dieser Sachverhalt durch den schwachen Zerfall des Neutrons eindrücklich illustriert:  $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$  ( $I_3 = -\frac{1}{2} \rightarrow I_3 = +\frac{1}{2}$ ). Auf dem Quarklevel ist die Verletzung unmittelbar klar, da hier durch die schwache Wechselwirkung ein  $d$ - bzw.  $s$ -Quark in ein  $u$ -Quark übergeht. Die Quarks haben die folgenden Quantenzahlen:

	$I$	$I_3$	$S$
$u$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0
$d$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$s$	0	0	-1

Für die **elektromagnetische Wechselwirkung** ist die Isospin-Symmetrie keine sinnvolle Symmetrie, da sie die Ladung der Teilchen ignoriert. Der Isospin  $I$  ist deshalb nicht erhalten. Aufgrund der Ladungserhaltung und einer Beziehung zwischen Ladung und  $I_3$  die in der Gell-Mann–Nishijima Formel<sup>9</sup> zum Ausdruck kommt, findet man aber, dass die elektromagnetische Wechselwirkung  $I_3$  unverändert lässt. Strangeness ist ebenfalls in der elektromagnetischen Wechselwirkung erhalten.

<sup>8</sup>Die Zuordnung  $S(s) = -1$  und  $S(\bar{s}) = +1$  ist historisch und etwas verwirrend.

<sup>9</sup>Die Gell-Mann–Nishijima Formel verknüpft Baryonzahl, Isospin Strangeness und elektrische Ladung (in Einheiten von  $e$ ):  $Q = I_3 + \frac{1}{2} (\tilde{B} + S)$ .

**The eightfold Way und das statische Quarkmodell - wurde nicht behandelt**

Die Einführung der Quantenzahlen Isospin und Strangeness war für das Verständnis der Hadronen und ihrem Aufbau aus Quarks von großer Bedeutung. In den 1950er Jahren nahm die Zahl der neu entdeckten Hadronen sehr stark zu, und es war lange Zeit schwierig, eine Systematik in diesen Teilchen zu entdecken.

Die beiden Physiker M. Gell-Mann und Y. Ne'eman schlugen 1961 unabhängig von einander ein Ordnungsschema vor, in dem sie Isospin und Strangeness als ordnende Quantenzahlen verwendet haben. Die Hadronen bilden in diesem Schema Multiplett-Zustände. Abbildung V.1 zeigt für die Spin-0 Mesonen sowie für die Spin- $\frac{1}{2}$  Baryonen die Anordnung im Isospin-Strangeness-Raum. Beide Physiker erkannten, dass sich die Oktett-Zustände durch entsprechende Symmetrie-Operationen (SU(3)-Transformationen) ineinander überführen lassen. Das neue Ordnungsschema erlaubte Gell-Mann und Ne'eman die Vorhersage eines neuen Teilchens ( $\Omega^-$  mit  $S = -3$  und  $I_3 = 0$ ) das 1964 tatsächlich entdeckt wurde.

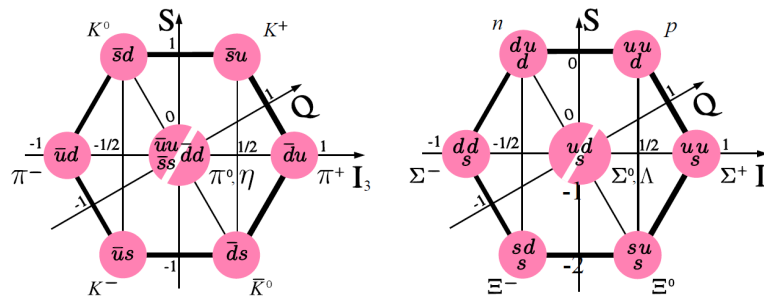


Abbildung V.1: Meson (Spin 0) und Baryon (Spin  $\frac{1}{2}$ ) Oktetts im Isospin ( $I_3$ ) Strangeness  $S$  Raum. Quelle: Wikipedia

Durch eine Analyse der zugrunde liegenden Symmetriegruppe mit ihren 8 Generatoren, die die Teilchen ineinander überführen („eightfold way“), erkannte Gell-Mann (1964), dass man die bekannten Hadron-Multipletts realisieren kann, in dem man die Hadronen aus drei verschiedenen Quark und Antiquark (Mesonen) bzw. drei Quarks (Baryonen) (u,d,s) zusammensetzt. Beim Namen „Quarks“ für diese Bestandteile wurde er durch das Buch Finnegans Wake von J.Joyes inspiriert, in dem es heißt: „Three quarks for Muster Mark“. G.Zweig kam zur gleichen Zeit zum gleichen Modell. Der Aufbau der Hadronen aus Valenzquarks, die die Quantenzahlen der Hadronen festlegen, wird häufig als statisches Quarkmodell bezeichnet da es alleine auf den beobachteten Quantenzahlen beruht. Gell-Mann erhielt für seine Arbeiten 1969 den Nobelpreis.

Die SU(3) Symmetrie hat später, bei der Entwicklung der Quanten-Chromodynamik, wieder eine wichtige Rolle gespielt: Hier entsprechen die 8 Generatoren der Symmetriegruppe gerade den 8 Gluonzuständen der Wechselwirkung.

## V.4 Diskrete Transformationen - Multiplikative Quantenzahlen

Bisher wurden kontinuierliche Symmetrien besprochen. Die entsprechenden Transformationen (z.B. Drehungen) konnten beliebig klein gewählt werden und führten zu additiven Quantenzahlen wie Spin und Isospin. Im Folgenden werden nun drei Beispiele für diskrete Symmetrien besprochen, die mit Operatoren  $\hat{U}_D$  verbunden sind für die gilt:

$$\hat{U}_D^2 = 1$$

Die Operatoren sind hermetisch und unitär und Invarianz unter  $\hat{U}$  führt zu multiplikativen Erhaltungsgrößen, bei denen das Produkt der Quantenzahlen invariant ist:

mit  $\hat{U}_D|\psi_{a,b}\rangle = u_{a,b}|\psi_{a,b}\rangle \rightarrow$  für 2-Teilchen:  $\hat{U}_D|\psi_a\psi_b\rangle = \hat{U}_D|\psi_a\rangle\hat{U}_D|\psi_b\rangle = u_a u_b |\psi_a\psi_b\rangle$

### V.4.1 Paritätsoperation

Die Paritätsoperation oder Raumspiegelung  $\hat{P}$  ändert das Vorzeichen von Vektoren,

$$\vec{x} \xrightarrow{\hat{P}} -\vec{x} \quad \vec{p} \xrightarrow{\hat{P}} -\vec{p},$$

aber lässt Axialvektoren wie Drehimpuls  $\vec{L}$  oder Spin  $\vec{S}$  invariant:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \xrightarrow{\hat{P}} \vec{L} = -\vec{r} \times -\vec{p}$$

Der Paritätsoperator ist ein Beispiel für eine diskrete Transformation,  $\psi'(\vec{r}) = \hat{P}\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$  mit  $\hat{P}^2 = 1$ .

Bei Invarianz eines Systems unter  $\hat{P}$ , d.h.  $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$ , sind also sowohl  $|\psi\rangle$  als auch  $\hat{P}|\psi\rangle$  Eigenfunktionen von  $\hat{H}$  und wegen  $\hat{P}^2 = 1$  findet man:

$$\hat{P}|\psi\rangle = \eta_P|\psi\rangle \quad \text{mit} \quad \eta_P = \pm 1$$

Je nach Wert von  $\eta_P$  spricht man von gerader ( $\eta_P = +1$ ) oder ungerader Parität ( $\eta_P = -1$ ) der Wellenfunktion.

Die Paritätserhaltung bei elektromagnetischen Prozessen kann man mit einem Beispiel aus der Atomphysik illustrieren: Ein angeregtes Atom  $A^*$  geht durch Aussendung eines Photons in seinen Grundzustand. Für elektromagnetische Dipolstrahlung gilt die Auswahlregel  $\Delta\ell = \pm 1$ . Berücksichtigt man ferner dass die Parität der Wellenfunktionen durch die Parität des winkelabhängigen Wellenanteils  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$  gegeben ist und  $\hat{P}Y_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \phi)$  so findet man wegen  $\Delta\ell = \pm 1$ :

$$\begin{array}{rcl} A^* & \rightarrow & A \quad + \quad \gamma \\ \eta_p(A^*) & = & \eta_p(A) \cdot \eta_p(\gamma) \end{array}$$

Aufgrund der Auswahlregel folgt  $\eta_p(A) = (-1) \cdot \eta_p(A^*)$ , so dass sich für das Photon die Parität  $\eta_p(\gamma) = -1$  ergibt<sup>10</sup>. Das Photon hat also eine Eigenparität (oder innere Parität) von -1.

Analog zum Photon kann man allen Hadronen eine Eigenparität zuordnen. Es stellt sich aber heraus, dass die relative Parität zweier Teilchen nicht eindeutig bestimmbar ist, wenn die Teilchen nicht die gleichen additiven Quantenzahlen (Isospin, Strangeness, etc.) besitzen. Man muss deshalb für einige Teilchen die Eigenparitäten festlegen:

$$\eta_p(p) = \eta_p(n) = \eta_p(\Lambda) = \eta_P(\Lambda_c) = \eta_p(\Lambda_b) = +1$$

Für die fundamentalen Fermionen wird die Eigenparität ebenfalls auf +1 festgelegt. Die Parität der Anti-Fermionen ergibt sich dann zu -1.

Unter der Annahme von Paritätserhaltung kann man dann die Parität aller anderen Teilchen ermitteln, in dem man Teilchenzerfälle analysiert. Zerfällt ein Teilchen  $T \rightarrow 1+2$  in einem paritätserhaltenden Prozess (s.u.), so lässt sich die Eigenparität von T aus den Eigenparitäten von Teilchen 1 und 2 ermitteln, wenn man den relativen Drehimpuls  $\ell$  zwischen den beiden Endzustandsteilchen berücksichtigt<sup>11</sup>:

$$\eta_p(T) = \eta_P(1) \cdot \eta_P(2) \cdot (-1)^\ell$$

Spin  $J$  und die Eigenparität eines Teilchens werden häufig zusammen angegeben:

$$J^P(\pi^+) = 0^- , \quad J^P(\pi^0) = 0^- , \quad J^P(p) = \frac{1}{2}^+ , \quad J^P(n) = \frac{1}{2}^+$$

Die Parität ist in der **elektromagnetischen und starken Wechselwirkung erhalten**. Die **schwache Wechselwirkung verletzt** die Parität maximal - dies wird im Abschnitt 4.4 ausführlich diskutiert.

#### V.4.2 C-Parität oder Ladungskonjugation

Die C(charge)-Parität oder auch Ladungskonjugation kehrt das Vorzeichen aller ladungsartigen Quantenzahlen ( $Q_{el}, L_e, L_\mu, L_\tau, I_3, \vec{B}, S, \dots$ ) um, und erzeugt damit ein Anti-Teilchen:

$$\hat{C}|\text{Teilchen}\rangle = \eta_C|\text{Antiteilchen}\rangle$$

Im allgemeinen sind Teilchen und Antiteilchen verschieden, und  $\eta_C$  ist kein Eigenwert sondern eine beliebige Phase. Teilchen, die ihr eigenes Antiteilchen sind (z.B. Photonen

<sup>10</sup>Diese Argumentation setzt voraus, dass es keinen relativen Drehimpuls zwischen dem Photon und A gibt.

<sup>11</sup>Die relative Raumwellenfunktion von Teilchen 1 und 2 hat eine Parität die vom Winkelanteil  $Y_\ell^m$  abhängt und gerade  $(-1)^\ell$  beträgt.



oder  $\pi^0$ ) sind Eigenzustände des  $\hat{C}$ -Operators. Da  $\hat{C}^2 = 1$  muss für diese Teilchen  $\eta_C = \pm 1$  sein.

Da sich bei Anwendung von  $\hat{C}$  auf elektrische und magnetische Felder aufgrund der Ladungsumkehr auch die Felder umkehren, findet man für das Photon  $\hat{C}|\gamma\rangle = (-1) \cdot |\gamma\rangle$ , d.h.  $\eta_C(\gamma) = -1$ . Da die Ladungskonjugation ebenfalls multiplikativ ist, lässt sich damit die C-Parität des  $\pi^0$  aus dem Zerfall  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  bestimmen:

$$\begin{array}{rcccl} \pi^0 & \rightarrow & \gamma & + & \gamma \\ C & +1 & = & (-1) & \cdot & (-1) \end{array}$$

Die elektromagnetische und die starke Wechselwirkung sind invariant unter  $\hat{C}$ , d.h. die C-Parität ist in der **elektromagnetischen und starken Wechselwirkung erhalten**. Die **schwache Wechselwirkung verletzt** die C-Parität maximal (s.a. 4.4).

Ein Beispiel für einen Test der C-Erhaltung in der elektromagnetischen Wechselwirkung ist die Suche nach dem C-verletzenden elektromagnetischen Zerfall  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma$  (der Endzustand hätte  $\eta_C = (-1)^3 = -1$ ). Bisher wurde kein solcher Zerfall nachgewiesen und das obere Limit für den Zerfall beträgt

$$\frac{\Gamma(\pi^0 \rightarrow 3\gamma)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)} < 3.1 \cdot 10^{-8}$$

### V.4.3 Zeitumkehr T

Im Gegensatz zur Parität und C-Parität ist der Zeitumkehr-Operator  $\hat{T}$  nicht unitär<sup>12</sup> und es ist keine Erhaltungsgröße damit verknüpft. Trotzdem ist die Invarianz unter der Zeitumkehr eine wichtige Symmetrie.

Die Zeitumkehroperation  $\hat{T}$  ist formal definiert als

$$t \xrightarrow{\hat{T}} -t \quad \vec{x} \xrightarrow{\hat{T}} \vec{x}$$

Als Folge der Zeitumkehr ändern auch Impulse, Drehimpulse, Ströme und B-Felder ihr Vorzeichen:

$$\begin{array}{ll} \vec{p} \xrightarrow{\hat{T}} -\vec{p} & \vec{L} \xrightarrow{\hat{T}} -\vec{L} \\ \vec{E} \xrightarrow{\hat{T}} \vec{E} & \vec{B} \xrightarrow{\hat{T}} -\vec{B} \end{array}$$

In der Quantenmechanik ist die Zeitumkehrtransformation durch  $\hat{T}\psi(\vec{r}, t) = \psi^*(\vec{r}, -t)$  gegeben:

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{p}\vec{x}/\hbar - Et/\hbar)} \xrightarrow{\hat{T}} \psi^*(\vec{r}, -t) = e^{i(-\vec{p}\vec{x}/\hbar - Et/\hbar)}$$

<sup>12</sup>der Zeitumkehr-Operator  $\hat{T}$  ist anti-unitär.

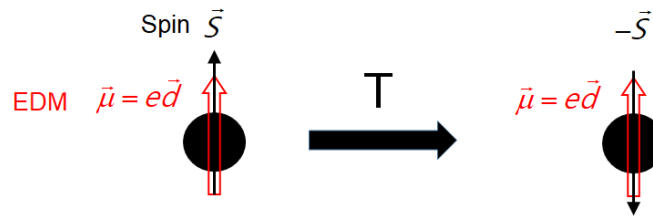


Abbildung V.2: T-Verletzung: Ein endliches elektrisches Dipolment (EDM) eines Elementarteilchens verletzt die T-Symmetrie.

Die elektromagnetische und die starke Wechselwirkung sind invariant unter  $\hat{T}$ . Die schwache Wechselwirkung verletzt  $\hat{T}$ .

Test der T-Invarianz: Suche nach elektrischem Dipolmoment(EDM)des Neutrons

Ein elektrisches Dipolmoment  $\vec{\mu}_{el} = e\vec{d}$  eines Elementarteilchens muss parallel zum Spin  $\vec{S}$  des Teilchens ausgerichtet sein, da der Spin bei einem Elementarteilchen die einzige ausgezeichnete Richtung ist. Wendet man nun den Zeitumkehroperator auf die beiden Observablen  $\vec{\mu}_{el}$  und  $\vec{S}$  an, so findet man, da der Spin  $\vec{S}$  ein Drehimpuls ist, der unter Zeitumkehr sein Vorzeichen wechselt,

$$\begin{matrix} \vec{\mu}_{el} = e\vec{d} & \xrightarrow{\hat{T}} & \vec{\mu}_{el} = e\vec{d} \\ \vec{S} & \xrightarrow{\hat{T}} & -\vec{S} \end{matrix}$$

Existiert also ein endliches EDM  $\vec{\mu}_{el}$ , so beobachtet man unter Zeitumkehr einen Flip der realtiven Ausrichtung von Spin und EDM (die Observable  $\vec{\mu}_{el}\vec{S}$  verletzt die Zeitumkehrinvarianz). Ein endliches EDM verletzt also die T-Symmetrie. Abbildung V.2 zeigt diesen Sachverhalt nochmals anschaulich. Die besten experimentellen Grenzen konnten bisher für das elektrische Dipolmement des Elektons ( $ed < 1.1 \cdot 10^{-29} \text{ecm}$ ) und des Neutrons ( $ed < 1.8 \cdot 10^{-26} \text{ecm}$ ) bestimmt werden. Viele Erweiterungen des Standardmodells sagen ein signifikantes Neutron-EDM voraus. Die Suche nach EDMs von Elementarteilchen ist ein aktuelles Forschungsgebiet auch in Heidelberg.

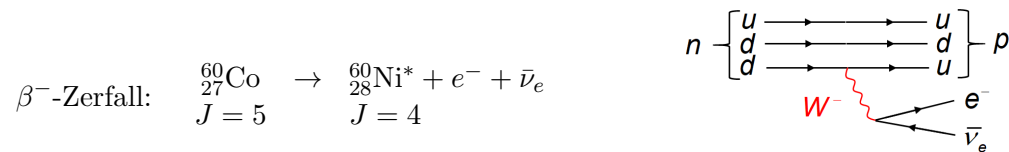
V.4.4 Paritätsverletzung im  $\beta$ -Zerfall

Die C, P und T-Invarianz der Wechselwirkungen war lange Zeit ein „ungeprüftes Dogma“ der Physik. Nachdem aber T.D. Lee and C.N. Yang 1956 die Möglichkeit von Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung vorgeschlagen hatten, gelang C.S. Wu noch im gleichen Jahr der Nachweis, dass die Parität in der Tat im radioaktiven  $\beta$ -Zerfall verletzt ist. Der folgende Abschnitt behandelt das Wu-Experiment und liefert basierend auf unserem heutigen Wissen eine Interpretation der Resultate.

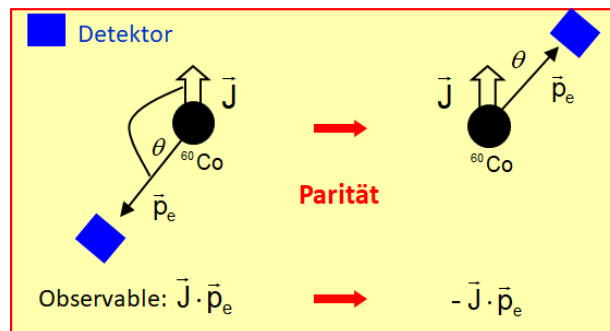
**Wu-Experiment zur Paritätsverletzung**<sup>13</sup>

<sup>60</sup>Co-Atome mit einem Kernspin von  $J = 5$  wurden bei einer sehr niedrigen Temperatur von etwa 10 mK in einem Magnetfeld polarisiert, so dass ihre Spins parallel zum Magnet (positive z-Richtung) zeigen. Die experimentelle Herausforderung bestand hierbei darin, eine möglichst hohe Spinpolarisation der <sup>60</sup>Co-Kerne zu erzielen. Aufgrund des sehr geringen magnetischen Moments der Kerne sind dazu sehr niedrige Temperaturen und hohe Magnetfelder notwendig. Um die notwendigen 10 mK zu erreichen, musste man sich einer spezielle Methode bedienen<sup>14</sup>.

Das polarisierte Co-Isotop zerfällt in einem  $\beta^-$ -Zerfall zu angeregtem <sup>60</sup>Ni\*<sup>15</sup> mit einem Kernspin  $J = 4$ :



Mit einem Szintillationszähler werden die entstehenden Elektronen unter einem Winkel  $\theta$  detektiert und die Rate gemessen. Zusammen mit dem Spinvektor  $\vec{J}$  des Co bildet der Impulsvektor  $\vec{p}_e$  des Elektrons eine Observable  $\vec{J} \cdot \vec{p}_e$  die unter Paritätstransformation in die Variable  $-\vec{J} \cdot \vec{p}_e$  übergeht. Das ist anschaulich in der folgenden Abbildung gezeigt - die rechte Seite zeigt die „paritätsgespiegelte“ Version des Experiments der linken Seite:



Die Parität ist verletzt, wenn die mit dem Detektor in den beiden Konfigurationen gemess-

<sup>13</sup>C.S. Wu et al. in Phys. Rev. 105 (1957) 1413

<sup>14</sup>Die Co-Atom wurden hierzu in ein paramagnetisches Salz (CeMg-Nitrat) mit anisotroper magnetischer Suszeptibilität eingelagert und in einem Kryostaten durch flüssiges Helium auf eine Temperatur von etwa 1.2 Kelvin gekühlt. Das Salz wurde durch ein Magnetfeld entlang der Achse mit der größeren Suszeptibilität magnetisiert und anschließend adiabatisch entmagnetisiert, was eine Temperatursenkung bewirkte. Anschließend wurde das Salz entlang der Richtung der niedrigeren Suszeptibilität (z-Richtung) magnetisiert. So konnte ein Polarisationsgrad der <sup>60</sup>Co-Kerne von ca. 60 % bei einer Temperatur von 10 mK erreicht werden.

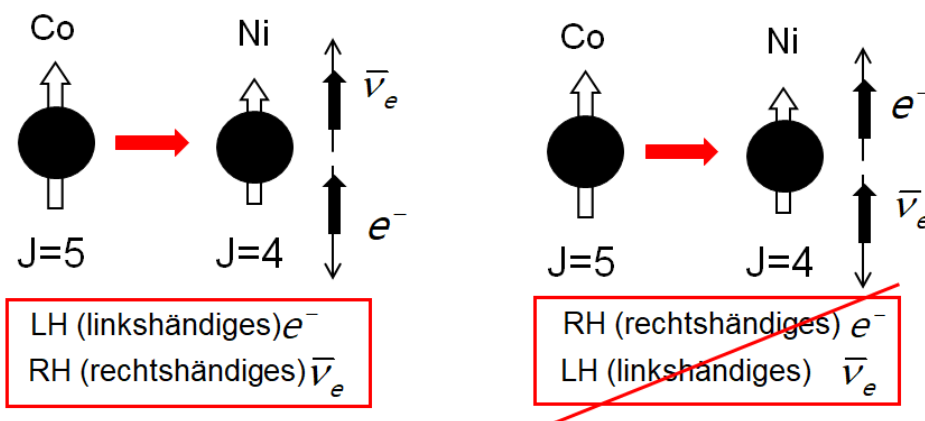
<sup>15</sup>Die Anisotropie der  $\gamma$ -Strahlung beim Übergang in den Grundzustand <sup>60</sup>Ni\*  $\rightarrow$  <sup>60</sup>Ni +  $\gamma$  wurde zur Messung der Polarisation des Co bzw. Ni genutzt.

senen  $\beta^-$ -Raten unterschiedlich sind. Es stellt dabei sich als experimentell einfacher heraus, die Detektor Anordnung gleich zu lassen und stattdessen für die „paritätsgespielte“ Version den Spin des Co umzudrehen, in dem man die Richtung des Magnetfeldes umkehrt.

Im Experiment von C.S. Wu wurden für die beiden Konfigurationen unterschiedliche Raten messen: Die Elektronen werden bevorzugt entgegen der Spinrichtung des Co und damit entgegen der Magnetfeldrichtung emittiert. Die Parität ist also im betrachteten schwachen Zerfall des Co verletzt. Abbildung V.3 zeigt den Aufbau des Experiments sowie die Messresultate.

**Interpretation der Resultate:**

Das Resultat des Wu-Experiments kann man erklären, wenn man neben der Spin-Konfigurationen des Kerns auch die Spins der beiden Leptonen ( $e^-$ ,  $\bar{\nu}$ ) berücksichtigt und bedenkt, dass nicht alle Spin-Konfigurationen in der schwachen Wechselwirkung erlaubt sind. Das wird in der folgenden Abbildung getan:



Im Ruhesystem des Co-Kern fliegen Elektron und Anti-Neutrino mit entgegengesetztem Impuls auseinander. Der Einfachheit halber sei ihre Flugrichtung parallel zum Magnetfeld (im Experiment ist das auch die Richtung, in der der Anthracene-Detektor zum Nachweis der Elektronen angebracht ist). Die Drehimpulserhaltung - als Quantisierungsachse wählt man ebenfalls die Richtung des Magnetfeldes - lässt nur die beiden eingezeichneten Spin-Konfigurationen für die Leptonen zu: Die Summe der Lepton-Spins muss gerade die Differenz zwischen Co und Ni-Spin ergeben. Die Projektion des Spins auf die Impulsrichtung des Teilchens bezeichnet man als Helizität  $H = \vec{S}\vec{p}/|\vec{p}|$ . Für ein Fermion ist die Teilchenhelizität immer  $\pm\frac{1}{2}$ . Die Helizität ist für massive Teilchen abhängig vom Bezugssystem<sup>16</sup>.

<sup>16</sup>Ich kann mich schneller als das massive Teilchen bewegen, dann sehe ich ein Teilchen, dass im Labor  $H = +\frac{1}{2}$  hat, in meinem Ruhesystem als  $H = -\frac{1}{2}$ .

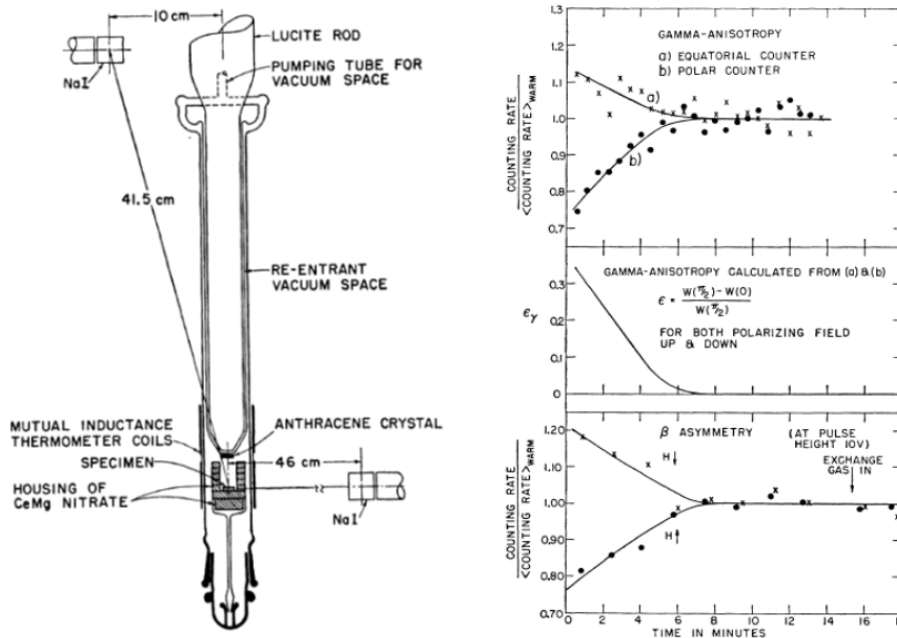


Abbildung V.3: Wu-Experiment: (links) experimenteller Aufbau. Der Anthracen-Szintillator direkt über der Probe dient zur Messung der Elektronen; Die beiden NaJ-Zähler wurden zur Messung der Anisotropie der entstanden  $\gamma$ -Strahlung benutzt (wird hier nicht diskutiert). (rechts) Messergebnisse. Der obere Plot zeigt die gemessenen Anisotropien der  $\gamma$  Strahlung als Funktion der Zeit - Man detektiert unterschiedliche Zählraten für den vertikalen und den horizontalen NaJ-Zähler. Hieraus kann man die Polarisation des Co ( $\approx 60\%$ ) berechnen. Die Anisotropie verschwindet mit der Zeit da sich die Co-Probe aufwärmt und die Polarisation dadurch verlorenght. Der unterste Plot zeigt die mit dem Anthracen gemessene Elektronenzählrate für die Magnetfeldausrichtung nach oben ( $\uparrow$ ) bzw. nach unten ( $\downarrow$ ). Zu Anfang der Messung, wenn die Polarisation des Co noch maximal ist, werden die Elektronen bevorzugt gegen die Magnetfeldrichtung emittiert (Rate höher für  $\downarrow$ -Feld). Mit der Spin-Polarisation verschwindet mit der Zeit auch die Vorzugsrichtung. (entnommen: C.S. Wu et al. in Phys. Rev. 105 (1957) 1413.)

Im Fall masseloser Teilchen entspricht die Helizität aber einer Teilcheneigenschaft, die man als Händigkeit des Teilchens (engl. Chirality) bezeichnet und die dem Teilchen eigen ist. Entsprechend einer Helizität von  $+\frac{1}{2}$  ( $-\frac{1}{2}$ ) spricht man für masselose Teilchen deshalb auch von rechtshändigen (RH) (linkshändigen, LH) Teilchen.

In einer Vielzahl von Experimenten konnte nachgewiesen werden, dass in einem schwachen Zerfall immer nur LH-Elektronen (Fermionen) bzw. RH-Positronen (Anti-Fermionen) entstehen. In einem weiteren wichtigen Experiment (Goldhaber, 1957) wurde gezeigt, dass die im  $\beta^-$ -Zerfall entstehenden  $\bar{\nu}_e$  (Anti-Fermionen) rechtshändig sind.

Heute gehen wir davon aus, dass in der schwachen Wechselwirkung immer nur LH-Fermionen und RH-Anti-Fermionen an die  $W^\pm$ -Austauschbosonen koppeln. Der in der obigen Abbildung rechts dargestellte Prozess ist also nicht möglich: Man erwartet deshalb, dass die Elektronen im Wu-Experiment, wie in der linken Abbildung gezeigt, bevorzugt gegen die B-Feldrichtung emittiert werden.

Bemerkung: Da die schwache Wechselwirkung die einzige Wechselwirkung ist, die die Neutrinos spüren, sieht das Standardmodell nur LH-Neutrinos und RH-Antineutrinos vor. Bisher unterstützen alle experimentellen Resultate diese Annahme<sup>17</sup>.

Die schwache Wechselwirkung verletzt sowohl die Paritätssymmetrie als auch die Symmetrie der Ladungskonjugation maximal (im Folgenden sei  $f, \bar{f}$ =(Anti)Fermion, sWW=schwache Wechselwirkung, No sWW=keine schwache Wechselwirkung über W-Bosonen):

$$\begin{aligned} f_L \text{ (sWW)} &\xrightarrow{\hat{P}} f_R \text{ (keine sWW)} \\ f_L \text{ (sWW)} &\xrightarrow{\hat{C}} \bar{f}_L \text{ (keine sWW)} \end{aligned}$$

Auf den ersten Blick scheint die schwache Wechselwirkung aber zumindest unter der kombinierten Symmetrie  $\hat{C}\hat{P}$  bzw.  $\hat{P}\hat{C}$  invariant zu sein:

$$\begin{aligned} f_L \text{ (sWW)} &\xrightarrow{\hat{C}\hat{P}} \bar{f}_R \text{ (sWW)} \\ \bar{f}_R \text{ (sWW)} &\xrightarrow{\hat{C}\hat{P}} f_L \text{ (sWW)} \end{aligned}$$

Die Verletzung der  $P$  und  $C$ -Symmetrie ist in Abbildung V.4 nochmals explizit für das Neutrino gezeigt, für das das Standardmodell nur die LH-Teilchen bzw. RH-Antiteilchen kennt.

<sup>17</sup>Die Frage ob auch RH-Neutrinos und LH-Antineutrinos existieren, die wir aber nicht sehen können, weil sie nicht wechselwirken, ist - zumindest so lange man die Neutrinos als masselos annimmt - ein eher philosophisches Problem. Für massive Neutrinos müssen hingegen RH-Neutrinos und LH-Antineutrinos existieren, obgleich diese - zumindest im Standardmodell - nicht wechselwirken.

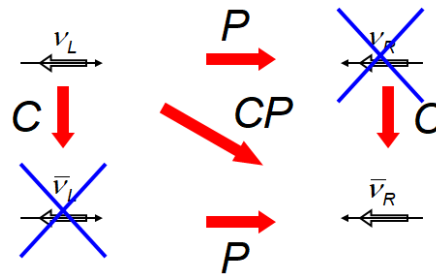


Abbildung V.4: Im Standardmodell, das nur LH-Neutrinos und RH-Antineutrinos kennt, ist die  $\hat{P}$  und  $\hat{C}$ -Symmetrie maximal verletzt. Die kombinierte Symmetrie  $\hat{C}\hat{P}$  scheint aber erhalten zu sein.

### V.4.5 CP und T-Verletzung und CPT-Theorem

1964 entdeckten die Physiker J. Christenson, J. Cronin, V. Fitch und R. Turley am amerikanischen Brookhaven National Lab bei der Untersuchung langlebiger neutraler Kaonen, dass die CP-Symmetrie im schwachen Zerfall neutraler Kaonen  $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$  auf dem Level von  $2 \cdot 10^{-3}$  verletzt ist. Diese Entdeckung führte im Jahr 1980 zum Nobelpreis für J. Cronin und V. Fitch.

Das neutrale Kaon-System blieb lange Zeit das einzige Teilchensystem, für das eine Verletzung der CP-Symmetrie (CP-Verletzung) beobachtet wurde. Im Jahr 2001 wurde aber CP-Verletzung auch für B-Mesonen beobachtet (BABAR und Belle-Experiment). Im Jahr 2019 konnte CP-Verletzung auch für neutrale D-Mesonen beobachtet werden (LHCb-Experiment). Die Untersuchung der CP-Verletzung in B- und D-Mesonen ist ein sehr aktives Forschungsfeld, an dem auch Physiker aus Heidelberg beteiligt sind.

Das Standardmodell sagt auch die Verletzung der CP-Symmetrie in schwachen Zerfällen von Hadronen korrekt voraus. Der Effekt wird durch die Quarkmischung in schwachen Übergängen bewirkt wird (s. dazu auch Kap. 8: CKM-Matrix). Aufgrund des CPT-Theorems (s.u.) erwartet man auch eine explizite Verletzung der T-Symmetrie in diesen Zerfällen. Im Kaon-System konnte die T-Verletzung 1998 durch das CPLEAR Experiment nachgewiesen werden. Quantenkorrekturen, die im Rahmen der schwachen Wechselwirkung für Neutronen auftreten, sollten aber auch ein T-verletzendes Neutron-EDM erzeugen: Im Rahmen des Standardmodells erwartet man ein Neutron-EDM von  $\sim 10^{-32}$  ecm. Das bisherige experimentelle Limit (Sensitivität) von  $< 1.8 \cdot 10^{-26}$  ecm (nEDM, 2020) ist davon aber noch weit entfernt.

#### CPT-Theorem

Lorentzinvariante lokale Quantenfeldtheorien sind invariant unter der kombinierten Symmetrie CPT (in beliebiger Reihenfolge). Der Beweis des CPT-Theorems, der von G.

Symmetrie	starke WW	e.m. WW	schwache WW
P	✓	✓	∅
C	✓	✓	∅
T	✓	✓	∅
CP	✓	✓	∅
CPT	✓	✓	✓

Tabelle V.1: Erhaltung (✓) bzw. Verletzung (∅) der Symmetrien C, P, T, CP, und CPT in der starken, elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung.

Lüders (1954) und W. Pauli (1955) erbracht wurde<sup>18</sup>, beruht auf einigen wenigen Grundannahmen wie der Kausalität, der Lokalität und der Lorentz-Invarianz von Feldtheorien sowie der Hermitezität der zugehörigen Lagrange-Dichte.

Die Natur sollte also CPT-symmetrisch sein: Unsere Welt und eine „zeitumgekehrte und partitätsgespiegelte Anti-Welt“ sollten sich gleich verhalten. CPT-Symmetrie impliziert gleiche Massen und Lebensdauern von Teilchen und Anti-Teilchen. Die bisher sensitivsten Tests der CPT-Symmetrie wurden wieder mit neutralen Kaonen durchgeführt, für die man einen Massenunterschied zwischen  $K^0$  und  $\bar{K}^0$  kleiner  $10^{-18}$  (relativ) und einen Lebensdauerunterschied kleiner  $10^{-17}$  (relativ) gemessen hat.

Tabelle V.1 fasst nochmals die Erhaltung bzw. Verletzung der Symmetrien C, P, T, CP, und CPT für die drei Wechselwirkungen zusammen.

---

<sup>18</sup>Die CPT-Invarianz von Feldtheorien wurde bereits 1951 von J. Schwinger beobachtet.



## Kapitel VI

# Untersuchung der Kern- und Nukleonstruktur

Streuexperimente sind der Schlüssel zum Verständnis der Struktur von Kernen und Nukleonen (Protonen und Neutronen). Dieses Kapitel beginnt mit dem bekannten Rutherford-Streuexperiment, bei dem  $\alpha$ -Teilchen ( ${}^4_2\text{He}^{2+}$ -Kerne) auf eine Goldfolie geschossen wurden. Es wird erläutert warum Rutherford geschlossen hat, dass die Kerne quasi punktförmig seien. Im nächsten Schritte werden Elektronen-Streuexperimente diskutiert, die das wichtigste Werkzeug für die Untersuchung der Kern- und Nukleonstruktur waren. Der letzte Abschnitt behandelt die Entdeckung der Quarks als Bausteine der Nukleonen.

### VI.1 Das Rutherford-Experiment - Streuung an punktförmiger Ladungsverteilung

Experimentelle Grundlage für Rutherford's Beschreibung der Atome waren die Streuversuche, die er zusammen mit H. Geiger und E. Marsden ab 1909 durchführte. Dabei wurde eine extrem dünne Goldfolie mit Alpha-Teilchen (Helium-Kerne) aus radioaktiven Zerfällen von Radon ( $E_\alpha = 5.5$  MeV) oder Bismut ( $E_\alpha = 3.1$  MeV) bestrahlt. Es wurde der Streuwinkel der  $\alpha$ -Teilchen vermessen.

Abbildung VI.1 zeigt einen schematischen Aufbau des Experiments<sup>1</sup>. Die  $\alpha$ -Quelle (1) ist von einer Abschirmung umgeben, sodass die  $\alpha$ -Teilchen nur in die gewünschte Richtung entweichen können (2). Der Teilchenstrahl (3) trifft dann am Punkt (6) auf die Goldfolie (5), welche nur einige Atomschichten dick ist. Um die Goldfolie befindet sich ein Leuchtschirm (4). Das gestreute  $\alpha$ -Teilchen wird beim Auftreffen durch ein Leuchten nachgewiesen. Auf diese Weise war es möglich, die Winkelverteilung der gestreuten  $\alpha$ -Teilchen zu vermessen.

---

<sup>1</sup>Die Skizze und die kurze Beschreibung stammt ursprünglich aus Wikipedia.

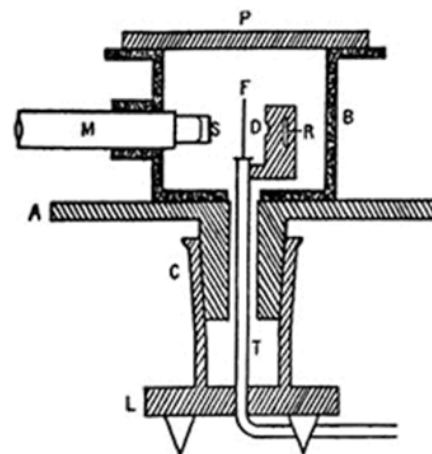
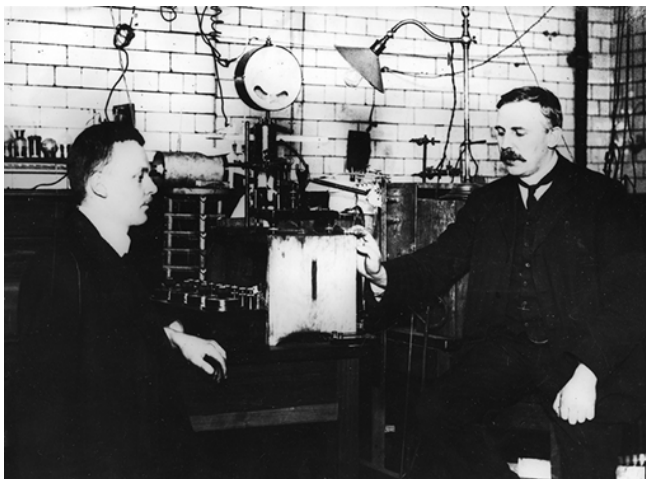
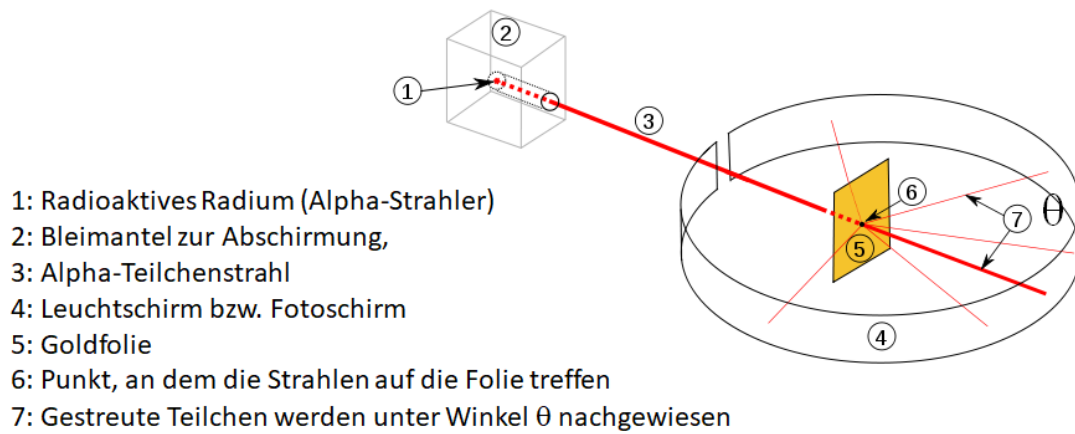


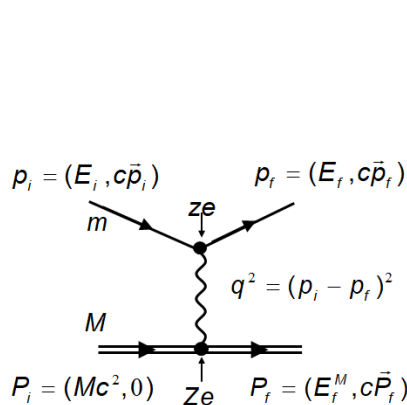
Abbildung VI.1: (oben) Skizze der von H. Geiger und E. Marsden unter Anleitung von E. Rutherford durchgeführten Streuexperimente mit  $\alpha$ -Teilchen (Quelle: Wikipedia). (unten) E. Marsden und E. Rutherford im Labor in Cambridge, sowie eine Skizze der Versuchsanordnung.

Die große Mehrzahl der Teilchen wurde bei sehr kleinen Streuwinkeln beobachtet und passierte die Folie also mehr oder weniger ohne eine nachweisbare Wechselwirkung. Einige Teilchen wurden aber unter teilweise sehr großen Streuwinkeln  $\theta$  gestreut und in manchen Fällen sogar zurück gestreut. Es ist diese zweite Beobachtung, die Rutherford schließen lies, dass die gesamte positive Ladung der Atome in einem quasi punktförmigen Kern konzentriert sein muss. Das bis dahin gültige Thomson-Modell („Rosinenkuchen“-Modell) des Atoms kann die großen Streuwinkel nicht vorhersagen. Der Zusammenhang zwischen der Ladungsverteilung  $\rho(r)$  und der gemessenen Streuwinkelverteilung - oder korrekter dem differentiellen Wirkungsquerschnitt  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  - wird in den nächsten Abschnitten diskutiert.

### VI.1.1 Theoretische Behandlung der Rutherford-Streuung

Auch wenn das ursprüngliche Streuexperiment mit nicht-relativistischen  $\alpha$ -Teilchen durchgeführt wurde, gilt die von Rutherford gefundene Streuformel allgemein für die elastische Streuung<sup>2</sup> eines leichten spinlosen geladenen Teilchens (Ladung  $ze$ ) an einem schweren, ruhenden spinlosen Streuzentrum mit Ladung  $Ze$ .

#### Bestimmung der Streuamplitude:



Die nebenstehende Abbildung zeigt den Feynman-Graphen für den Streuprozess, wobei die ein- und auslaufenden Teilchen hier keine Fermionen sondern spinlose (skalare) Teilchen mit Massen  $m$  und  $M$  sind. Da man im Gegensatz zu Abschnitt III.5 hier keine Spins berücksichtigen muss, ist das Übergangsmatrixelement  $\mathcal{A}_{fi}$  unabhängig vom Streuwinkel und bis auf Vorfaktoren zur Berücksichtigung von Dimension und Normierung<sup>a</sup> einfach gegeben durch:

$$\mathcal{A}_{fi} \sim \frac{zeZe}{q^2} \quad \text{bzw.} \quad |\mathcal{A}_{fi}|^2 \sim \left( \frac{zeZe}{q^2} \right)$$

<sup>a</sup>Der zusätzliche Vorfaktor für  $\mathcal{A}_{fi}$  lautet  $4\pi\alpha/e^2 \cdot (\hbar c)^3$  - s. Abschnitt VI.1.3.

#### Berücksichtigung des Phasenraums:

Zur Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts muss man den Phasenraum

<sup>2</sup>Elastisch heißt, dass keine inneren Freiheitsgrade angeregt werden oder das Streuzentrum aufgebrochen wird.

berücksichtigen. Hierzu benutzt man den Ausdruck aus Abschnitt III.4.2,

$$\sigma = \frac{1}{v_i} \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE_f^{\text{tot}}} \left( \int |\mathcal{A}_{fi}|^2 d^3p_f \right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} \frac{c^2 |\vec{p}_f|^2}{\beta_i} \frac{dp_f}{dE_f^{\text{tot}}} |\mathcal{A}_{fi}|^2,$$

wobei hier  $E_f^{\text{tot}} = E_f + E_f^M$  die Gesamtenergie des Endzustands nach der Streuung ist. Der Ausdruck muss an die Fixed-Target Bedingung der Streuung angepasst werden. Die Rechnung vereinfacht sich, wenn man mit hochrelativistischen Projektilen ( $c|\vec{p}_f| \approx E_f$  und  $\beta_i \approx 1$ ) rechnet. Das ist für die Rutherford-Streuung mit  $\alpha$ -Teilchen zwar nicht gegeben, kann aber am Ende der Rechnung berücksichtigt werden. Dann findet man<sup>3</sup>:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} c^2 |\vec{p}_f|^2 \frac{E_f^P}{Mc^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} |\mathcal{A}_{fi}|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} c^2 |\vec{p}_f|^2 |\mathcal{A}_{fi}|^2$$

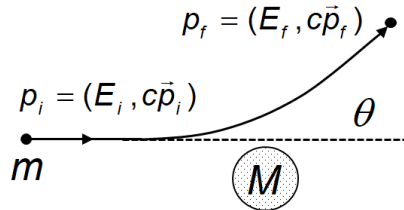
Im letzten Schritt wurde für sehr schwere Streuzentren angenommen, dass der Energieübertrag vernachlässigt werden kann, also  $E_f^M \approx Mc^2$ , und damit  $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$  ist. Damit lässt sich dann der differentielle Wirkungsquerschnitt als Funktion von  $|\vec{p}_f|$  und von  $q^2$  (s. Ausdruck für  $\mathcal{A}_{fi}$ ) angeben. Der 4er-Impulsübertrag  $q^2$  beim Streuprozess kann aus der Streukinematik bestimmt werden.

**Streukinematik für elastische Streuung:**

Der 4er-Impulsübertrag  $q^2$  der Streuung ergibt sich aus den 4er-Impulsen des Projektils vor und nach der Streuung. Für die elastische Streuung und unter Vernachlässigung des Rückstoßes bleibt die Energie des Projektils gleich, so dass  $E_i = E_f$  und  $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$ .

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} q^2 &= (p_i - p_f)^2 = (E_i - E_f)^2 - c^2(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2 \\ &= -c^2(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2 = -c^2 \vec{q}^2 \\ &= -4c^2 |\vec{p}_f|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$



Im Falle elastischer Streuung und bei Vernachlässigung des Rückstoßes ist also der 4er-Impulsübertrag durch den 3er-Impulsübertrag  $\vec{q}$  gegeben:

$$|\vec{q}| = 2|\vec{p}_f| \sin \frac{\theta}{2}$$

**Rutherford-Streuformel:**

Damit erhält man die Streuformel in Abhängigkeit vom Impuls  $|\vec{p}_f|$  und dem Streuwinkel

<sup>3</sup>Mit  $E_f^{\text{tot}} = cp_f + \sqrt{c^2 P_f^2 + M^2 c^4}$  ergibt sich:

$$\frac{dp_f}{dE_f^{\text{tot}}} = \frac{E_f^M}{M} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|}$$

$\theta$  des Projektils:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{4c^2 |\vec{p}_f|^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (\hbar c)^2$$

Für hochrelativistische Projektile  $E_f \approx c|\vec{p}_f|$  und mit  $E = E_f = E_i$  ergibt sich dann die Streuformel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (\hbar c)^2 = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ruther}}$$

Falls die Projektile nicht relativistisch sind, müssen die Geschwindigkeiten des Projektils,  $\beta_i \approx \beta_f < 1$ , bei der Herleitung explizit berücksichtigt werden, was im obigen Ausdruck zu einem zusätzlichen Term  $\beta_i \beta_f \approx \beta_f^2$  im Nenner führt. Mit der nicht relativistischen Beziehung für die kinetische Energie des Projektils,  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} |\vec{p}_f| \beta_f c$ , erhält man für den nicht relativistischen Fall die bekannte Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{16 E_{\text{kin}}^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} (\hbar c)^2$$

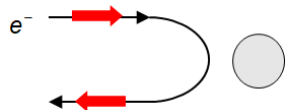
### Diskussion des Rutherford-Streuquerschnitts:

- Die Streuformel sagt eine endliche Wahrscheinlichkeit für Rückwärtsstreuung ( $\theta = 180^\circ$ ) voraus.
- Für sehr kleine Streuwinkel  $\theta \rightarrow 0$  bzw. kleine Impulsüberträge  $|q^2| \rightarrow 0$  steigt der Streuquerschnitt stark an. In der Realität ist der maximale Stoßparameter und damit der minimale Impulsübertrag limitiert (Abstand zum nächsten Atom). Auch kann man experimentell keine beliebig kleine Streuwinkel messen.
- Ein Stoßpartner mit einer ausgedehnten Ladungsverteilung erscheint so lange punktförmig, wie die Wellenlänge des ausgetauschten Photons,  $\lambda = \frac{\hbar}{|q|}$ , größer als die Ausdehnung der Ladungsverteilung ist.

### VI.1.2 Mott-Formel für die Streuung von Spin- $\frac{1}{2}$ -Elektronen

In der bisherigen Behandlung wurde der Spin des Projektil-Teilchens ignoriert, was für die Streuung von  $\alpha$ -Teilchen (Spin 0) natürlich richtig ist. Bei der Untersuchung der Kern- und Nukleonstruktur spielen aber Streuexperimente mit hochenergetischen Elektronen eine wichtige Rolle. Für hochrelativistische Elektronen ( $\beta \rightarrow 1$ ) ist die Helizität (Spinprojektion auf die Bewegungsrichtung des Teilchens) eine Erhaltungsgröße und führt zusammen mit der Drehimpulserhaltung zu einer Unterdrückung der Rückwärtsstreuung, die man sich mit einer Skizze plausibel machen kann. Für  $\beta \approx 1$

ist der Wirkungsquerschnitt für Elektronen, den man als Mott-Wirkungsquerschnitt bezeichnet, deshalb gegenüber dem Rutherford-Wirkungsquerschnitt um einen Term  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$  unterdrückt:



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruther}} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Für den Fall  $\beta < 1$  führt der Spin immer noch zu einer Unterdrückung der Rückwärtsstreuung, die aber Abhängig von  $\beta$  schwächer ist:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruther}} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Die Mott-Streuformel beschreibt die Streuung von Spin- $\frac{1}{2}$ -Elektronen an einem schweren Target ohne Spin.

### VI.1.3 Nachtrag: Photonpropagator $\frac{1}{q^2}$ und das Wechselwirkungspotential

Der Photonpropagator wurde in Kapitel III ad hoc und ohne Bezug zum Wechselwirkungspotential eingeführt. Wie im Folgenden gezeigt wird, entspricht der Photonpropagator aber der Fourier-Transformierten des  $1/r$ -Potentials einer punktförmigen Ladung im Impulsraum. Die folgenden Überlegungen sind nicht zuletzt deshalb wichtig, da sie den Weg aufzeigen, wie eine ausgedehnte Ladungsverteilung zu behandeln ist.

#### Streuung an stationärem radial-symmetrischen Potential $V(r)$ :

Wie in Abschnitt III.1 bereits erläutert wurde, wird die Übergangsamplitude  $\mathcal{A}_{fi}$  für ein radial-symmetrisches Potential  $V(r)$  in Born'scher Näherung gegeben durch

$$\mathcal{A}_{fi} = \langle f | \hat{H}_{WW} | i \rangle = \int \int \psi_f^*(\vec{r}, t) V(r) \psi_i(\vec{r}, t) dt d\vec{r}$$

wobei  $\psi_{i,f}(\vec{r}, t)$  die Lösungen des freien Teilchens sind:

$$\psi_j = N \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_j \vec{r} - E_j t)\right) \quad \text{mit } N = \text{Normierung} = \frac{1}{\sqrt{V}}$$

Die Integration über die Zeit, erstreckt sich über die Wechselwirkungszeit  $T$ . Aufgrund des zeitlich konstanten Potentials liefert die Zeitintegration eine Delta-Funktion,  $\delta(E_f - E_i)$  was nichts anderes heißt, als dass die Energie erhalten sein muss. Damit ist  $\mathcal{A}_{fi}$

gegeben durch<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{fi} &= \int V(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \cdot \vec{r}\right) d\vec{r} \\ &= \int V(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q} \cdot \vec{r}\right) d\vec{r}\end{aligned}$$

Für ein reines  $1/r$ -Potential divergiert das Integral. Deshalb benutzt man zur Berechnung einen Trick und führt einen zusätzlichen Dämpfungsfaktor ein<sup>5</sup>:  $V'(r) = \frac{C}{r} \exp(-r/a)$  mit  $C = \frac{e^2}{4\pi}$ . Für das modifizierte Potential erhält man (s. nächster Abschnitt):

$$\mathcal{A}'_{fi} = \frac{e^2 \hbar^2}{\vec{q}^2 + (\hbar/a)^2}$$

Lässt man den Dämpfungsparameter  $a$  gegen unendlich gehen, so dass man im Limit wieder das  $1/r$  Potential erhält, findet man für  $\mathcal{A}_{fi}$ :

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{e^2}{c^2 \vec{q}^2} (\hbar c)^2 \rightarrow \text{Photon-Propagator} \sim \frac{1}{q^2}$$

## VI.2 Elektronenstreuung an ausgedehnten Kernen

Der folgende Abschnitt behandelt die elastische Streuung hochenergetischer Elektronen an ausgedehnten Ladungsverteilungen wie beispielsweise Atomkerne. Nach einer kurzen theoretischen Diskussion werden die Streuexperimente, die R. Hofstadter mit einem Team von Physikern in Stanford in den 1950er Jahren mit Elektronen an verschiedenen Targetmaterialien durchgeführt hat, diskutiert. Es wird gezeigt, wie aus den experimentellen Resultaten Aussagen über die Gestalt der untersuchten Kerne gewonnen werden kann.

### VI.2.1 Behandlung ausgedehnter Ladungsverteilungen

Für die folgende Diskussion sei die Ladung  $Ze$  nicht mehr in einem Punkt konzentriert, sondern sei durch eine Ladungsdichte  $\rho(\vec{r}) = Ze f(\vec{r})$  beschrieben, wobei das RauminTEGRAL über die Dichteverteilung  $f(\vec{r})$ ,  $\int f(\vec{r}) d\vec{r} = 1$ , auf eins normiert ist. Dann erhält man für das Potential  $V(\vec{r})$  des Elektrons<sup>6</sup>:

$$V(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

<sup>4</sup>Das Normierungsvolumen wird hier wieder zu  $V = 1$  gesetzt.

<sup>5</sup>Im Folgenden werden Gauß-Einheiten (s. Kapitel 1) benutzt:  $\epsilon_0 = 1$

<sup>6</sup>Im Folgenden werden ebenfalls Gauß-Einheiten benutzt.

Erinnerung: Elektrisches Potential  $\phi(\vec{r})$  und Green'sches Theorem

Für das elektrische Potential  $\phi(\vec{r})$  gilt:

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) \quad \text{und} \quad V(\vec{r}) = e\phi(\vec{r})$$

Green'sches Theorem für skalare Felder  $u(\vec{r})$  und  $v(\vec{r})$ :

$$\int (u\Delta v - v\Delta u) d\vec{r} = 0$$

Mit  $\Delta \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}\right) = -\vec{q}^2 \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}\right)$  folgt:

$$\int \phi(\vec{r}) \left(-\frac{\vec{q}^2}{\hbar^2} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}\right)\right) d\vec{r} = \int \Delta\phi(\vec{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}\right) d\vec{r}$$

Mit dem Ausdruck für die Übergangsamplitude  $\mathcal{A}_{fi}$  aus dem letzten Abschnitt ergibt sich mit  $\vec{q} = (\vec{p}_i - \vec{p}_f)$ <sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{fi} &= \int V(\vec{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}\right) d\vec{r} \\ &= -\frac{\hbar^2}{\vec{q}^2} \int V(\vec{r}) \Delta\left(\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}\right)\right) d\vec{r} \\ &= -\frac{e\hbar^2}{\vec{q}^2} \int \Delta\phi(\vec{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}\right) d\vec{r} \\ &= +\frac{e\hbar^2}{\vec{q}^2} \int \rho(\vec{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}\right) d\vec{r} \\ &= \frac{Ze^2\hbar^2}{\vec{q}^2} \int f(\vec{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}\right) d\vec{r} \\ &= \frac{Ze^2\hbar^2}{\vec{q}^2} \cdot F(\vec{q}) \end{aligned}$$

Die Größe  $F(\vec{q})$  ist die Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung und wird als Formfaktor bezeichnet:

$$F(\vec{r}) = \int f(\vec{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{q}\vec{r}\right) d\vec{r}$$

Für die elastische Streuung an einer radial-symmetrischen Ladungsverteilung findet man, dass der Formfaktor nur von  $\vec{q}^2$  abhängt:  $F = F(\vec{q}^2)$ .

Für den Wirkungsquerschnitt der elastischen Streuung eines Elektrons an einer radial-symmetrischen Ladungsverteilung  $\rho = \rho(r)$  erhält man deshalb:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2$$

<sup>7</sup>Mit  $e^2 = 4\pi\alpha \cdot \hbar c$  (Gauß'schen Einheiten).



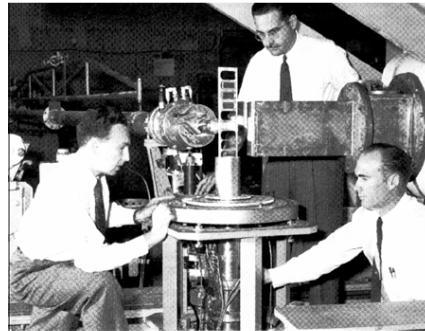
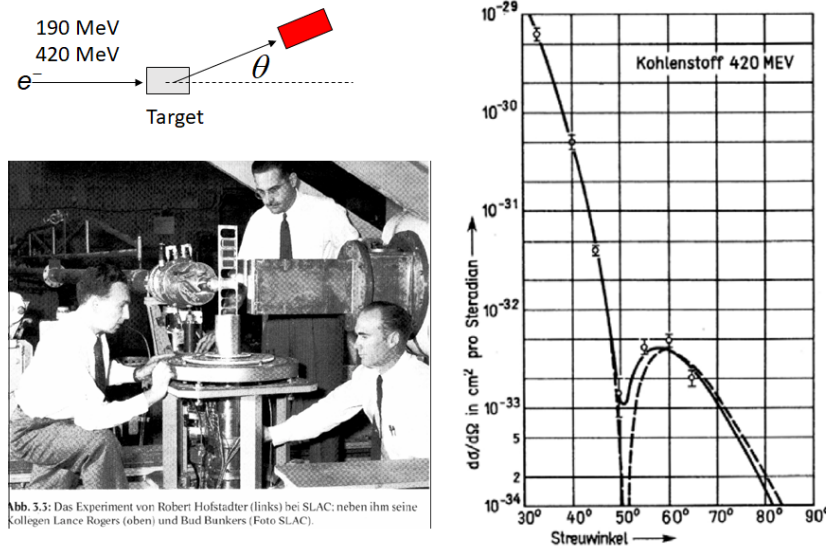


Abb. 5.3: Das Experiment von Robert Hofstadter (links) bei SLAC; neben ihm seine Kollegen Lance Rogers (oben) und Bud Bankers (Foto SLAC).

Abbildung VI.2: (links) Prinzipskizze der Versuchsanordnung (oben) und Foto des Aufbaus (unten). (rechts) Gemessener differentielle Wirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels für Elektronen Streuung an einem Kohlenstoff-Target.

Da der Betrag des Formfaktors immer kleiner oder gleich eins ist,  $|F(\vec{q}^2)|^2 \leq 1$  (da  $\int f(\vec{r})d\vec{r} = 1$ ), ist der total Wirkungsquerschnitt einer ausgedehnten Ladungsverteilung immer kleiner als der totale Wirkungsquerschnitt für eine punktförmige Ladung. Für kleine Werte von  $\vec{q}^2$  hat das ausgetauschte Photon eine große Wellenlänge und kann die Kernstruktur nicht auflösen. Der Formfaktor strebt dann gegen eins, den Formfaktor einer punktförmigen Ladung:  $|F(\vec{q}^2)|^2 \rightarrow 1$

### VI.2.2 Elektronen-Streuexperimente an Kernen

Mit der Inbetriebnahme eines neuen Linear-Beschleunigers (Linac) in Stanford (SLAC) standen ab 1953 Elektronen mit Energien bis zu 225 MeV zur Verfügung. Durch weiteren Ausbau konnte die Energie des Linacs 1956 auf 550 MeV erhöht werden. Eine Gruppe um den Physiker R. Hofstadter führte von 1953 bis 1956 mit den hochenergetischen Elektronen eine Reihe von Streuexperimenten mit verschiedenen Targets durch. Sie konnten dabei sowohl die Ladungsverteilung der verwendeten Target-Kerne und durch Benutzung von Wasserstoff als Target auch die Ladungsverteilung des Protons bestimmen. Hofstadter erhielt für diese Arbeiten 1961 den Nobelpreis.

Der Prinzipielle Aufbau der Streuexperimente ist in Abbildung VI.2 gezeigt. Mittels eines schwenkbaren Detektorarms wurde die Rate der gestreuten Elektronen unter ver-

schiedenen Streuwinkeln gemessen. Die Elektronen passierten vorher ein Spektrometer mit dem die Impulse selektiert wurden. Abbildung VI.2 zeigt für die Streuung von Elektronen einer Energie von 420 MeV an einem Kohlenstoff-Target den gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels  $\theta$ . Der Verlauf erinnert an das Beugungsmuster einer Kugel und wird im Folgenden erklärt. Der experimentelle Wirkungsquerschnitt sollte durch die obigen Streuquerschnitt für ausgedehnte radial-symmetrische Ladungsverteilungen beschrieben werden:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2$$

Durch Division mit dem Mott-Wirkungsquerschnitt lässt sich aus den experimentellen Werten der Formfaktor  $|F(\vec{q}^2)|^2$  der Ladungsverteilung bestimmen<sup>8</sup>.

Mathematisch kann die Ladungsverteilung durch eine Rücktransformation des Formfaktors in den Ortsraum erhalten werden. Das ist aber im allgemeinen nicht möglich, da der Formfaktor nur über einen sehr eingeschränkten  $\vec{q}^2$ -Bereich messbar ist: Insbesondere für ausgedehnte Kerne fällt der Wirkungsquerschnitt für große  $\vec{q}^2$  (große Streuwinkel  $\theta$ ) sehr stark ab und kann dann nicht mehr präzise bestimmt werden.

Stattdessen benutzt man Modellansätze um die Ladungsdichte bzw. die Dichte  $f(r)$  zu beschreiben. Diese Modelle werden dann Fourier-transformiert und die Modell-Formfaktoren werden an die Daten angepasst. Der Modellansatz mit den angepassten Parametern ergibt die Form und die Ausdehnung der Ladungsverteilung. Einige Modellansätze für die Dichtverteilung  $f(r)$  zusammen mit den resultierenden Formfaktoren  $|F(\vec{q}^2)|^2$  sind in Abbildung VI.3 gezeigt. Die Annahme einer kugelförmigen Ladungsverteilung (Radius  $R$ ) erzeugt die Beugungsstruktur, die man in den Streudaten für Kohlenstoff beobachtet. Aus den Minima lässt sich der Radius der Ladungsverteilung bestimmen. Für die erste Nullstelle des Formfaktors der Kugel findet man<sup>9</sup>:  $\alpha = \frac{c|\vec{q}|R}{\hbar c} \approx 4.5$ .

### VI.2.3 Ladungsverteilung von Kernen

Die Gruppe um R. Hofstadter hat für eine Vielzahl von Kernen die Ladungsverteilung bestimmt. Schwerere Kerne werden dabei sehr gut durch Kugeln mit einem weichen Rand beschrieben, bei denen die radiale Dichte durch eine Fermi-Verteilung gegeben ist:

<sup>8</sup>Wie man leicht zeigen kann ist für radial-symmetrische Ladungsverteilungen der Formfaktor reell.

<sup>9</sup>Formfaktor der Kugel:  $3\alpha^{-3}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$  mit  $\alpha = c|\vec{q}|R/\hbar c$

Ladungsverteilung $f(r)$		Formfaktor $F(q^2)$	
Punkt	$\delta(r)/4\pi$	1	konstant
exponentiell	$(a^3/8\pi) \cdot \exp(-ar)$	$(1 + q^2/a^2\hbar^2)^{-2}$	Dipol
Gauß	$(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot \exp(-a^2r^2/2)$	$\exp(-q^2/2a^2\hbar^2)$	Gauß
homogene Kugel	$\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$ mit $\alpha =  q R/\hbar$	oszillierend

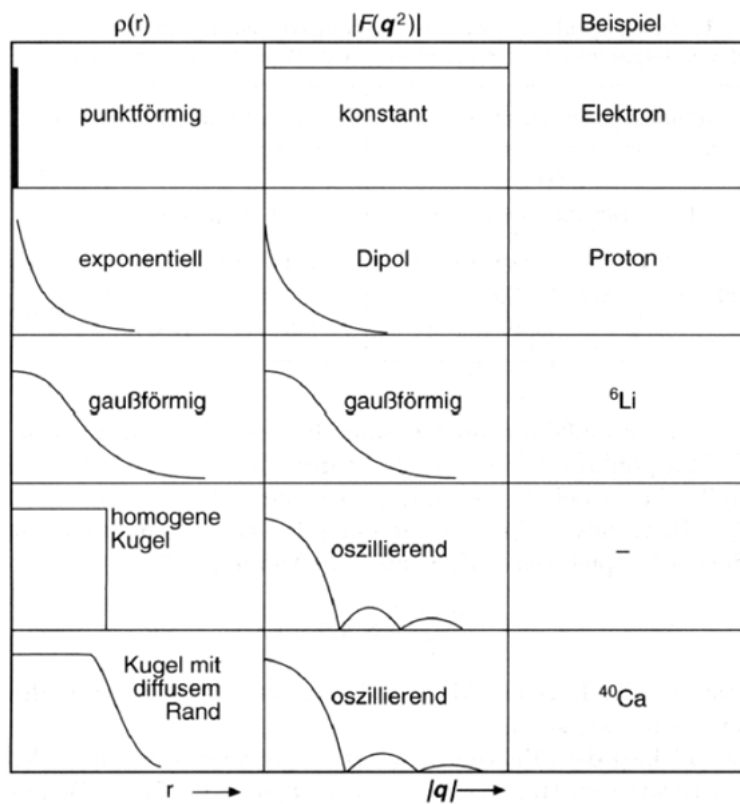
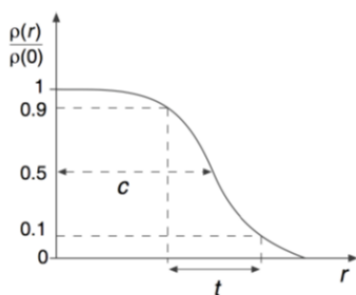


Abbildung VI.3: (oben) Radial-symmetrische Modellansätze für die Dichteverteilung  $f(r)$  sowie die resultierenden Formfaktoren  $F(\vec{q}^2)$ . (unten) Skizze der Modellansätze und der Formfaktoren  $|F(\vec{q}^2)|^2$ . In der letzten Spalte werden auch Beispiele für die jeweilige Ladungsverteilung gegeben.

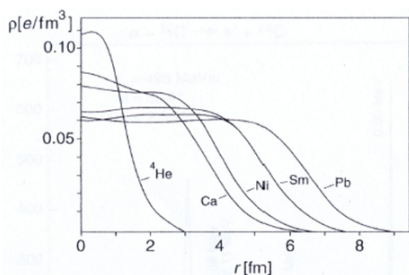


$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-c)/a}}$$

Dabei sind  $c$  und  $a$  Parameter zur Beschreibung des Kerns.  $c$  ist der Radius, bis zu dem die Dichte auf den halben Wert abgenommen hat.  $t$  ist die Oberflächendicke, die durch den Parameter  $a$  bestimmt wird:  $t = (4 \ln 3)a$ .

Die Ergebnisse der Experimente kann man wie folgt zusammenfassen:

Für mittlere und schwere Kerne ist der quadratische Radius<sup>10</sup> der Ladungsverteilung näherungsweise durch  $\langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0.94 \text{ fm} A^{\frac{1}{3}}$ . Für diese Kerne beträgt die Nukleonendichte  $\rho_N$  im Zentrum  $\rho_N \approx 0.17$  Nukleonen/ $\text{fm}^3$ . Nimmt man statt der Fermi-Verteilung eine konstante Dichte über den gesamten Kern bis zum Radius  $R$  an und fordert, dass der quadratische Radius der Ladungsverteilung der gleiche bleiben soll, so findet man für den Radius  $R$  des „harten“ Kerns  $R = 1.2 \text{ fm} A^{\frac{1}{3}}$ , die Formel aus Kapitel II zur Abschätzung von Kernradien.



Die nebenstehende Abbildung zeigt für eine Reihe von Kernen die konkret bestimmten Ladungsverteilungen (R. Hofstadter et al., 1956). Die gemessenen Ladungsverteilungen lassen sich auch für schwere Kerne nur bedingt durch die zwei-parametrische Fermi-Verteilung beschreiben. Die Ladungsdichte ist im Innern der Kerne nicht konstant, sondern kann zum Zentrum hin leicht zu oder auch abnehmen. Die Unterschiede werden durch den Einfluss der Schalenstruktur der Kerne bewirkt (s. Kap. X).

### VI.3 Räumliche Struktur der Nukleonen

Die elastische Elektron-Streuung an Wasserstoff erlaubte R. Hofstadter auch erstmals die räumliche Ausdehnung des Protons zu vermessen. Die Bestimmung der Proton-Formfaktoren ist Gegenstand dieses Abschnittes.

#### VI.3.1 Nukleon-Spin und magnetische Momente

Neben der rein elektrischen Wechselwirkung kommt es bei der Streuung von Elektronen an Protonen und Neutronen auch zu einer magnetischen Wechselwirkung aufgrund der

---


$$^{10}\langle r^2 \rangle = \int r^2 \rho(r) d^3r$$

magnetischen Momente der Teilchen, wobei für hochrelativistische Teilchen elektrische und magnetische Wechselwirkung gemeinsam betrachtet werden müssen.

Proton und Neutron sind Fermionen mit Spin  $\frac{1}{2}$  und besitzen „anomale“ magnetische Momente, die vom magnetischen Moment eines punktförmigen Spin  $\frac{1}{2}$  Fermions (Dirac-Teilchen:  $g = 2 + \text{QED-Korrekturen}$ ) abweichen und auf eine innere Struktur der Nukleonen hinweisen.

Berücksichtigt man die anomalen  $g$ -Faktoren, so sind die magnetischen Momente der Nukleonen ( $N = p, n$ ) gegeben durch:

$$\vec{\mu}_{p,n} = g_{p,n} \mu_N \frac{\vec{S}}{\hbar}$$

wobei das Nukleon-Magneton  $\mu_N$  (häufig auch als Kernmagneton  $\mu_K$  bezeichnet) analog zum Elektron- oder Bohrmagneton  $\mu_B$  gegeben ist durch:

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_N} \approx 3.15 \cdot 10^{-14} \frac{\text{MeV}}{\text{T}}$$

Im Vergleich zum Bohrmagneton ( $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 5.79 \cdot 10^{-11} \frac{\text{MeV}}{\text{T}}$ ) ist das Nukleon-Magneton um einen Faktor  $M_N/m_e \approx 2000$  kleiner.

Mit dem Spin-Wert  $m_s = \pm \frac{1}{2}$  findet man für das magnetische Moment von Proton und Neutron längs einer Achse:

$$\begin{aligned} \mu_p &= g_p \cdot \mu_N \cdot m_s = \pm \frac{g_p}{2} \cdot \mu_N = \pm 2.79 \mu_N \quad \text{mit } g_p = 5.58 \\ \mu_n &= g_n \cdot \mu_N \cdot m_s = \pm \frac{g_n}{2} \cdot \mu_N = \mp 1.91 \mu_N \quad \text{mit } g_n = -3.82 \end{aligned}$$

### VI.3.2 Elektronenstreuung an einem hypothetischen punktförmigen Spin $\frac{1}{2}$ Proton

Um den Streuprozess hochrelativistischer Elektronen an realen ausgedehnten Protonen zu verstehen wird im Folgenden erst einmal die Streuung an einem hypothetischen punktförmigen Spin  $\frac{1}{2}$  Proton (Dirac-Teilchen) behandelt. Für dieses Teilchen ist der  $g$ -Faktor gegeben durch den Dirac-Wert  $g = 2$  (QED Korrekturen vernachlässigt).

Neben der Wechselwirkung aufgrund der Ladung kommt es auch zu einer Wechselwirkung der magnetischen Momente<sup>11</sup> die zu einem Spin-Flip bei den gestreuten Elektronen führt. Dadurch kommt es im Vergleich zur Mott-Streuung zu einem zweiten Term der der

<sup>11</sup>Für die Kernstreuung konnte diese Wechselwirkung ignoriert werden.

Unterdrückung der Rückwärtstreuung teilweise entgegenwirkt. Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einem Dirac-Teilchen ist deshalb gegeben durch:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ruther}} \cdot \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2c^4 M_p^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Der erste Term beschreibt die helizitätserhaltende Mott-Streuung (Unterdrückung der Rückwärtstreuung). Der zweite Term beschreibt den Effekt des durch die Spin-Spin-Wechselwirkung bewirkten Flips des Elektronen-Spins und bewirkt eine Erhöhung der Rückwärtstreuung. Die Variable  $Q^2 = -q^2$  berücksichtigt, dass der 4er-Impulsübertrag  $q^2 \approx -4c^2 p_f^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$  immer kleiner als Null ist (s. VI.1.1), so dass  $Q^2$  im Ausdruck des Wirkungsquerschnitts größer Null wird.  $M_p$  bezeichnet die Proton-Masse.

Für die Spin-Spin-Wechselwirkung erwartete man dass die entsprechende Amplitude  $\mathcal{A}_{fi} \sim \mu_p \sim \frac{1}{M_p}$  und deshalb der Anteil des Wirkungsquerschnitts  $\sigma \sim |\mathcal{A}_{fi}|^2 \sim \frac{1}{M_p^2}$ . Die Abhängigkeit von  $Q^2$  wird dadurch gegeben, dass die Spin-Spin-Wechselwirkung stark mit dem Abstand (Stoßparameter) abnimmt. Ein kleiner Stoßparameter ist aber gleichbedeutend mit einem großen 4er-Impulsübertrag  $Q^2$ .

Benutzt man den Mott-Wirkungsquerschnitt kann man den Dirac-Wirkungsquerschnitt umschreiben als:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left(1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{Q^2}{4c^4 M_p^4}$$

Da der Streuwinkel  $\theta \leq 180^\circ$  ist, ist der Ausdruck  $2\tau \tan^2 \frac{\theta}{2}$  immer größer als Null, so dass für  $\theta > 0$  der Dirac-Wirkungsquerschnitt immer größer als der Mott-Wirkungsquerschnitt ist. Das gilt insbesondere für Rückwärtstreuung.

Bisher wurde bei allen Betrachtungen der Rückstoß des Streupartners nicht berücksichtigt. Bei schweren Kernen war dies sicher gerechtfertigt. Bei der Streuung hochrelativistischer Elektronen an Protonen ist der Proton-Rückstoß aber signifikant und kann nicht mehr vernachlässigt werden. Das Proton nimmt einen Teil der Elektronenenergie als kinetische Energie auf und die Energie des Elektrons vor ( $E_i$ ) und nach dem Stoß ( $E_f$ ) ist nicht mehr gleich. Das führt zu einer Korrektur des Wirkungsquerschnitts<sup>12</sup>:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^{\text{Rückstoß}} &= \left(\frac{E_f}{E_i}\right) \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}}^{\text{Rückstoß}} &= \left(\frac{E_f}{E_i}\right) \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} \end{aligned}$$

Im Folgenden verstehen sich Wirkungsquerschnitte als Rückstoß-korrigiert.

<sup>12</sup>Für den Fall eines großen Energieübertrags vom Elektron auf das Proton, hat der 4er-Impulsübertrag  $q$  eine Energiekomponente und  $Q^2 = -q^2 \neq c^2 \vec{p}^2$ .

### VI.3.3 Elastische Elektron-Streuung an Protonen

Die Elektronen-Streuung an realen Protonen muss zwei Eigenschaften berücksichtigen. Zum einen handelt es sich beim Proton um eine ausgedehnte Struktur. Um sowohl die elektrische als auch die magnetische Ausdehnung zu beschreiben, müssen deshalb zwei Formfaktoren  $G_E(Q^2)$  und  $G_M(Q^2)$  eingeführt werden. Zum anderen hat das Proton ein anomales magnetisches Moment, das berücksichtigt werden muss.

#### Rosenbluth-Formel für die Elektron-Proton-Streuung:

Naiv würde man die oben eingeführten Formfaktoren  $G_E$  und  $G_M$  vor den beiden Anteilen des Dirac-Wirkungsquerschnitts erwarten. Das ist auch im Limit kleiner  $Q^2$  der Fall. Für beliebige  $Q^2$  bewirkt die „bewegte“ Ladung aber auch einen magnetischen Effekt, der berücksichtigt werden muss. Man findet deshalb für den differentiellen Wirkungsquerschnitt die Rosenbluth-Formel:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot \left(\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Die auftretenden Formfaktoren  $G_E(Q^2)$  und  $G_M(Q^2)$  sind Funktionen des 4er-Impulsübertrags  $Q^2$  und können anders als die Formfaktoren  $F(\vec{q}^2)$  bei der Elektronen-Kern-Streuung im Allgemeinen nicht direkt mit der Fourier-Transformierten der Ladungsverteilung bzw. der Verteilung des magnetischen Moments identifiziert werden. Diese Interpretation ist aber im Limit  $Q^2 \ll 4c^4 M_p^2$ , d.h. für  $\tau \ll 1$  und  $Q^2 \approx c^2 \vec{q}^2$  möglich. In diesem Limit findet man:

$$G_E(Q^2) \approx G_E(\vec{q}^2) = \int \frac{\rho(\vec{r})}{e} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{q} \vec{r}\right) d\vec{r} \quad \text{mit} \quad \int \frac{\rho(\vec{r})}{e} d\vec{r} = 1 \quad (\text{VI.1})$$

$$G_M(Q^2) \approx G_M(\vec{q}^2) = \int \frac{\tilde{\mu}(\vec{r})}{\mu_N} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{q} \vec{r}\right) d\vec{r} \quad \text{mit} \quad \int \frac{\tilde{\mu}(\vec{r})}{\mu_N} d\vec{r} = \frac{g_p}{2} \quad (\text{VI.2})$$

Die bei der Definition des magnetischen Formfaktors eingeführte Größe  $\tilde{\mu}$  entspricht der räumlichen Verteilung des magnetischen Moments. Die Normierung auf  $\frac{g_p}{2}$  berücksichtigt das anomale magnetische Moment des Protons ( $g_p = 5.58$ , s.o.).

Im Limit  $Q^2 = 0$  erhält man deshalb für die beiden Formfaktoren:

$$G_E(0) = 1 \quad (\text{VI.3})$$

$$G_M(0) = 2.79 \quad (\text{VI.4})$$

Auch wenn es nahe liegt, anzunehmen, dass die Verteilung des magnetischen Moments der Verteilung der elektrischen Ladung des Protons folgt, gibt es dafür a priori keinen Grund. Die beiden Formfaktoren müssen deshalb unabhängig von einander bestimmt werden. Die Rosenbluth-Formel erlaubt aber die experimentelle Bestimmung

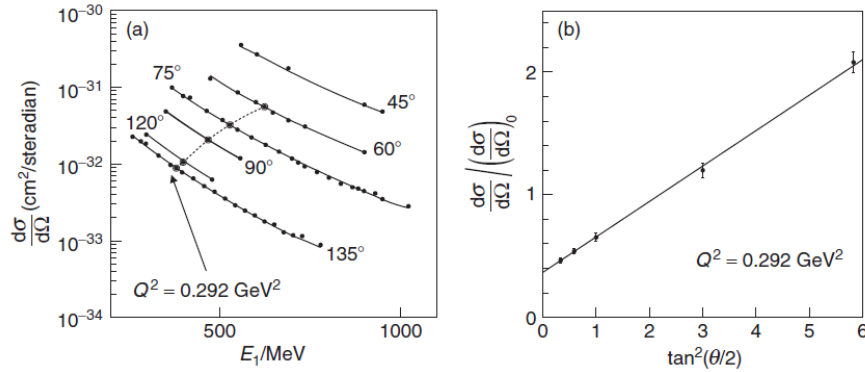


Abbildung VI.4: (links) Für verschiedene Elektronenenergien und Streuwinkel gemessene differentielle Wirkungsquerschnitte der elastischen ep-Streuung. Exemplarisch sind die Messungen, die einen  $Q^2$ -Wert von  $0.292 \text{ GeV}^2$  entsprechen, markiert. Die zugehörigen Messwerte sind dann in den Rosenbluth-Plot (rechts) eingezeichnet und erlauben die Bestimmung von  $G_E$  und  $G_M$  für diesen  $Q^2$ -Wert. Diese Prozedur muss dann für eine Vielzahl von  $Q^2$ -Werten wiederholt werden bis man die Formfaktoren als Funktion von  $Q^2$  gemessen hat. (entnommen Thomson, Daten von E. B. Hughes et al. (1965))

beider Größen:

Für Streuprozesse mit kleinem  $Q^2$  für die  $\tau \ll 1$  ist dominiert der elektrische Formfaktor  $G_E$  die Streuung. Für Prozesse mit hohem  $Q^2$ , für die  $\tau \gg 1$  ist, dominiert die magnetische Spin-Spin Wechselwirkung. Dividiert man den experimentellen Wirkungsquerschnitt durch den Mott-Wirkungsquerschnitt erhält man eine Geradengleichung  $y = A(Q^2) + B(Q^2) \cdot \tan^2 \frac{\theta}{2}$ :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \underbrace{\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau}}_{A(Q^2)} + \underbrace{2\tau G_M^2(Q^2)}_{B(Q^2)} \cdot \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

Die  $Q^2$ -abhängigen Formfaktoren  $G_M^2(Q^2)$  und  $G_E(Q^2)$  können mittels Streuexperimenten, die bei verschiedenen Elektronenenergien durchgeführt werden, bestimmt werden. Der differentielle Wirkungsquerschnitt wird als Funktion der Elektronenenergie und für verschiedene Streuwinkel bestimmt. Abbildung VI.4(links) zeigt einen Satz an Messungen für insgesamt 6 verschiedene Streuwinkel. Exemplarisch sind die Messpunkte, die einem bestimmten  $Q^2$  ( $Q^2 = 0.292 \text{ GeV}^2$ ) entsprechen, markiert. Diese Werte werden dann in Abbildung VI.4(rechts) in das Rosenbluth-Diagramm aufgetragen, um daraus  $G_E$  und  $G_M$  für dieses  $Q^2$  zu bestimmen. Abbildung VI.5 zeigt die so ermittelten elektrischen und magnetischen Formfaktoren des Protons. Die Messungen wurden erstmalig von der Gruppe von R. Hofstadter mittels Streuexperimenten an Wasserstoff durchgeführt



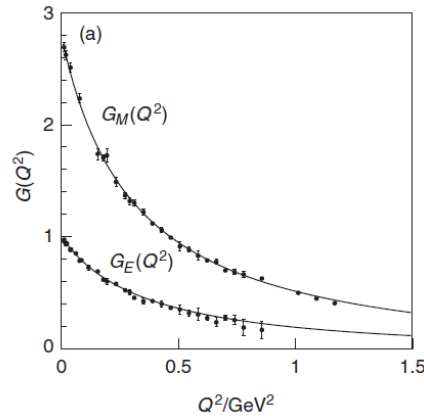


Abbildung VI.5: Elektrischer und magnetischer Formfaktor des Protons. Dividiert man den magnetischen Formfaktor mit  $g_p/2$  liegen die beiden Kurven exakt aufeinander. (entnommen Thomson, Daten von E. B. Hughes et al. (1965))

und 1956 veröffentlicht, sie sind aber in einer Vielzahl weiterer Streuexperimente in einem größeren  $Q^2$ -Bereich wiederholt und verbessert wurden. Abbildung VI.4 und VI.5 zeigen Messungen von E. B. Hughes et al. (1965).

Die Messung lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die beiden Proton-Formfaktoren gehorchen der Skalierung,

$$G_E(Q^2) = \frac{G_M(Q^2)}{g_p/2} = \frac{G_M(Q^2)}{2.79},$$

d.h., die elektrische und magnetische Ausdehnung des Protons ist gleich<sup>13</sup>.

- Die Proton-Formfaktoren lassen sich durch die sogenannte Dipol-Formel beschreiben,

$$G_E(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71 \text{ GeV}^2}\right)^{-2},$$

was der Fourier-Transformierten einer exponentiellen Dichtverteilung  $f(r) = e^{-ar}$  entspricht. Mit  $0.71 \text{ GeV}^2 = a^2 \hbar^2$  findet man den Wert  $a = 4.27 \text{ fm}^{-1}$

<sup>13</sup>Durch Elektronenstreuung an Deuterium und Vergleich mit Wasserstoff lassen sich auch die Formfaktoren des Neutrons ermitteln. Erwartungsgemäß findet man, dass der elektrische Formfaktor des Neutrons  $G_E^n(Q^2) = 0$ . Der magnetische Formfaktor  $G_M^n(Q^2)$  erfüllt ebenfalls die Skalierungsregel,

$$G_E(Q^2) = \frac{G_M^n(Q^2)}{|g_n/2|} = \frac{G_M^n(Q^2)}{1.91},$$

wie man aufgrund der Isospin-Symmetrie auch erwarten würde.

- Man kann zeigen, dass der mittlere quadratische Radius  $\langle r^2 \rangle$  der Ladungsdichte gerade durch die Ableitung des elektrischen Formfaktors nach  $Q^2$  für  $Q^2 = 0$  gegeben wird:

$$\langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \left. \frac{dG_E(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2=0}$$

Benutzt man für den Formfaktor die obige Dipolform so findet man:

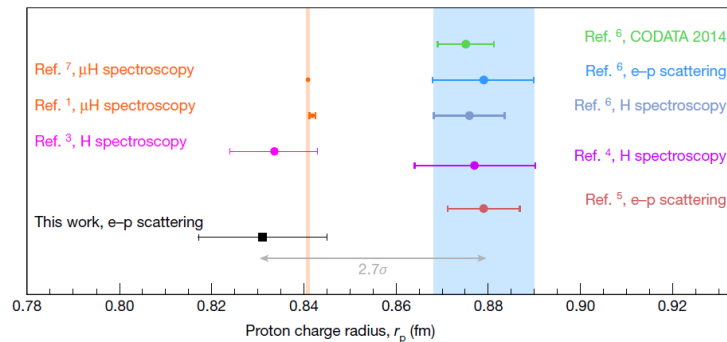
$$\langle r^2 \rangle = \frac{12}{a^2} = 0.658 \text{ fm}^2 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.81 \text{ fm}$$

Eine genaue Vermessung des Proton-Formfaktors (z.B. am Elektronenbeschleuniger MAMI in Mainz) zeigt dass die Dipolformel für kleine  $Q^2$  nur eine approximative Beschreibung liefert. Extrapoliert man die Steigung des tatsächlich gemessenen Formfaktors nach  $Q^2$ , so findet man einen mittleren quadratischen Radius  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.88$ . In den letzten Jahren gab es Diskussionen darüber, ob dieser Wert korrekt sei, oder ob der tatsächlich Protonradius nicht etwas kleiner sei (0.84 fm) - siehe dazu auch die Infobox „Das Proton Puzzle“.

**Das Protonradius-Puzzle:** Neben der elastischen ep-Streuung erlaubt auch die genaue Vermessung des Lamb-Shifts in Wasserstoff eine indirekte Bestimmung des mittleren quadratischen Radius der Proton-Ladungsverteilung. Der Lamb-Shift ist sehr sensitiv auf das effektive Protonpotential bei kleinen Abstände und damit auf  $\langle r^2 \rangle$ . Bis zum Jahr 2010 stimmten die spektroskopischen Messungen mit den Messungen aus der ep-Streuung überein und lieferten einen Weltmittelwert  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.8768(69)$  fm (CODATA).

Im Jahr 2010 wurde eine neue spektroskopische Bestimmung des Protonradius veröffentlicht, die an myonischem Wasserstoff durchgeführt wurde (Statt des Elektrons besitzt myonischer Wasserstoff ein Myon in der Hülle. Gemessen wurde ebenfalls der Lamb-Shift.). Aufgrund der 200 mal größeren Myonmasse ist das Myon sehr viel näher am Kern und der Effekt der Ladungsverteilung auf den Lamb-Shift ist weitaus größer. Das erlaubt eine weitaus genauere Bestimmung des Protonradius<sup>a</sup>. Der mit myonischem Wasserstoff gemessene Protonradius beträgt  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.84184(67)$  fm und weicht  $8\sigma$  vom CODATA-Wert ab. Die Messung wurde mittlerweile wiederholt und bestätigt (Antognini, 2013).

Um den Widerspruch zu den ep-Messungen besser zu verstehen, wurde am Jefferson-Lab in den USA eine neue ep-Messung des Protonradius durchgeführt (PRad Kollaboration, Xiong et al., Nature 575 (2019)). Die Kollaboration veröffentlichte einen Wert von  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.831(13)$  fm. Die Messungen sind in der folgenden Abbildung (Quelle: Nature 575 (2019)) zusammengefasst.



Ist das Proton-Puzzle damit gelöst? Auch wenn die neueren Messungen einen kleineren Proton-Ladungsradius finden, so ist der Widerspruch zu den alten Messungen nicht wirklich geklärt.

<sup>a</sup>R. Pohl et al. Nature 466 (2010).

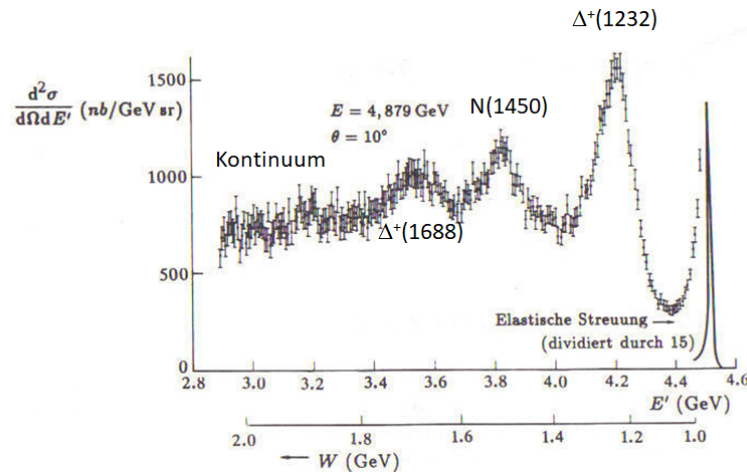


Abbildung VI.6: Differenzieller Wirkungsquerschnitt der Elektron-Proton-Streuung als Funktion der Energie  $E_f$  ( $E'$ ) des gestreuten Elektrons. Rechts sieht man den elastischen Peak, danach schließen sich Resonanz-Peaks (Streuung ist inelastisch) an. Bei großem Energietübertrag (kleines  $E_f$ ) findet man überraschenderweise eine Art Kontinuum. (entnommen: Povh et al., Teilchen und Kerne, ursprünglich aus W.Bartel et al., 1968)

## VI.4 Tief-inelastische Elektron-Proton Streuung

Im vorangehenden Abschnitt wurde die elastische Elektron-Proton-Streuung diskutiert. Dabei kam es weder zur Anregung innerer Freiheitsgrade des Protons noch ist das Proton dabei aufgebrochen. Diese Situation ändert sich, wenn der Energieübertrag auf das Proton  $\nu = E_i - E_f$  über die Rückstoßenergie hinaus zunimmt.

Abbildung VI.6 zeigt den gemessenen differentiellen ep-Wirkungsquerschnitt als Funktion der Energie  $E_f$  ( $E'$ ) des gestreuten Elektrons bei konstantem Streuwinkel  $\theta = 10^\circ$  und konstanter Anfangsenergie  $E_i = 4.979$  GeV der Elektronen. Links vom elastischen Peak kommt es zur Anregung des Protons und zu Resonanzzuständen. Hier erkennt man die  $\Delta^+$ -Resonanz, die N(1450)-Resonanz und die  $\Delta(1640)$ -Resonanz. Die Zustände zerfallen nach sehr kurzer Zeit und zwar in der Regel in ein Proton und ein zusätzliches Pion. Aus der Zerfallsbreite, die etwa 100 MeV beträgt, kann man die Lebensdauern der Resonanzen bestimmen. Typische Lebensdauern von  $5 \cdot 10^{-24}$  s, deuten darauf hin, dass die Resonanzen stark zerfallen.

Steigert man den Energieübertrag auf das Proton weiter, so kommt man in den Bereich eines Kontinuums. In diesem Bereich bricht das Proton in viele Teilchen auf. Der Wirkungsquerschnitt in diesem tief-inelastischen Bereich bleibt dabei aber annähernd konstant.

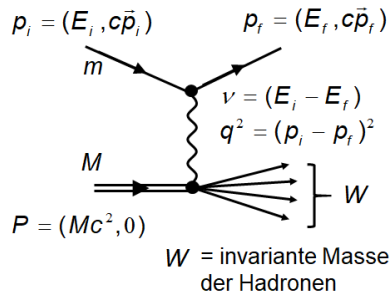
Die Vermessung der tief-inelastischen ep-Streuung führte zum Nachweise von punktförmigen Partonen, die wir heute Quarks nennen, als den Bausteinen des Protons. Die folgenden Abschnitte diskutieren die experimentellen Resultate der tief-inelastischen Streuung und erklären, wie daraus auf die Existenz punktförmiger Partonen geschlossen werden kann. Zuerst wird aber die Kinematik tief-inelastischer Streuung diskutiert.

### VI.4.1 Kinematik inelastischer Streuung

Die folgende Abbildung zeigt den Feynman-Graphen, für die tief-inelastische ep-Streuung. Das Proton bricht dabei auf und der hadronische Endzustand besitzt die invariante Masse  $W$ . Die Masse  $W$  muss immer größer als die Protonenmasse  $M_P$  sein: Baryonzahlerhaltung fordert, dass im Endzustand zumindest ein Baryon enthalten ist, wobei das Proton das leichteste Baryon ist. Alle weiteren hadronischen Teilchen, die entstehen, müssen zumindest ein Quark und Antiquark enthalten. Das leichteste Hadron ist das Pion.

Aus den 4er-Impulsen des ein- und auslaufenden Elektrons ergibt sich der 4er-Impulsübertrag  $q$ :

$$q = (p_i - p_f) = \underbrace{(E_i - E_f, c(\vec{p}_i - \vec{p}_f))}_{\nu}$$



Für das 4er-Produkt  $P \cdot q$  erhält man mit  $\nu$ :

$$P \cdot q = Mc^2\nu$$

Die invariante Masse des entstanden hadronischen Systems ergibt sich aufgrund von 4er-Impulserhaltung zu:

$$W^2c^4 = (P + q)^2 = M^2c^4 + 2P \cdot q + q^2$$

Mit  $2P \cdot q = 2Mc^2\nu$  erhält man für  $q^2$  (bzw.  $Q^2 = -q^2$ , wobei  $Q^2$  auch in der tief-inelastischen Streuung immer größer Null ist):

$$q^2 = W^2c^4 - M^2c^4 - 2Mc^2\nu = -Q^2 < 0$$

#### Bjorken-Variable $x$

Für den elastischen Fall, bei dem  $W = M$  ist, folgt:

$$\frac{Q^2}{2Mc^2\nu} = 1$$

Interessanter ist der inelastische Fall mit  $W > M$ . Hier definiert man die Bjorken-Variable  $x$ :

$$x = \frac{Q^2}{2Mc^2\nu} = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \quad \text{mit } 0 < x < 1$$

Die dimensionslose Variable  $x$ , die später für die Beschreibung der Partonen wichtig wird, ist ein Maß für die Elastizität des Streuprozesses. Wie man leicht zeigen kann, liegt  $x$  für inelastische Prozesse zwischen 0 und 1 (elastischer Fall).

Im Falle der inelastischen Streuung sind zur vollständigen Festlegung der Steu kinematik zwei Variablen notwendig. Beispiele sind  $(\theta, E_f)$ ,  $(Q^2, \nu)$  und  $(Q^2, x)$ .

#### VI.4.2 Der Wirkungsquerschnitte für tief-inelastische Streuung und Bjorken-Scaling

Ausgehend von der Wirkungsquerschnittsformel für die elastische Elektronstreuung an einem Dirac-Fermion (punktförmiges Spin  $\frac{1}{2}$  Teilchen) aus Abschnitt 3.2,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left(1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{mit } \tau = \frac{Q^2}{4c^4 M_p^2}$$

führt man in Analogie zu den Proton-Formfaktoren nun zwei Strukturfunktionen ein, die von zwei Variablen abhängen sollten (typischerweise sind das  $(Q^2, \nu)$  oder  $(Q^2, x)$ ). Der differentielle Wirkungsquerschnitt, nun abhängig von zwei Variablen, sollte sich dann mittels dieser Strukturfunktionen beschreiben lassen. Historisch wurden die dimensionsbehafteten Strukturfunktionen  $W_1(Q^2, \nu)$  und  $W_2(Q^2, \nu)$  eingeführt. Mit ihnen erhält man dann den doppelt-differentiellen Wirkungsquerschnitt für die tief-inelastische Streuung:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_f} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left(W_2(Q^2, \nu) + 2W_1(Q^2, \nu) \tan^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Die Strukturfunktionen parametrisieren den Effekt der inelastischen Wechselwirkung. Wie man sich leicht überzeugt, besitzen  $W_1$  und  $W_2$  die Dimension 1/Energie. Heute ist es üblich dimensionslose Strukturfunktionen  $F_1 = Mc^2 W_1$  und  $F_2 = \nu W_2$  zu wählen.  $F_1$  und  $F_2$  werden üblicherweise als Funktionen von  $(Q^2, x)$  angegeben:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_f} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \frac{1}{\nu} \left(F_2(Q^2, x) + F_1(Q^2, x) \frac{Q^2}{xM^2c^4} \tan^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Der Faktor  $\frac{Q^2}{xM^2c^4}$  im zweiten Term ergibt aus  $2W_1 = \frac{F_1}{Mc^2}$  und der Definition von  $x$ . Dieser letzte Ausdruck für den differentielle Wirkungsquerschnitt ist ziemlich unpraktisch, da er alle möglichen Variablen, die den Streuprozesse beschreiben, enthält. In der Regel wird der differentielle Wirkungsquerschnitt als Funktion von  $Q^2$  und  $x$  ( $\frac{d^2\sigma}{dQ^2 dx}$ ) angegeben. Die Form ist aber gut geeignet, um im nächsten Abschnitt die Strukturfunktionen zu interpretieren.

Unabhängig von der genauen Parametrisierung sagt die phänomenologische Beschreibung voraus, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt von zwei Variablen (z.B.  $Q^2$  und  $x$ ) explizit abhängen sollte. Die Messung des Wirkungsquerschnitt hat aber eine Überraschung ergeben.

### **Das SLAC-MIT-Experiment - Bjorken-Skaling:**

Mit dem Bau des 2 Meilen (3.2 km) langen Linearbeschleuniger in Stanford (SLAC) stand ab 1967 ein Beschleuniger zur Verfügung, der Elektronen bis zu einer Energie von 20 GeV beschleunigen konnte. In einer gemeinsamen Kollaboration von SLAC und MIT wurde unter Leitung der drei Physiker J. Friedman, H. Kendall und R. Taylor ein Elektron-Streuxperiment aufgebaut, das die Untersuchung des Protons bei großen Energieüberträgen  $\nu = E_i - E_f$  und großem  $Q^2$  erlaubte. Der experimentelle Aufbau bestand aus zwei Detektorarmen, die die an einem Wasserstoff-Target gestreuten Elektronen bei verschiedenen Streuwinkeln vermessen konnten. Beide Detektorarme dienten gleichzeitig auch als Spektrometer, um die Impulse der gestreuten Elektronen genau zu vermessen. Dabei war der etwas kürzere Detektorarm in der Lage, Impulse bis 8 GeV zu messen, der längere Detektorarm konnte hingegen Impulse bis 20 GeV bestimmen. Abbildung VI.7(oben) zeigt eine Prinzipskizze des Aufbaus sowie eine Skizze des 8-GeV-Spektrometerarms. Im unteren Teil von Abbildung VI.7 ist ein Foto der Versuchsanordnung gezeigt. Im Vordergrund sieht man das 8-GeV-Spektrometer, im Hintergrund kann man das 20-GeV-Spektrometer erkennen.

Die in Abbildung VI.8 gezeigten experimentellen Resultate (Breidenbach et al., 1969) waren überraschend. Die für verschiedene  $Q^2$  und  $x$  (bzw.  $\nu$ ) gemessenen differentiellen Wirkungsquerschnitte waren annähernd konstant. Die daraus abgeleiteten Strukturfunktionen  $W_1$  und  $W_2$  waren nur abhängig von  $x$  und für ein festes  $x$  (weitestgehend) unabhängig von  $Q^2$ . Ausgedrückt in den heute verwendeten Strukturfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  fand man also:

$$\begin{aligned} F_1(Q^2, x) &= F_1(x) \\ F_2(Q^2, x) &= F_2(x) \end{aligned}$$

Die Abhängigkeit der Strukturfunktion nur von der Variablen  $x$  bezeichnet man als Bjorken-Scaling<sup>14</sup>.

Die Beobachtung des Scaling-Verhaltens war überraschend: Während die elastischen Formfaktoren des Protons eine sehr starke  $Q^2$ -Abhängigkeit aufweisen (Abbildung VI.8 zeigt auch den Verlauf des elastischen Wirkungsquerschnitts, den man aufgrund der Dipol-Form des Proton-Formfaktors erwarten würde), sind die Strukturfunktionen quasi unabhängig von  $Q^2$ . Man hat damals sehr schnell verstanden, dass das Scaling-Verhalten bei der inelastischen Streuung als das Resultat elastischer Streuung an punktförmigen

<sup>14</sup>Die Strukturfunktionen bleiben invariant, wenn man die beteiligten 4er-Impulse skaliert - entscheidend für den Prozess ist nur  $x = \frac{Q^2}{2P_q}$

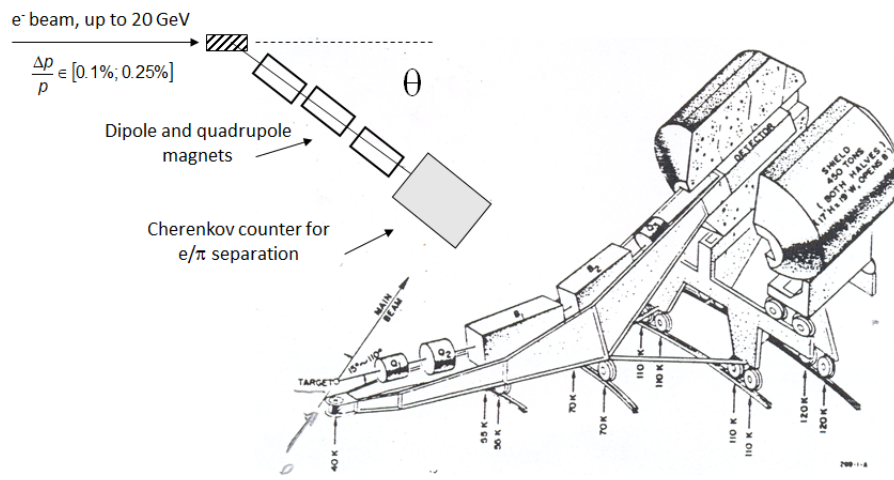


Abbildung VI.7: (oben) Prinzip Skizze (links) und des SLAC-MIT ep-Experiments und eine Skizze des 8-GeV-Spektrometerarms. (unten) Foto des SLAC-MIT-Experiments in der Experimentierhalle (Quelle: Taylor, DIS).



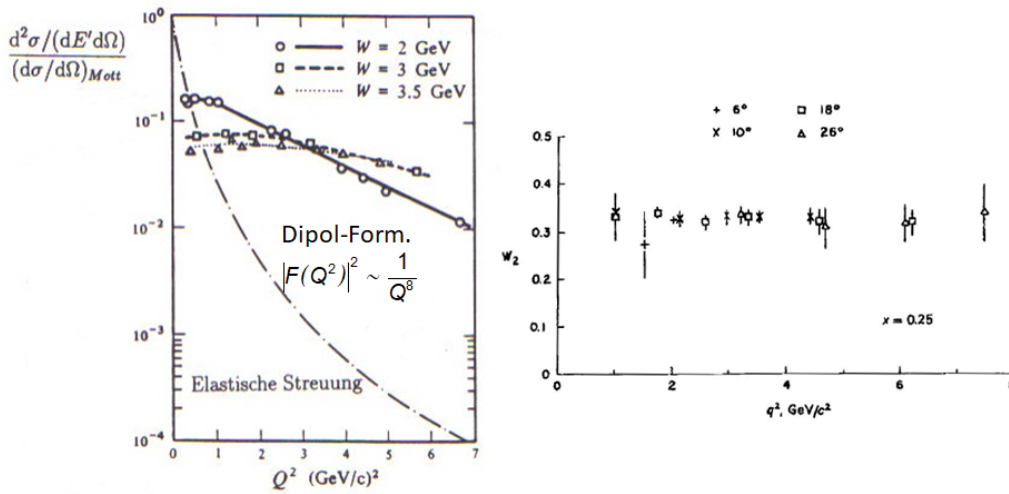


Abbildung VI.8: Resultate des SLAC-MIT ep-Experiments: (links) differentieller Wirkungsquerschnitt Eingezeichnet ist auch der Wirkungsquerschnitt, den man für elastische ep-Streuung erwarten würde. (rechts) Strukturfunktion  $W_2$  als Funktion von  $Q^2$  für festes  $x = 0.25$ .

Bausteinen des Protons, den sogenannten Partonen, interpretiert werden kann. Diese Arbeiten gehen auf J. Bjorken zurück, der das Scaling-Verhalten bereits 1969 beschrieben hat.

Ein weiteres wichtiges Resultat, war die Beobachtung, dass die Strukturfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  nicht unabhängig von einander sind, sondern dass zwischen ihnen die Beziehung

$$F_2(x) = 2xF_1(x)$$

besteht. Wie im Folgenden klar werden wird, zeigt diese Beziehung, dass die Partonen Spin  $\frac{1}{2}$  Teilchen sein müssen.

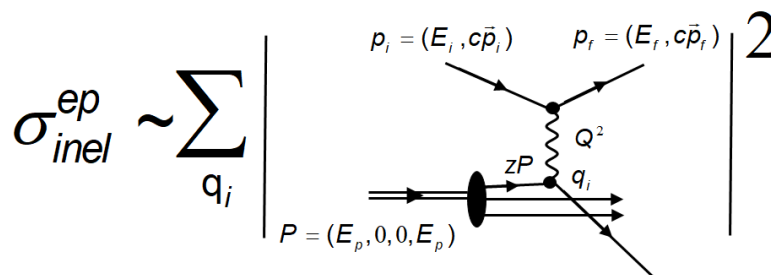
Historisch handelt es sich also bei beiden Beobachtungen um den experimentellen Nachweis, dass das Proton aus Spin  $\frac{1}{2}$  Bausteinen - den Quarks - besteht, die bereits aufgrund der Hadron-Symmetrien (Isospin und Strangeness) im statischen Quarkmodell postuliert wurden. J. Friedman, H. Kendall und R. Taylor erhielten für ihre Arbeiten 1990 den Nobelpreis für Physik. Der folgende Abschnitt führt das Parton-Modell ein und gibt eine Interpretation der Strukturfunktionen.

### VI.4.3 Das Parton-Modell

Bevor Quarks als die punktförmigen Bausteine des Protons akzeptiert wurden, schlug R. Feynman das Parton-Modell vor.

Das Proton besteht in diesem Modell aus punktförmigen quasi-freien Bausteinen, den Partonen (Quarks). Zur Beschreibung des Protons im Parton-Bild, begibt man sich in ein Bezugssystem, in dem das Proton einen unendlich großen Impuls  $\vec{P}$  besitzt (infinite momentum frame, IMF). In diesem System kann man die Protonmasse vernachlässigen, und der 4er-Impuls des Protons ist einfach  $P = (E_p, 0, 0, E_p)$ . Das Proton kann man sich dann als einen Strom kollinearere Partonen vorstellen. Jedes Parton trägt dabei einen Anteil  $z$  des Protonimpulses  $P$ .

Die tief-inelastische Elektron-Proton Streuung wird in diesem Modell als ein elastischer Streuprozesse an einem quasi-freien punktförmigen Spin- $\frac{1}{2}$  Parton (Quark) verstanden. Diesen Sachverhalt zeigt die folgende Abbildung anschaulich. Der tief-inelastische Wirkungsquerschnitte ist in diesem Bild gleich der Summe aller Wahrscheinlichkeiten an einem Parton zu streuen.



Elastische Streuung an einem Parton mit Impulsanteil  $z$  ist - wie man leicht zeigen kann - nur dann möglich, wenn der Impulsanteil  $z$  des Partons gerade gleich der Bjorken-Variablen  $x$  ist:

$$z = x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{2Mc^2\nu}$$

Das gestreute Parton verlässt das Proton und bildet Hadronen. Der Proton-Rest bildet ebenfalls Hadronen.

Inelastische ep-Streuung mit einem Bjorken  $x = \frac{Q^2}{2Mc^2\nu}$  kann also als elastische Streuung an einem Parton interpretiert werden, das gerade den 4er-Impulsanteil  $xP$  des Protons trägt. Durch die Streuinkematik kann man  $x$  wählen, und so kann man von „außen“ den Impulsanteil der Partonen festlegen, an denen man elastisch streuen möchte. Das eröffnet die Möglichkeit, die Impulsverteilung der Partonen zu bestimmen. Der gemessene inelastische Wirkungsquerschnitt für einen  $x$ -Wert ist proportional zur Wahrschein-

lichkeitsdichte  $f_{q_i}(x)$  ein Parton  $q_i$  mit Impulsanteil  $x$  im Proton vorzufinden:  $f_{q_i}(x)dx$  ist dann die Wahrscheinlichkeit ein Parton mit  $x \in [x, x + dx]$  zu finden.

Benutzt man den Dirac-Wirkungsquerschnitt für die elastische Elektronen-Streuung an einem punktförmigen Spin  $\frac{1}{2}$  Teilchen, so ergibt sich mit der Partondichte  $f_{q_i}(x)$  der Wirkungsquerschnitt für die inelastische ep-Streuung im Parton-Modell<sup>15</sup>:

$$\frac{d^2\sigma_{\text{inel}}^{ep}}{dQ^2 dx} = \left( \frac{d\sigma}{dQ^2} \right)_{\text{Mott}} \cdot \sum_{q_i} e_{q_i}^2 \cdot f_{q_i}(x) \left( 1 + \frac{Q^2}{2x^2 M^2 c^4} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Hierbei bezeichnet  $e_{q_i}$  die Ladung des Partons  $q_i$ . Durch Vergleich mit dem phänomenologischen Ausdruck, der die Strukturfunktionen enthält, findet man für diese<sup>16</sup>:

$$\begin{aligned} F_2(x) &= x \sum_{q_i} e_{q_i}^2 \cdot f_{q_i}(x) \\ 2xF_1(x) &= x \sum_{q_i} e_{q_i}^2 \cdot f_{q_i}(x) \end{aligned}$$

D.h., die Strukturfunktionen  $F_2(x)$  und  $F_1(x)$  beschreiben die Partondichten (abhängig von  $x$ ) im Proton.

Die Dirac-Formel beschreibt Spin  $\frac{1}{2}$  Teilchen. Der Spin legt insbesondere das Verhältnis zwischen dem Mott-Anteil und Spin-Flip-Anteil im Wirkungsquerschnitt fest. Aufgrund der Ausdrücke, die man für die beiden Strukturfunktionen unter der Annahme von Spin  $\frac{1}{2}$  Partonen erhalten hat, ergibt sich:

$$2xF_1(x) = F_2(x)$$

Diese Beziehung, die als Callan-Gross-Relation bekannt ist, wurde bereits im SLAC-MIT Experiment experimentell bestätigt - siehe dazu Abbildung VI.9. Quarks (Partonen) tragen also tatsächlich Spin  $\frac{1}{2}$ . Hätten Quarks beispielsweise Spin 0, wäre  $F_1(x) = 0$ .

Bisher haben wir implizit angenommen, dass es sich bei den Partonen um die drei Quarks handelt, die wir in Kapitel 2 als Bausteine des Protons eingeführt hatten. Diese Quarks bezeichnet man als Valenzquarks. Weiterhin haben wir die Valenzquark als quasifrei betrachtet, d.h. wir haben Wechselwirkungen untereinander vernachlässigt. Zwischen den Quarks werden aber ständig Gluonen ausgetauscht, um sie im Proton zu binden. Das führt zum einen dazu, dass die Valenzquarks keinen festen Bruchteil des Protonimpulses tragen (1/3 wenn keine Gluonen vorhanden wären), sondern, dass die Quarks eine breite Impulsverteilung besitzen. Zum anderen können die ausgetauschten oder emittierten Gluonen im Rahmen von Vakuumfluktuationen Quark-Anti-Quarkpaare bilden. Diese

<sup>15</sup>Für die Partonmasse im Dirac-Wirkungsquerschnitts wird dabei  $m_q = xM$  - die anteilige Masse am Proton - benutzt.

<sup>16</sup>Hier muss in der phänomenologischen Formel des doppelt-differentiellen Wirkungsquerschnitts noch eine Variablen-Transformation durchgeführt werden  $E_f$  bzw.  $\nu \rightarrow x$ . Dann folgt  $\frac{F_2}{x} = \sum_{q_i} e_{q_i}^2 \cdot f_{q_i}(x)$ .

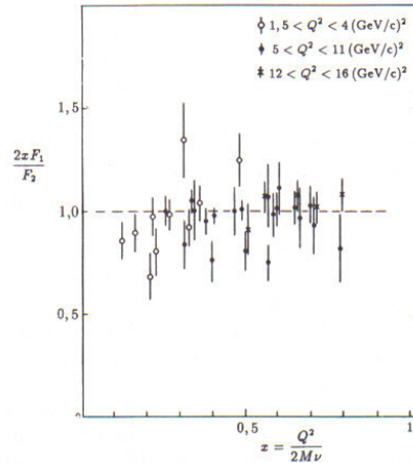


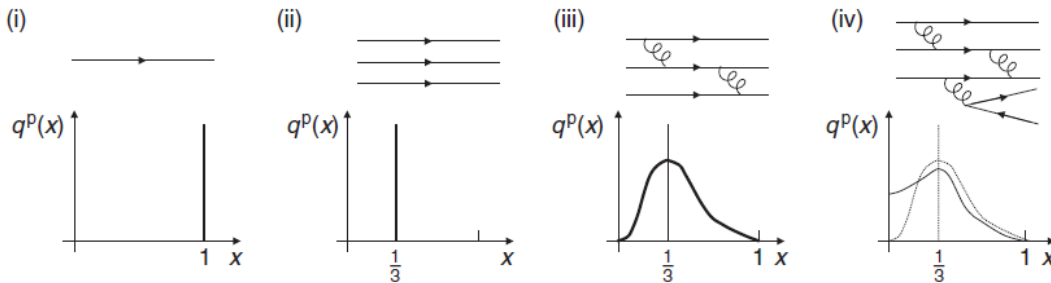
Abbildung VI.9: Callan-Gross Relation:  $2xF_1(x)/F_2(x) = 1$ . Quelle: ???

paarweise gebildeten Quarks bzw. Antiquarks bezeichnet man als Seequarks bzw. See-Antiquarks.

Die Strukturfunktion  $F_2(x)$  muss also nicht nur die Valenzquarks sondern auch die See(anti)quarks der entsprechenden Quarkspezies  $q_i$  berücksichtigen:

$$F_2(x) = x \sum_{q_i} e_{q_i}^2 \cdot (f_{q_i}(x) + f_{\bar{q}_i}(x))$$

Die folgende Abbildung zeigt für vier einfache Modelle des Protons die zu erwartende Verteilung der Partondichte  $f_{q_i}(x)$ : (i) Proton ist ein punktförmiges Teilchen, (ii) Proton besteht aus drei Valenzquarks, die nicht wechselwirken, (iii) Proton besteht aus drei Valenzquarks die miteinander wechselwirken, (iv) durch Gluon-Splitting befinden sich neben den drei Valenzquarks auch noch Seequarks im Proton (Bemerkung: Die beiden Szenarien (iii) und (iv) ignorieren in der Skizze, dass etwa 50% des Protonimpulses nicht von den Quarks sondern von den Gluonen getragen werden - s.u.).



Die Strukturfunktion  $F_2$  des Protons wurde in eine Vielzahl von unterschiedlichen Streuexperimenten gemessen:  $ep$ -,  $\mu p$ -,  $\nu p$ -Streuung<sup>17</sup>. Insbesondere die beiden Experimente H1 und ZEUS, die von 1992 bis 2007 am Elektron-Proton-Beschleuniger HERA<sup>18</sup> am DESY in Hamburg betrieben wurden, haben sehr maßgeblich zur genauen Vermessung der Strukturfunktion beigetragen. Ein typisches Streuereignis bei H1 ist in Abbildung VI.10 gezeigt. Mit den beiden HERA-Detektor konnten neben dem gestreuten Elektron (Positron) auch die Teilchen des hadronischen Systems detektiert und vermessen werden.

Die Einbeziehung der Resultate der  $\nu p$ -Streuung erlaubt es die Beiträge der verschiedenen Quark- und Antiquark-Spezies zur Strukturfunktion  $F_2(x)$  einzeln zu bestimmen. Die ermittelten Beiträge sind in Abbildung VI.10 gezeigt und können wie folgt beschrieben werden:

- Die Partondichteverteilung der Valenzquarks haben ein Maximum zwischen  $x = 0.15$  und  $x = 0.2$ , dabei ist die Verteilung für u-Valenzquarks im Peak etwa doppelt so hoch, wie die für d-Valenzquarks.
- Die Seequarks findet man bei kleinem  $x$  - die Seequark- und die Seeantiquark-Verteilung sind gleich.
- Für den Impulsanteil des Protons der von allen Quarks getragen wird, findet man  $\int F_2(x)dx \approx 0.5$  und nicht wie man naiv erwarten würde 1.
- Etwa 50% des Protonimpulses wird daher nicht durch die Quarks sondern durch die Gluonen getragen.

Berücksichtigt man, dass das Proton eine Vielzahl von Gluonen enthalten muss, ist es umso erstaunlich, dass sich die Spins aller Partonen (Quarks und Gluonen) zum Gesamtspin  $\frac{1}{2}$  des Protons addieren.

---

<sup>17</sup>Bei der Neutrino-Protonstreuung wirkt natürlich nicht die elektromagnetische Wechselwirkung sondern die schwache Wechselwirkung

<sup>18</sup>Bei HERA kollidierten Elektronen oder Positronen mit einer Energie von 40 GeV mit Protonen einer maximalen Energie von 920 GeV.

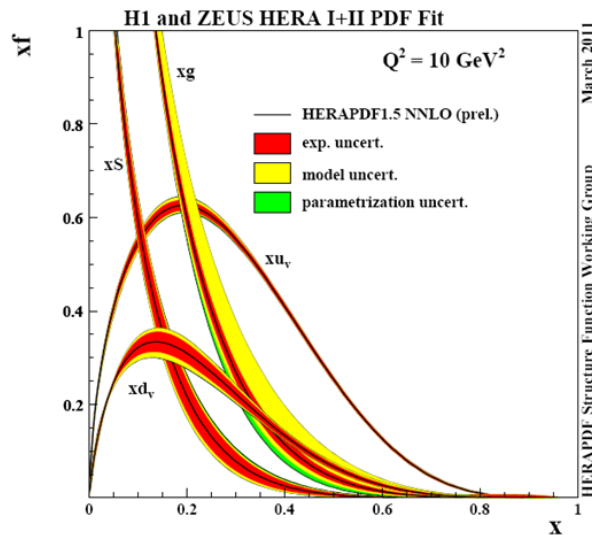
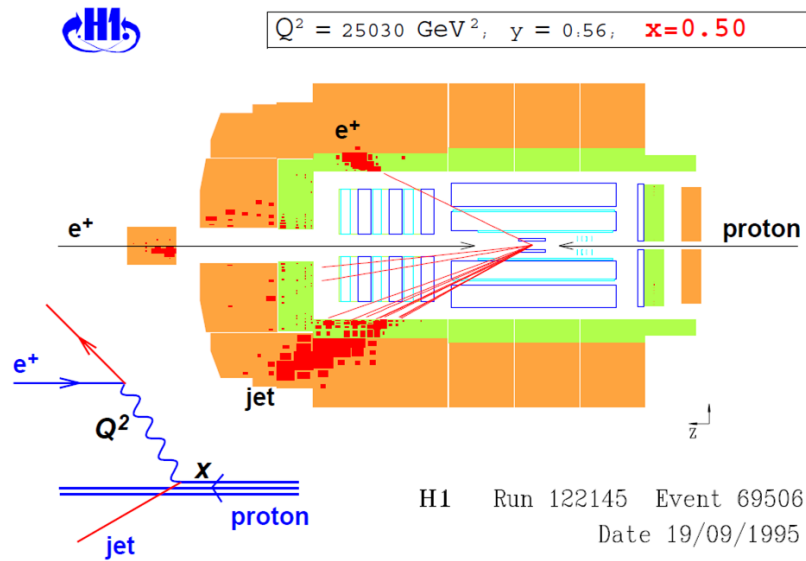


Abbildung VI.10: (oben) Positron-Proton( $e^+p$ )-Streueignis aufgezeichnet mit dem H1-Detektor bei HERA bei  $Q^2 = 25030 \text{ GeV}^2$  und  $x = 0.50$ . Im gezeigten Feynman-Graph wurde für das Proton Anfangs- und Endzustand verdreht, um besser die Ereignissignatur zu repräsentieren. Man sieht deutlich, wie das gestreute Quark einen Jet (s.u.) bildet. Der Protonrest hinterlässt Energieeinträge, die bei kleinen Winkeln erkennbar sind. (unten) Aus den Messdaten der HERA-Experimente H1 und Zeus sowie der Streuergebnisse einer Vielzahl weiterer Experimente wurden die Partondichten  $xf(x)$  für verschiedene Partonen ermittelt. Gezeigt sind die Beiträge der Valenzquarks  $u_v$  und  $d_v$ , der Seequarks  $S$  und der Gluonen  $g$ .

Infinite Momentum Frame: Bjorken  $x$  und Partonimpulsanteil  $z$

Bei der Diskussion der tief-inelastischen Streuung im Partonmodell wurde benutzt, dass das Elektron nur an Quarks streuen kann, die gerade den Proton-Impulsanteil  $z = x$  tragen. Dieser Zusammenhang soll hier kurz hergeleitet werden.

Der 4er-Impuls des gestreuten Quark  $p'_{q_i}$  ergibt sich aus der Summe der 4er-Impulse des Quarks  $q_i$  vor der Streuung ( $zP$ ) und dem 4er-Impuls des Photons  $q$ :

$$p'_{q_i}{}^2 = (zP + q)^2 = 0$$

Im IMF ist  $p'_{q_i}{}^2 = 0$ , da alle Massen vernachlässigt werden können. Damit findet man:

$$z^2 P^2 + 2zP \cdot q + q^2 = 0$$

Weiter ist  $P^2 = 0$  (Im IMF kann auch die Protonmasse gegenüber allen Impulsen vernachlässigt werden.). Damit erhält man mit  $x = \frac{Q^2}{2P \cdot q}$ :

$$z = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = x$$

Die Streuung an Quarks ist also nur möglich, wenn diese gerade einen Impulsanteil  $z$  tragen, der dem Bjorken  $x$  der Streuung entspricht.

## Kapitel VII

# Starke Wechselwirkung

Die starke Wechselwirkung wird durch Gluonen vermittelt. Sie wirkt zwischen Teilchen, die eine Farbladung tragen. Dazu gehören die Quarks aber auch die Gluonen selbst. Die starke Wechselwirkung bindet die Quarks in Hadronen und ist auch Ursprung der Kernkraft, die die Nukleonen im Kern zusammenhält. In diesem Kapitel werden im ersten Abschnitt Farbladung und Gluonen und ihre experimentelle Evidenz diskutiert. Ausgehend von der Gluon-Selbstkopplung behandelt der zweite Abschnitt die Bindung der Quarks in Hadronen und die starke Kopplungskonstante  $\alpha_s$ .

### VII.1 Farbladung und Gluonen

Entsprechend der elektromagnetischen Wechselwirkung, die zwischen elektrisch geladenen Teilchen wirkt, wirkt die starke Wechselwirkung zwischen Teilchen mit Farbladung unter Austausch von Gluonen. Die Farbladung ist eine Teilcheneigenschaft der Quarks, (Quantenzahl) die in 3 Werten vorliegt, bzw. für Antiquarks in drei verschiedenen Antifarben vorliegt. Die starke Wechselwirkung ist invariant unter Transformationen im Farbraum<sup>1</sup>, wobei die Farbladungen ineinander übergehen. Typischerweise benutzt man für Quarks die Werte  $r, g, b$  (rot, grün, blau) und für Antiquarks entsprechend  $\bar{r}, \bar{g}$  und  $\bar{b}$  (anti-rot, anti-grün, anti-blau).

Im Gegensatz zu den Photonen der elektromagnetischen Wechselwirkung tragen die Gluonen selbst ebenfalls eine Farbladung und zwar jeweils eine Kombination aus Farbe und Antifarbe ( $3 \otimes \bar{3}$ ). Insgesamt findet man 8 Farbkombinationen, die ein farbgeladenes

---

<sup>1</sup>Es handelt sich um SU(3)-Transformationen. Und die Farbladung ist die entsprechende erhaltene generalisierte Ladung, die mit der Symmetrie verbunden ist.



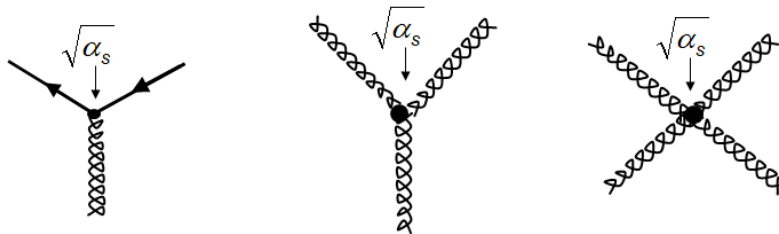
Oktett bilden<sup>2</sup>

$$r\bar{g}, r\bar{b}, g\bar{r}, g\bar{b}, b\bar{r}, b\bar{g}, \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}), \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}),$$

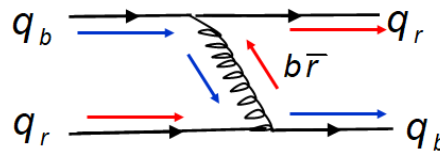
und die man mit den Farbladungen der 8 Gluonen identifizieren kann. Die neunte Farbkombination bildet ein farbneutrales Singulett und nimmt an der starken Wechselwirkung nicht teil:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})$$

Aufgrund ihrer Farbladung können Gluonen eine Selbstkopplung eingehen. Aus diesem Grund findet man statt des einen Vertex in der elektromagnetischen Wechselwirkung (Basiselement für QED-Feynmangraphen, s. Kapitel 3), in der starken Wechselwirkung drei mögliche Vertices (Basiselemente für QCD-Feynmangraphen):



Da die Farbe in der starken Wechselwirkung eine Erhaltungsgröße ist (s.o.), ist die Farbe auch an jedem Vertex erhalten, so dass nicht alle Farbkombinationen möglich sind. Es ist deshalb instruktiv, sich den Farbfluss in einem Feynman-Diagramm der starken Wechselwirkung anzuschauen. Als Beispiel ist der Austausch eines Gluons zwischen zwei Quarks gezeigt, wobei man für die beiden Quarks einen der möglichen Farbanfangszustände wählt:



### VII.1.1 Evidenz für Farbladung als zusätzlicher Quantenzahl der Quarks

Da Quarks nicht als freie Teilchen messbar sind, und Hadronen immer nur als farbneutrale Teilchen existieren, kann man die Farbladung als eine zusätzliche Quantenzahl der

<sup>2</sup>Die Argumentation ist analog wie bei der Isospin-Kopplung für einen Nukleon-Nukleon-Zustand: Es gibt ein  $I = 1$  Isospintriplett mit Zuständen  $I_3 = +1, 0, -1$  sowie ein Isospin-Singulett ohne Isospin ( $I = 0$ ) mit  $I_3 = 0$ .

Quarks nur indirekt nachweisen. Im Folgenden werden zwei experimentelle Evidenzen diskutiert.

### Quarkwellen-Funktion des $\Delta^{++}$ -Baryons

Das  $\Delta^{++}$ -Baryon ( $J^P = \frac{3}{2}^+$ ) besteht aus drei u-Valenzquarks und bildet mit drei anderen  $\Delta$ -Teilchen ein Isospin-Quartett. Unter Berücksichtigung der bekannten Quarkeigenschaften besteht die Wellenfunktion, die die drei Quarks im  $\Delta^{++}$  beschreibt, aus einem Raum-, einem Flavor(alternativ auch Isospin)- und einem Spinanteil:

$$\psi_{\Delta^{++}} = |u \uparrow u \uparrow u \uparrow \rangle = \psi_{\text{Raum}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \cdot \phi_{\text{Flavor}}(uuu) \cdot \chi_{\text{Spin}}(\uparrow\uparrow\uparrow)$$

Die Gesamtwellenfunktion der drei Quarks (Spin  $\frac{1}{2}$ ) muss antisymmetrisch gegen Vertauschung sein. Der Raumanteil ist symmetrisch gegen Vertauschung, da es sich bei den  $\Delta$ -Teilchen um den niedrigsten relativen Drehimpulszustand  $\ell = 0$  der drei Quark handelt. Flavor- und Spinanteil sind ebenfalls symmetrisch gegen Vertauschung, da die drei Quarks im gleichen Zustand sind. Damit wäre die Gesamtwellenfunktion ebenfalls symmetrisch gegen Vertauschung, was aber das verallgemeinerte Pauli-Prinzip für Fermionen verletzen würde. Es muss also eine weitere Quantenzahl existieren, in denen sich die drei Quarks unterscheiden, und die die Konstruktion eines antisymmetrischen Wellenanteils erlaubt. Die Farbladung mit der Bedingung, dass das Baryon farbneutral ist, erfüllt diese Bedingung. Für die Farbwellenfunktion kann man dann mit den drei Farben  $r$ ,  $g$  und  $b$  die folgende antisymmetrische Wellenfunktion konstruieren:

$$\xi_{\text{Farbe}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sum_{i,j,k=\{r,g,b\}} \epsilon_{ijk} u_i u_j u_k$$

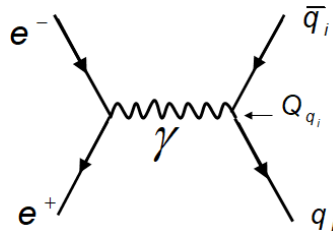
$\epsilon_{ijk}$  ist der antisymmetrische Tensor. Mit dieser Farbwellenfunktion erhält man dann eine antisymmetrische Gesamtwellenfunktion:

$$\psi_{\Delta^{++}} = \psi_{\text{Raum}} \cdot \phi_{\text{Flavor}} \cdot \chi_{\text{Spin}} \cdot \xi_{\text{Farbe}}$$

Das verallgemeinerte Pauli-Prinzip verlangt also die Einführung einer neuen Quantenzahl.

### Die $e^+e^-$ -Annihilation in Hadronen

Der Wirkungsquerschnitt für die  $e^+e^-$ -Annihilation in ein Fermion-Paar ist in Kapitel 3 berechnet worden. Bei der Annihilation in Hadronen wird ein  $q\bar{q}$ -Paar produziert, aus dem sich die Hadronen entwickeln. Berechnet man den Wirkungsquerschnitt, so muss man zum einen berücksichtigen, welche Quark-Paare bei einer gegebenen Schwerpunktsenergie  $E_{\text{CMS}}$  kinematisch erzeugt werden können. Zum anderen muss man aber auch die Farbe der erzeugten Quarks berücksichtigen: Die Farbe der Quarkpaare ist nicht beobachtbar so müssen alle möglichen Farbzustände berücksichtigt werden. Der Wirkungsquerschnitt erhöht sich deshalb um einen Faktor  $N_C$ , der der Zahl der möglichen Farben entspricht.



Die Abbildung zeigt zur Erinnerung nochmals den relevanten Feynmangraphen für die Produktion eines Quarkpaares. Benutzt man den in Kapitel 3 bestimmten Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\mu\mu} = \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$  so erhält man für den Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\text{had}}$  für die  $e^+e^-$ -Annihilation in Hadronen,

$$\sigma_{\text{had}} = \sigma_{\mu\mu} \cdot N_C \cdot \sum_{q_i} Q_{q_i}^2,$$

wobei sich die Summe über alle kinematisch möglichen Quarktypen (u, d, s, c, b, t) erstreckt. Experimentell wird das Verhältnis  $R_{\text{had}}$  bestimmt, das in der Regel einen kleineren systematischen Fehler aufweist und zudem direkt die Zahl der Farben misst:

$$R_{\text{had}} = \frac{\sigma_{\text{had}}}{\sigma_{\mu\mu}} = N_C \cdot \sum_{q_i} Q_{q_i}^2$$

Abhängig von der  $e^+e^-$ -Schwerpunktsenergie  $E_{\text{CMS}}$  können verschiedene Quarkspezies produziert werden, was die Vorhersage von  $R_{\text{had}}$  abhängig von  $E_{\text{CMS}}$  macht<sup>3</sup>:

Energiebereich	Quarks	$R_{\text{had}} =$
$E_{\text{CMS}} < 3 \text{ GeV}$	$u, d, s$	$3 \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = 2$
$2m_c c^2 < E_{\text{CMS}} < 2m_b c^2 \approx 10 \text{ GeV}$	$u, d, s, c$	$3 \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) = \frac{10}{3}$
$2m_b c^2 < E_{\text{CMS}} \lesssim 50 \text{ GeV}$	$u, d, s, c, b$	$3 \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{11}{3}$

Die Größen  $m_c$  und  $m_b$  bezeichnen hier die Quarkmassen der  $c$ - und  $b$ -Quarks. Um sie zu erzeugen, muss die Schwerpunktsenergie größer als zweimal die jeweilige Ruheenergie sein. Der explizite Faktor 3 beschreibt die Zahl der verschiedenen Farben, in denen die Quarks produziert werden können.

Im Experiment hadronisiert das produzierte Quark-Antiquark-Paar, das im Schwerpunktsystem Back-to-back auseinander fliegt, in zwei Hadronen-Bündel, sogenannte Jets, deren Achsen mit der ursprünglichen Quarkrichtung übereinstimmen<sup>4</sup>. Diese Ereignisse sind relativ leicht als 2-Jet-Ereignisse im Detektor zu erkennen und zu selektieren. Abbildung VII.1 zeigt ein 2-Jet-Ereignis, das mit dem Opal-Detektor am  $e^+e^-$ -Beschleuniger LEP bei einer Schwerpunktsenergie von 91 GeV aufgezeichnet wurde.

<sup>3</sup>Die Vorhersage von  $R_{\text{had}}$  im Rahmen der QED macht nur Sinn bis zu Schwerpunktsenergien von etwa 50 GeV. Bei höheren Energien wird der Einfluss des Austausch eines Z-Bosons signifikant, der das QED-Verhältnis von  $R_{\text{had}}$  verändert. Das ist in Abbildung VII.2 ebenfalls zu sehen.

<sup>4</sup>Die Entstehung der Hadronen-Jets wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

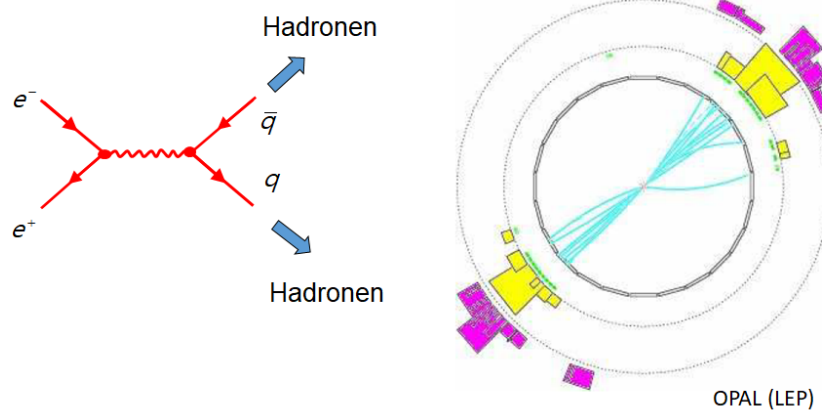


Abbildung VII.1: (links) Das in der  $e^+e^-$ -Annihilation entstandene Quark-Antiquark-Paar hadronisiert in zwei Teilchen-Jets, deren Achsen mit den Richtungen der Quarks übereinstimmen. (rechts) 2-Jet-Ereignis, aufgezeichnet mit dem OPAL-Experiment am  $e^+e^-$ -Beschleuniger LEP bei einer Schwerpunktsenergie von 91 GeV.

Aus der Zahl der detektierten hadronischen Ereignisse und der Zahl der detektierten Myonpaar-Ereignisse lässt sich dann  $R_{\text{had}}$  bestimmen. Eine große Zahl von Experimenten an verschiedenen  $e^+e^-$ -Beschleunigern hat die Größe  $R_{\text{had}}$  über einen sehr großen Energiebereich bestimmt. Die Resultate sind in Abbildung VII.2 gezeigt. Die Messungen für  $R_{\text{had}}$  zeigen qualitativ die berechneten Sprünge liegen aber etwas höher als die Vorhersagen. In der Abbildung ist die oben berechnete Vorhersage mit QPM (Quark Parton Model) bezeichnet. Die beobachteten Abweichungen werden durch sogenannte QCD-Bremsstrahlungskorrekturen hervorgerufen, die im nächsten Abschnitt besprochen werden. Berücksichtigt man diese Korrekturen (QPM+QCD)<sup>5</sup>, dann werden die Daten sehr gut beschrieben. Insbesondere bestätigen die Messungen die Zahl der Farben  $N_C = 3$  und durch die Sprünge auch die aktiven Quarks. Gleichzeitig liefern die beobachteten Sprünge auch die Ladung des neu hinzugekommenen Quarks. Zu Anfang jedes Sprungs werden Resonanzen beobachtet, die gebundenen  $q\bar{q}$ -Zuständen wie beispielsweise dem  $J/\psi$  ( $c\bar{c}$ -Zustand) entsprechen, und die zu einer resonanten Erhöhung des Wirkungsquerschnitts führen, die durch das einfache Partonmodell nicht beschrieben werden.

### VII.1.2 Evidenz für Gluonen: 3-Jet-Ereignisse

Für elektrische geladene Teilchen besteht die Möglichkeit der Abstrahlung von Bremsstrahlungsphotonen. In gleicher Weise kann es für farbgeladene Quarks zur Abstrahlung von Bremsstrahlungsgluonen kommen. Der entsprechende Feynman-Graph ist in Abbildung VII.3 gezeigt. Da Gluonen genau wie Quarks farbgeladene Objekte sind, hadroni-

<sup>5</sup>Man sieht bei größeren Energien auch den Einfluss des Z-Bosons: QPM+QCD+Z.

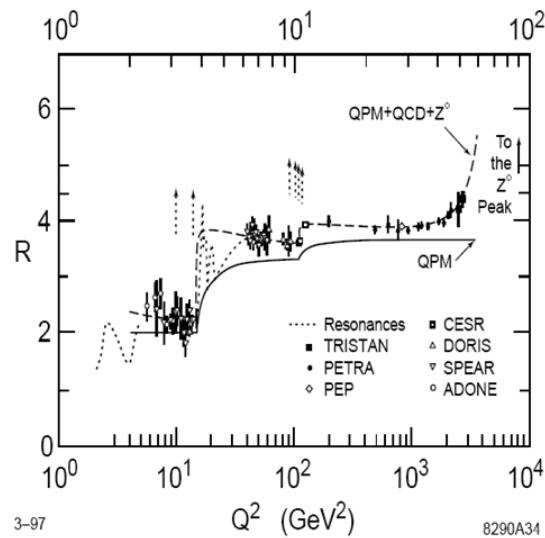


Abbildung VII.2:  $R_{\text{had}}$  als Funktion des Quadrats der Schwerpunktsenergie  $E_{\text{CMS}}^2 = Q^2$  gemessen an verschiedenen  $e^+e^-$ -Beschleunigern. Deutlich erkennt man die Sprünge bei Energien, die den kinematischen Schwellen zur Produktion eines neuen  $q\bar{q}$ -Paares entspricht. Der Verlauf wird durch das einfache Modell (QPM) qualitativ beschrieben. Berücksichtigt man zusätzlich QCD-Korrekturen und den Z-Austausch (QPM+QCD+Z), dann werden die Daten auch quantitativ gut beschrieben. Vor einem Sprung werden Resonanzen beobachtet (Pfeile), die in Abschnitt 2 diskutiert werden.

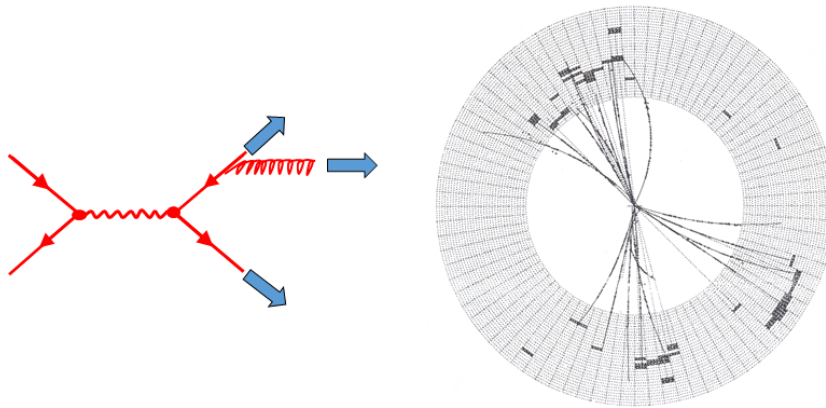


Fig. 11.12 A three-jet event observed by the JADE detector at PETRA.

Abbildung VII.3: (links) Feynman-Graph für Gluon Bremsstrahlung eines Quarks. Nach der Hadronisierung erhält man 3 Teilchen-Jets im Detektor. (rechts) 3-Jet-Signatur aufgezeichnet mit dem JADE Detektor am PETRA-Beschleuniger bei DESY.

sieren abgestrahlte Gluonen ebenfalls und es kommt zur Ausbildung eines dritten Jets. Solche 3-Jet-Ereignisse wurden 1977 am  $e^+e^-$ -Beschleuniger PETRA bei DESY beobachtet. Mit der Entdeckung der 3-Jet-Signatur wurde erstmalig die Existenz von Gluonen direkt in einem Experiment nachgewiesen. Außer 3-Jet-Signaturen erwartet man auch 4- und Mehr-Jet-Signaturen bei denen mehr als ein Gluon abgestrahlt wird. Häufig hat das abgestrahlte Gluon einen kleinen Öffnungswinkel zum Quark oder geringe Energie. In diesen Fall können 2-, 3-Jet- und Mehrjet-Signaturen nicht mehr eindeutig voneinander getrennt werden. Bei der Messung des hadronischen Wirkungsquerschnitts  $\sigma_{\text{had}}$ , der zur Bestimmung von  $R_{\text{had}}$  benutzt wird, tragen alle diese Signaturen bei und erhöhen deshalb den Wirkungsquerschnitt gegenüber der einfachen  $q\bar{q}$ -Produktion (QPM).

## VII.2 Quark-Confinement und Running von $\alpha_s$

Wie bereits zu Anfang des Kapitels diskutiert, führt die Farbladung der Gluonen zur Gluonselfkopplung und dazu, dass es neben dem Gluon-Quark-Vertex einen 3-Gluon und auch einen 4-Gluon-Vertex gibt. Die zusätzlichen Gluon-Gluon-Vertices erzeugen sowohl für das Farbpotential zwischen zwei Quarks bzw. zwischen Quark und Antiquark, als auch für die starke Kopplungskonstante  $\alpha_s$  ein Verhalten, das qualitativ völlig vom Verhalten der elektromagnetischen Wechselwirkung abweicht.

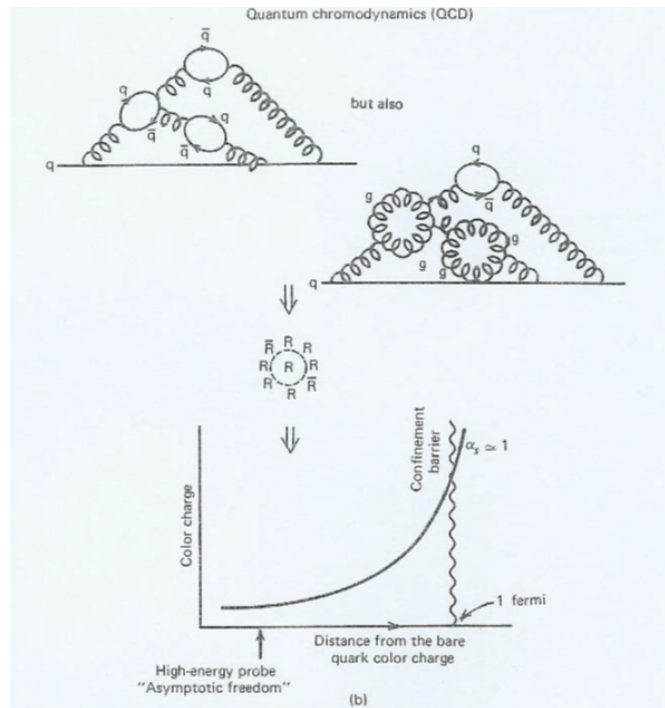


Abbildung VII.4: Schematische Darstellung: Quantenkorrekturen bewirken sowohl Quark-Loops als auch Gluon-Loops. Insgesamt kommt es zu einer Anti-Abschirmung der wirkenden Farbladung, so dass bei großen Abständen eine effektive größere Farbladung als bei kleinen Abständen wirkt. (entnommen Halzen & Martin).

### VII.2.1 Laufende Kopplungskonstante $\alpha_s$ und asymptotische Freiheit

Genau wie in der elektromagnetischen Wechselwirkung kommt es auch in der starken Wechselwirkung zu Quantenkorrekturen, die die effektiv messbare Farbladung gegenüber der „nackten“ Farbladung ohne Quantenkorrekturen modifiziert. Dieser Effekt ist in Abbildung VII.4 skizziert: Sowohl die farbgeladenen Quarks als auch die farbgeladenen Gluonen der Quantenkorrekturen beeinflussen die effektive Ladung, die als Funktion des Abstandes bzw. als Funktion des  $Q^2$ -Wertes der Wechselwirkung wirkt. In der Quark-Gluon-Wolke um die ursprüngliche Farbladung führen die Quark-Loops zu einer Abschirmung, während die Gluon-Loops einen gegenteiligen Effekt bewirken. Insgesamt überwiegt der Effekt der Anti-Abschirmung bei großen Abständen (kleinen  $Q^2$ -Werten). Die im Experiment gemessene Kopplungskonstante steigt deshalb mit großen Abständen (kleinen  $Q^2$ -Werten) an. Für große  $Q^2$ -Werte der Wechselwirkung misst man eine immer kleiner werdende Kopplungskonstante (s. a. Abbildung VII.4).

Abbildung VII.5 zeigt für verschiedene  $Q^2$ -Werte die gemessene starke Kopplungskon-

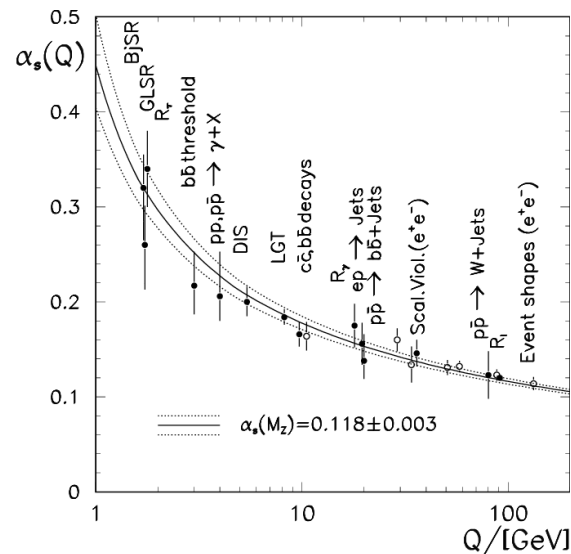


Abbildung VII.5: Die starke Kopplungskonstante  $\alpha_s$  als Funktion des  $Q$ -Wertes der Wechselwirkung. Mit ansteigendem  $Q$ -Wert wird die Kopplungskonstante immer kleiner. Neben den Messwerten ist auch die Theorievorhersage für  $\alpha_s(91 \text{ GeV}) = 0.118$  gezeigt.

stante  $\alpha_s(Q^2)$ . Diese starke  $Q^2$ -Abhängigkeit wird als „Running von  $\alpha_s$ “ bezeichnet. Im Limit  $Q^2 \rightarrow \infty$  geht  $\alpha_s \rightarrow 0$ . Dieses Verhalten bewirkt, dass zwei Quarks bei sehr kleinen Abständen (großes  $Q^2$ ) quasi frei sind. Man spricht auch von „asymptotischer Freiheit“. Das Laufen der Kopplungskonstanten  $\alpha_s$  und die asymptotische Freiheit bei großem  $Q^2$  wird von der von D. Gross, D. Politzer und F. Wilczek 1975 vorgeschlagenen Theorie der starken Wechselwirkung (QCD) korrekt vorhergesagt. Die drei Physiker erhielten 2004 für ihre Arbeiten den Nobelpreis für Physik.

Für kleine  $Q^2$  steigt die starke Kopplungskonstante sehr schnell an und erreicht etwa bei  $Q^2 \approx (200 \text{ MeV})^2$  die Größenordnung von 1. Eine störungstheoretische Behandlung und eine Beschreibung durch Feynman-Graphen ist in diesem Regime nicht mehr möglich. Die Bindung von Quarks in Hadronen kann also nicht mehr störungstheoretisch behandelt werden. Eine Berechnung der Bindungszustände von Quarks kann deshalb nur im Rahmen von Gitterrechnungen oder im Rahmen effektiver Modelle geschehen. Die Beschreibung der Bindung von Nukleonen in Kernen ist aufgrund der im Vergleich zur Hadronbindung kleinen Effekte nochmals um einiges schwieriger.

## VII.2.2 Quark-Confinement und das Quark-Antiquark-Potential

Für sehr kleine Abstände zwischen den Quarks bzw. zwischen Quark und Antiquark wird die effektive Kopplungskonstante klein. In diesem Regime (asymptotische Freiheit)



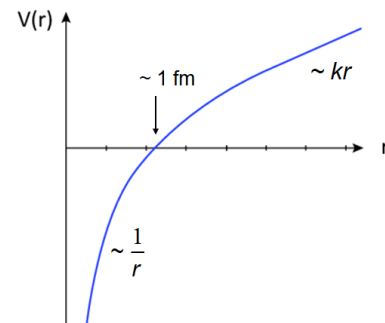
wirkt zwischen den Quarks ähnlich wie in der elektromagnetischen Wechselwirkung ein  $1/r$ -Potential. Bei großen Abständen führt die Gluon-Gluon-Wechselwirkung dazu, dass die Feldlinien des Farbfeldes zwischen den beiden Quarks auf einen engen Farbschlauch zusammengedrückt werden.



In diesem Bereich ist die Energie des Farbfeldes proportional zum Abstand der beiden Quarks. Insgesamt ergibt sich dann das bereits in Kapitel 2 eingeführte phänomenologische Potential zwischen Quark- und Antiquark in einem Meson:

$$V(r) \approx -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \hbar c + kr$$

mit  $k \approx 0.85 \text{ GeV/fm}$



Die Bestimmung der Potentialparameter für gebundene  $c\bar{c}$ -Zustände wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

Versucht man die beiden Quarks voneinander zu entfernen, so wächst die Energie des Farbschlauchs immer weiter an. Man braucht eine unendliche Energie, um die beiden Teilchen auseinander zu bringen. Quark und Anti-Quarks sind also im Farbpotential eingesperrt, weshalb man von Confinement spricht.

### Untersuchung des $q\bar{q}$ -Potentials mit Quarkonia-Zuständen

Gebundene Zustände schwerer Quarks ( $c\bar{c}$  und  $b\bar{b}$ -Zustände:  $J/\psi$ ,  $\psi'$ ... und die Upsilon-Resonanzen) eignen sich dazu das effektive Potential zu untersuchen.

Gebundene  $c\bar{c}$ -Zustände, sogenannte Charmonium Zustände, wurden 1974 gleichzeitig durch die Teams von S.C.C. Ting am Brookhaven National Lab (BNL) und von B. Richter am SLAC entdeckt. Die neu entdeckten Resonanzen wurden mit gebundenen Zuständen aus einem neuen schweren Quarks und seinem Antiquark identifiziert und stellen die Entdeckung eines vierten Quarks (c-Quarks) dar. S.C.C. Ting und B. Richter erhielten für diese Entdeckung 1976 den Nobelpreis<sup>6</sup>. In einer Reihe von Experimenten

<sup>6</sup>Das statische Quarkmodell kannte nur drei Quarks. Die Entdeckung eines vierten schweren Quarks war daher völlig unerwartet.

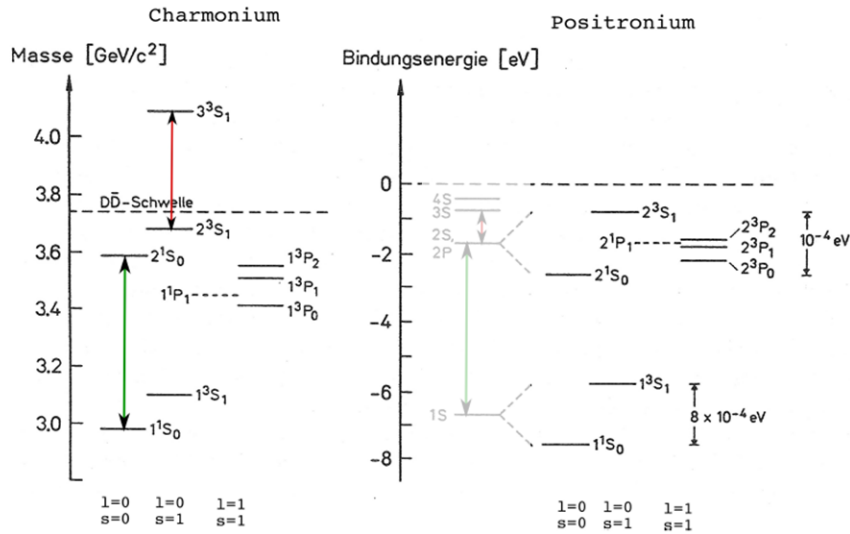


Abbildung VII.6: (links) Charmonium-Zustände ( $c\bar{c}$ ) im Vergleich mit dem Positronium-Spektrum ( $e^+e^-$ ).

konnten neben dem  $c\bar{c}$ -Grundzustand auch eine Reihe angeregter Zustände mit höheren Massen identifiziert werden.

Die niedrigsten Charmonium-Zustände liegen energetisch unterhalb der Schwelle von zwei D-Mesonen (Teilchen mit Charm-Quantenzahl). Elektromagnetische und starke Zerfälle des Charmoniums in zwei D-Mesonen, die die Charm-Quantenzahl erhalten, sind deshalb kinematisch nicht möglich. Kinematisch möglich sind aber schwache Zerfälle (Charm-Quantenzahl verletzt) in charmlose Endzustände. Die schwache Wechselwirkung führt aber zu langen Lebensdauern und vergleichsweise sehr geringen Zerfallsbreiten (vergl. dazu auch Abschnitt VII.1.1 und Abbildung VII.2).

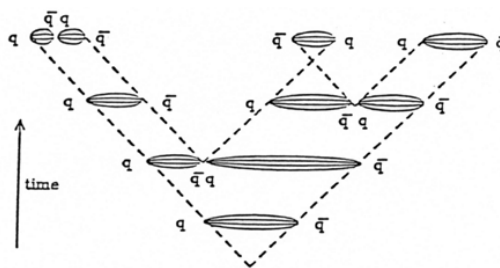
Vergleicht man die gefundenen Charmonium-Zustände mit den spektroskopischen Zuständen, die man für das elektromagnetisch gebundene Positronium ( $e^+e^-$ -Zustand) findet, so stellt man zwischen beiden Systemen klare Analogien fest. Die spektroskopischen Zustände beider Systeme sind in Abbildung VII.6 gezeigt. Die Massen der beobachteten Charmonium-Zustände sowie die Annahme des phänomenologischen  $q\bar{q}$ -Potentials erlaubt die Bestimmung der  $c$ -Quarkmasse  $m_c$ , der Kopplungskonstanten  $\alpha_s$  und der Farbschlauchkonstanten (String tension)  $k$ :

$$m_c \approx 1.5 \text{ GeV}, \quad \alpha_s(c\bar{c}) \approx 0.3, \quad k \approx 0.85 \text{ GeV/fm}$$

### VII.2.3 Hadronisierung

Wie bereits im Abschnitt VI.1.1 diskutiert, entstehen aus den in der  $e^+e^-$ -Annihilation produzierten  $q\bar{q}$ -Paaren Hadronen, die entlang der ursprünglichen Quarkrichtung Teilchen-Jets formen. Der Prozess der Hadronisierung soll hier kurz diskutiert werden.

Aufgrund ihres Impulses fliegen das farbgeladene Quark und das Antiquark auseinander. Das Farbfeld beschränkt sich auf einen Farbschlauch zwischen den beiden Teilchen, der sich durch das Auseinanderfliegen spannt. Wird der Abstand zu groß, werden aus der Energie des Farbschlauchs neue  $q\bar{q}$ -Paare zu erzeugt, die farbneutrale Hadronen bilden:



Die typische Längenskala (Zeitskala) der Hadronisierung beträgt etwa 1 fm ( $10^{-24}$  s). Danach ist der Hadronisierungsprozess abgeschlossen.

## Kapitel VIII

# Schwache Wechselwirkung

Das Studium der schwachen Wechselwirkung hat in der Vergangenheit zu einer Vielzahl unerwarteter Entdeckungen geführt: Neutrinos, P, C und CP-Verletzung, massive W- und Z-Bosonen. Es lohnt sich also schwache Prozesse zu untersuchen.

Dieses Kapitel beschreibt die Entdeckung der massiven W- und Z-Bosonen sowie ihre Kopplung an die Fermionen. Es endet mit einem ausführlichen Abschnitt zum  $\beta$ -Zerfall und bringt uns damit zur Kernphysik.

### VIII.1 Austauscheteilchen der schwachen Wechselwirkung

Bevor die W- und Z-Bosonen 1983 am CERN entdeckt wurden, wurden sie bereits von der durch S. Glashow, A. Salam und S. Weinberg in den 1960er Jahren entwickelten Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung (elektroschwaches Standardmodell) vorhergesagt.

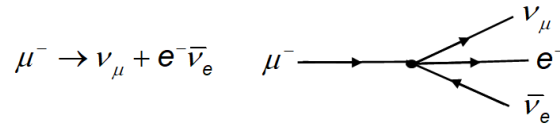
#### VIII.1.1 Vorhersage massiver W- und Z-Bosonen

Eine erste Theorie zur Beschreibung der schwachen Wechselwirkung und insbesondere zur Beschreibung des  $\beta$ -Zerfalls wurde bereits in den 1930er Jahren von E. Fermi aufgestellt. Aufgrund der scheinbaren Energieunabhängigkeit des  $\beta$ -Zerfalls beschrieb Fermi die Wechselwirkung als eine 4-Fermion-Punktwechselwirkung<sup>1</sup>, d.h. ohne den Austausch von Bosonen. Als Beispiel ist hier das Feynman-Diagramm für den Myon-Zerfall in einer

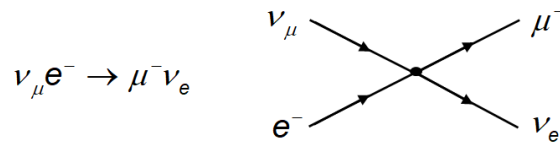
---

<sup>1</sup>Für kleine  $q^2$ -Werte dominiert im W-Propagator die Masse und  $q^2$  kann vernachlässigt werden. Der Propagator existiert in diesem Limit nicht mehr, und man kommt zu einer 4-Fermionwechselwirkung. Diese von Fermi eingeführte effektive 4-Fermionwechselwirkung wird auch heute noch zur Beschreibung von schwachen Prozessen verwendet, solange der  $q^2$ -Wert der Wechselwirkung gegenüber der W-Masse vernachlässigbar ist.

effektiven 4-Fermion-Theorie gezeigt (den Graphen gibt es im Standardmodell so nicht, nur als effektive Näherung):

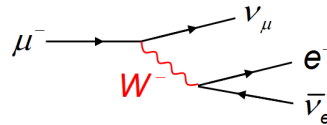


Mit dieser Theorie konnte Fermi sehr erfolgreich schwache Zerfälle beschreiben. Diese Theorie führte aber für die Neutrino-Streuung zu einem Problem.



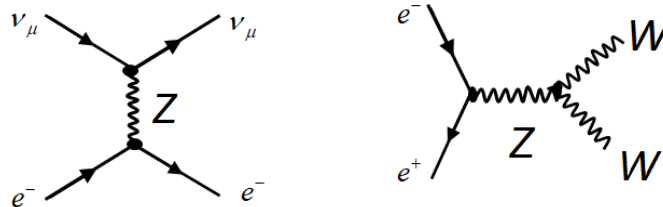
Berechnet man mit diesem Graphen den Wirkungsquerschnitt für die Neutrino-Nukleon-Streuung, findet man, dass der Wirkungsquerschnitt mit der Energie des Neutrinos  $E_\nu$  steigt:  $\sigma \sim E_\nu$ . Damit verletzt die Reaktion aber ab einer gewissen Energie die Unitarität. Die Theorie bricht also bei hohen Energien zusammen, was insofern klar ist, als dass die  $\frac{1}{q^2}$ -Abhängigkeit des Propagators ab einer gewissen Energie nicht mehr vernachlässigt werden kann. Um dieses Problem zu behandeln, wurden im Standardmodell massive Austauscheteilchen  $W^\pm$  eingeführt. Der Standardmodell-Propagator,

$$\frac{1}{q^2 - M_W^2 c^4}$$



zeigt für kleine  $q^2 \ll M_W^2 c^4$  bei denen  $\beta$ -Zerfälle typischerweise ablaufen, eine scheinbare unabhängigkeit von  $q^2$ . Für große  $q^2$ -Werte dominiert die  $\frac{1}{q^2}$ -Abhängigkeit und „repariert“ das Unitaritätsproblem der Neutrino-Streuung.

Die von S. Glashow, A. Salam und S. Weinberg entwickelte Theorie sagte ein weiteres schweres Austauschteilchen, das neutrale Z-Boson, voraus. Sowohl das Z-Boson als auch das Photon koppeln an die W-Bosonen (Triple-Boson Vertex) und lösen damit ein anderes Unitaritätsproblem<sup>2</sup>. Damit sind die folgenden Prozesse möglich:



<sup>2</sup>Ohne den Beitrag des Z-Bosons, verletzt die W-Paar-Erzeugung,  $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$  ebenfalls die Unitarität.

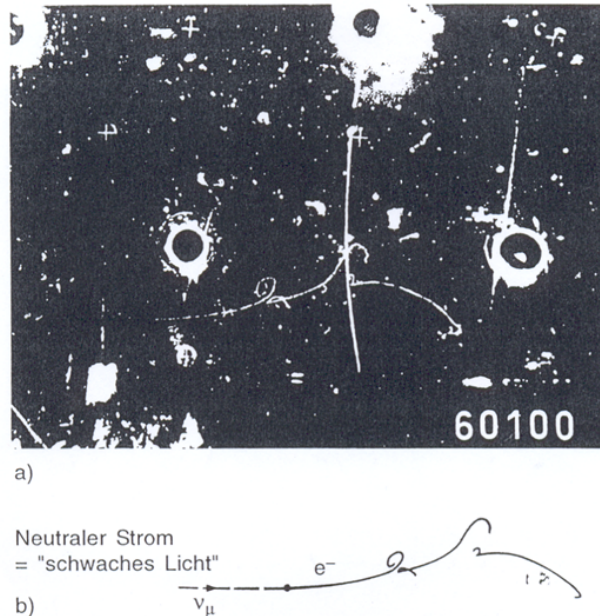


Abbildung VIII.1: (a) Aufnahme der Gargamelle-Blasenkammer des ersten detektierten „neutral current“ Ereignisses,  $\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_\mu e^-$ . (b) Nachgezeichnete Signatur: Das Anti-Neutrino kommt von links, wechselwirkt mit dem Elektron und verlässt dann die Blasenkammer undetektiert. Aufgrund des 4er-Impulsübertrags bewegt sich das Elektron erst in die Neutrिनorichtung, wird aber vom Magnetfeld abgelenkt. Entlang der Elektronbahn kommt es zur Aussendung von Bremsstrahlung und zu Paarproduktion, was die entgegengesetzten Spiralen entlang der Bahn erklärt. Insgesamt wurden drei  $\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_\mu e^-$  Ereignisse mit Gargamelle detektiert.

Die Neutrinostreuung an einem Elektron (linkes Feynman-Diagramm), bei der das Neutrino den Detektor wieder verlässt, und das gestreute Elektron nachgewiesen werden kann, ist eine eindeutige Signatur für den Austausch eines Z-Bosons („schwacher neutraler Strom“). Ein solches Ereignis konnte 1973 am CERN mit der Blasenkammer Gargamelle erstmalig nachgewiesen werden. Abbildung VIII.1 zeigt das Blasenkammerfoto und auch eine nachgezeichnete Ereignissignatur. Dieses Ereignis gehört sicher zu den wichtigsten Entdeckungen, die am CERN gemacht worden sind. Es bestätigt die von S. Glashow, A. Salam und S. Weinberg gemachte Vorhersage eines neutralen Austauschbosons der schwachen Wechselwirkung. Für die Entwicklung der elektroschwachen Theorie (Standardmodell) erhielten die drei Physiker 1979 den Nobelpreis.

### Messung von „neutral current“-Ereignissen mit Gargamelle:

Anfang der 1970er Jahre wurden am CERN eine Reihe unterschiedlicher Experimente mit hochenergetischen Muon-Neutrinos ( $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$ ) durchgeführt. Muon-Neutrinos entstehen im Zerfall des geladenen Pions  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu)$ , die sich leicht durch den Beschuss eines Targets mit hochenergetischen Protonen erzeugen lassen. Durch eine Ladungs- und Impulsselektion der geladenen Pionen lässt sich nach Abfiltern aller Hadronen und Muonen ein Neutrino-Strahl in einem gewissen Impulsbereich erzeugen.

Die Neutrinostrahlen wurden auf **Blasenkammern** gerichtet, die zugleich als Target und Nachweismedium dienten. Blasenkammern sind mit einer Flüssigkeit gefüllt, die bei großem Druck auf einer Temperatur kurz unterhalb des Siedepunkts der Flüssigkeit gehalten wird. Kurz vor Eintreffen des Neutrinostrahls wird der Druck der Kammer stark verringert und damit die Siedetemperatur überschritten. Die Kammer ist dann scharf. Ionisierende Teilchen erzeugen durch die Ionisation Siedekeime, an denen es zur Blasenbildung kommt. Bei richtiger Beleuchtung sind die Blasen sichtbar und man kann die Spuren fotografieren. Blasenkammern eignen sich nicht zur Aufzeichnung von Hochraten-Ereignissen, aber für die Detektion von Neutrino-Wechselwirkungen, die mit sehr kleiner Rate geschehen, sind sie gut geeignet. Die Gargamelle-Blasenkammer hatte eine Länge von 4.8 m und einen Durchmesser von 2 m. Sie hatte ein Gewicht von 1000 t und war mit 12 m<sup>3</sup> Freon gefüllt.

Neben den drei Neutrino-Elektron Ereignissen hat Gargamele auch eine größere Zahl „neutraler“ Neutrino-Nukleon-Ereignisse  $\nu N \rightarrow \nu X$  detektieren können, so dass ein Vergleich zwischen den „charged current“-Ereignissen (W-Austausch) und „neutral current“-Ereignissen (Z-Austausch) möglich war. Für das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte fand man (F. J. Hasert et al., 1973):

$$\frac{\sigma_{\text{NC}}(\nu_\mu N \rightarrow \nu N)}{\sigma_{\text{CC}}(\nu_\mu N \rightarrow \mu N)} = 0.307 \pm 0.008$$

Annähernd jedes dritte Neutrino-Ereignis wird also durch den Austausch eines Z-Bosons bewirkt. Dies entspricht der Vorhersage des Standardmodells, da die Kopplungen von W- und Z-Bosonen von gleicher Größenordnung sein sollten.

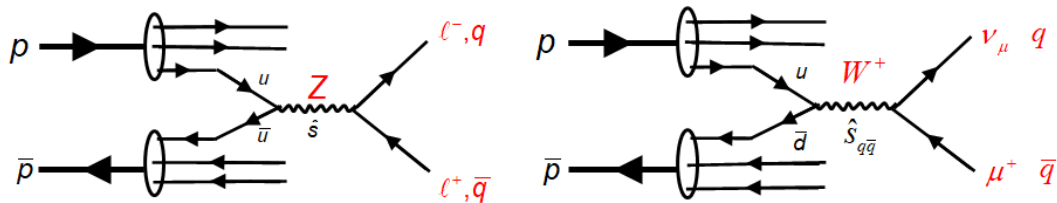
### VIII.1.2 Nachweis der W- und Z-Bosonen

Die massiven W- und Z-Bosonen wurden 1983 am CERN SPS (Super-Proton-Synchrotron), das auf Anregung von C. Rubbia als  $p\bar{p}$ -Speicherring ( $Spp\bar{p}S$ ) betrieben wurde, in den  $p\bar{p}$ -Kollisionen bei einer Schwerpunktsenergie von 540 GeV nachgewiesen. Größtes Problem für den effizienten Betrieb des Kolliders war die Produktion und die Bündelung der Anti-Protonen. Diese werden typischerweise in hochenergetischen Proton-Target-Kollisionen erzeugt und haben sehr unterschiedliche Energien und Richtungen. Um sie in einem Strahlbündel zu „komprimieren“, muss aktiv eingegriffen werden und der Phasenraum

den die Anti-Protonen einnehmen verringert werden. Das geschieht dadurch, dass die relative Geschwindigkeit der Antiprotonen eines Pakets zueinander verringert wird. Die Anti-Protonen werden „gekühlt“. S. van der Meer entwickelte dazu eine Methode, die heute als stochastische Kühlung bekannt ist, mit der sich die Relativgeschwindigkeit der Antiprotonen in einem eigens dafür gebauten Kühlungsring verringern ließ.

W- und Z-Bosonen entstehen, in dem die Valenzquark und Antiquarks der kollidierenden hoch-energetischen Protonen und Antiprotonen annihilieren. Für die Produktion eines Z-Boson annihilieren dazu  $u\bar{u}$ - bzw.  $d\bar{d}$ -Paare. W-Bosonen werden durch die Anihilation von  $u\bar{d}$  bzw.  $d\bar{u}$  erzeugt. Die Schwerpunktsenergie der kollidierenden Quarks ergibt sich aus der Impulsverteilung der Valenzquarks des kollidierenden Protons und Antiprotons. Die Partondichten der Valenzquarks peaken bei  $x \approx 0.17$ . Bei einer  $p\bar{p}$ -Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s}=540$  GeV führt das zu einer Schwerpunktsenergie  $\sqrt{\hat{s}}$  des kollidierenden  $q\bar{q}$ -Systems von  $\sqrt{\hat{s}} \approx x \cdot 540$  GeV  $\approx 92$  GeV. Es war aus indirekten Messungen bekannt, dass die W- und Z-Massen im Bereich zwischen 80 und 95 GeV liegen sollten, so dass bei den  $Spp\bar{S}$ -Energien tatsächlich eine Produktion dieser Teilchen möglich war.

Die folgenden Feynman-Graphen zeigen die Produktion von Z- und W-Bosonen mit einem anschließenden Zerfall in ein Lepton- bzw Quarkpaar:



Am CERN  $Spp\bar{S}$  wurden zwei Detektoren betrieben: Das von C. Rubbia geleitete UA1-Experiment und das UA2-Experiment. Beide Detektoren konnten die Z- und W-Bosonen erfolgreich nachweisen. Die Rekonstruktion der Zerfälle des Z-Bosons ist dabei experimentell etwas einfacher. Hier benutzte man Zerfälle in ein Elektron- oder Myonpaar, für die man die invariante Masse einfach berechnen kann. Abbildung VIII.2 zeigt einen Z-Zerfall in ein Myonpaar, das mit dem UA1-Detektor aufgezeichnet wurde. Auch gezeigt ist die invariante Massenverteilung von selektierten Elektronenpaaren, die bei einer Masse von etwa 91 GeV peakt. Der Peak entspricht der invarianten Masse quasi-reell produzierter Z-Bosonen und stellt somit dessen Nachweis dar.

Für die Rekonstruktion des W-Bosons benutzt man neben dem Impuls bzw. der Energie des messbaren Leptons (es wurde sowohl Elektronen und Myonen gemessen) noch eine weitere Variable, die man mit dem nicht-nachweisbaren Neutrino assoziieren kann. Bei dieser Variablen handelt es sich um den fehlenden Transversalimpuls  $p_T^{miss}$ : Da die im Anfangszustand die Protonen keinen Transversalimpuls senkrecht zur Strahlachse aufweisen, muss sich auch im Endzustand die Summe aller Transversalimpulse zu Null addieren. Fehlender Transversalimpuls deutet auf ein nicht nachgewiesenes Teilchen (Neu-



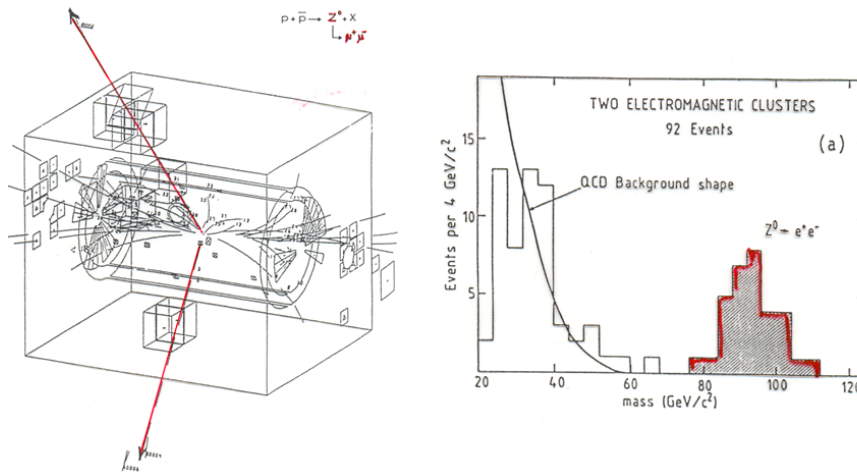


Abbildung VIII.2: (links) Z-Zerfall in ein Myonpaar aufgezeichnet mit dem UA1-Detektor. (rechts) Invariante Masse der nachgewiesenen hochenergetischen Elektronenpaare aus Z-Zerfällen.

trino) hin. Abbildung VIII.3 zeigt einen W-Zerfall in ein Elektron und Neutrino. Das Ereignis wurde mit dem UA1-Detektor aufgezeichnet. Der fehlende Transversalimpuls ist ebenfalls eingezeichnet. Aus dem Transversalimpuls des nachgewiesenen Leptons so wie dem fehlenden Transversalimpuls kann man eine Variable konstruieren - die transversale Masse - die kleiner gleich der invarianten Masse von Elektron bzw. Myon und Neutrino ist. Die Kante der transversalen Massenverteilung misst die W-Masse, die auf etwa 80 GeV bestimmt wurde.

Die Vorhersage massiver Austauschbosonen, die indirekte Vorhersage ihrer Massen und der direkte Nachweis am  $Spp\bar{p}S$  gehört zu den größten Erfolgen des elektroschwachen Standardmodells. C. Rubbia und S. v. d. Meer wurden 1984 für ihre Arbeiten, die zum Nachweis der W- und Z-Bosonen führten, mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

## VIII.2 Kopplung der W- und Z-Bosonen and Quarks und Leptonen

Wie wir bereits gesehen haben, koppeln W-Bosonen nur an linkshändige Fermionen bzw. rechtshändige Anti-Fermionen. Für Z-Bosonen sagt das Standardmodell sowohl ein Kopplung an linkshändige als auch an rechtshändige Teilchen. Die Kopplungsstärke ist aber verschieden und verletzt deshalb ebenfalls die P- und C-Symmetrie. Die Vorhersage der Standardmodells wurden experimentell bestätigt.

Bei der Beschreibung der Kopplung der schwachen Wechselwirkung an Fermionen spielt

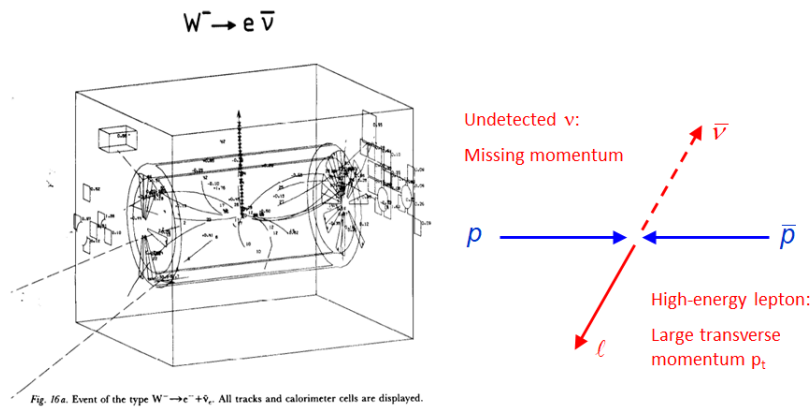


Abbildung VIII.3: (links) W-Zerfall in ein  $e\bar{\nu}_e$ -Paar aufgezeichnet mit dem UA1-Detektor. (rechts) Skizze der selektierten Ereignissignaturen.

der **schwache Isospin** eine wichtige Rolle. Für den Austausch von W-Bosonen bilden die linkshändigen Fermionen schwache Isospin-Dubletts ( $T_3 = \pm \frac{1}{2}$ ). Diese Dubletts wurden durch die Anordnung der Fermionen bereits implizit in Kapitel 2 eingeführt. Für die linkshändigen Leptonen ergeben sich dann die folgenden drei schwachen Isospin-Dubletts:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_{\text{LH}}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_{\text{LH}}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_{\text{LH}} \quad \downarrow W^+ \quad \uparrow W^-$$

Die W-Bosonen wirken im Isospin-Raum wie die  $\sigma^\pm$ -Operatoren<sup>3</sup> und transformieren die beiden Zustände innerhalb eines Dubletts. Die Kopplungsstärke ist für alle Leptongenerationen durch die schwache Kopplungskonstante  $g_w$  gegeben (Universalität).

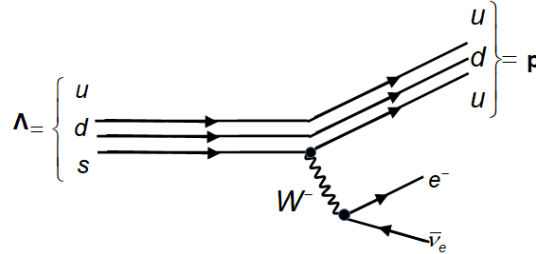
Auch die linkshändigen Quarks lassen sich in 3 Isospin-Dubletts ordnen,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{\text{LH}}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_{\text{LH}}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_{\text{LH}} \quad \downarrow W^+ \quad \uparrow W^-$$

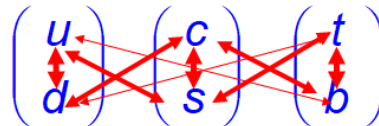
und auch hier bewirken die W-Bosonen Transformationen innerhalb der Isospin-Dubletts. Die Universalität der schwachen Wechselwirkung legt nahe, dass auch hier die Kopplung durch  $g_w$  gegeben ist. Empirisch wissen wir, dass die schwache Wechselwirkung die Flavorquantenzahl verletzt und dadurch auch Übergänge zwischen den Generatio-

<sup>3</sup> $\sigma^\pm = \sigma_1 \pm i\sigma_2$ , wobei die  $\sigma_i$  die Paulimatrizen sind.

nen möglich macht. Ein Beispiel ist die Strangeness-Verletzung im schwachen Zerfall  $\Lambda^0 \rightarrow p + e^- \nu$ , der im folgenden Feynman-Graph skizziert ist:



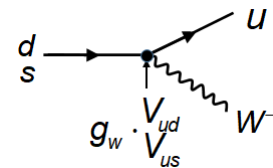
Für die Quarks existieren also Übergänge außerhalb der Generation (z.B.  $s \rightarrow u$ ). Man findet dass es Übergänge zwischen allen Quarkgenerationen gibt, die allerdings um so unwahrscheinlicher werden, je weiter die Generationen von einander entfernt sind:



Die schwache Wechselwirkung mit W-Bosonaustausch mischt also die Quarks verschiedener Quark-Dubletts miteinander. Die Mischung wird durch die sogenannte Cabibbo-Kobayashi-Maskawa(CKM)-Matrix beschrieben:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

Die Matrixelemente beschreiben die Kopplungsstärke für die jeweiligen Quarkübergänge. Das Übergangsmatrixelement für einen Quarkübergang ist proportional zum Quadrat des jeweiligen CKM-Matrixelementes  $|A_{fi}|^2 \sim g_w^2 |V_{qq'}|^2$ . Die universelle schwache Kopplungskonstante  $g_w$  wird also durch die CKM-Elemente modifiziert.



Die CKM-Matrix ist unitär ( $V_{\text{CKM}} \cdot V_{\text{CKM}}^\dagger = \mathbf{1}$ ). Die Diagonalelemente sind  $O(1)$ . Man findet dass einige Elemente komplex sind, was die Ursache für die beobachtete CP-Verletzung in schwachen Quark-Übergängen mit W-Austausch ist. Für den Betrag der 9 Elemente findet man die folgenden Werte (PDG 2020):

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 0.97401 \pm 0.00011 & 0.22650 \pm 0.00048 & 0.00361^{+0.00011}_{-0.00009} \\ 0.22636 \pm 0.00048 & 0.97320 \pm 0.00011 & 0.04053^{+0.00083}_{-0.00061} \\ 0.00854^{+0.00023}_{-0.00016} & 0.03978^{+0.00082}_{-0.00060} & 0.999172^{+0.000024}_{-0.000035} \end{pmatrix}$$

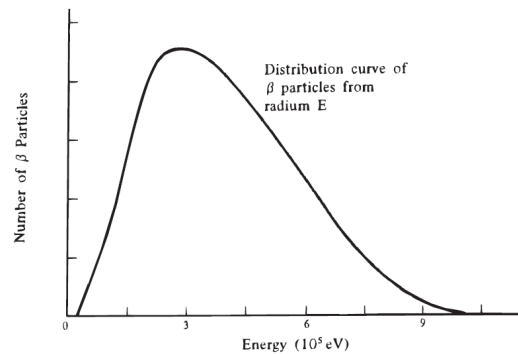
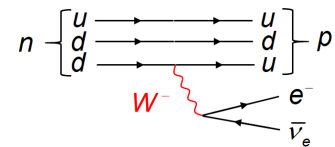


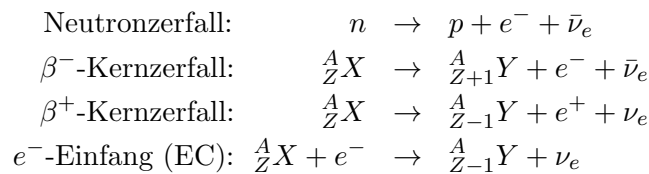
Abbildung VIII.4:  $\beta$ -Energiespektrum von 1927. Quelle: Frauenfelder

### VIII.3 $\beta$ -Zerfälle

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels beschäftigt sich mit  $\beta$ -Zerfällen von Kernen. Der Prototyp eines  $\beta^-$ -Zerfalls ist der Zerfall des Neutrons,  $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$ , für den das Quark-Level Feynman-Diagramm hier nochmals skizziert ist.



Neben dem Zerfall des freien Neutrons können sich auch Neutronen eines Kerns durch einen  $\beta^-$ -Zerfall in ein Proton umwandeln. Gleichzeitig ist im Kern aber auch der  $\beta^+$ -Zerfall von Protonen,  $p \rightarrow ne^+ \nu_e$ , aufgrund der zur Verfügung stehenden Kernbindungsenergie kinematisch möglich. In Konkurrenz zu diesem Prozess existiert in Atomen aber auch die Elektronen-Einfang-Reaktion  $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ . Es werden daher die folgenden schwachen Kern-Prozesse beobachtet:



Bereits in den 1920er Jahren war klar, dass es sich bei der  $\beta$ -Strahlung, die in Kernzerfällen frei wird, um Elektronen handelt, und dass diese ein kontinuierliches Energiespektrum aufweisen. Ein  $\beta$ -Spektrum aus dieser Zeit ist in Abbildung VIII.4 gezeigt. Die beobachtete Energieverteilung stand im Gegensatz zur  $\alpha$ - und  $\gamma$ -Strahlung, für die man diskrete Energien gefunden hatte, was damals weit besser in Einklang mit der aufkommenden Quantentheorie atomarer und subatomarer Prozesse zu bringen war. Heute wissen wir, dass das kontinuierliche Spektrum die Folge der 3-Körper-Zerfallskinetik ist, bei dem sich die beiden freiwerdenden Leptonen die Energie teilen, die nicht als Rückstoßenergie vom Kern aufgenommen wird. In den 1920er Jahren war das Neutrino aber unbekannt, und das Spektrum war deshalb nicht verständlich.

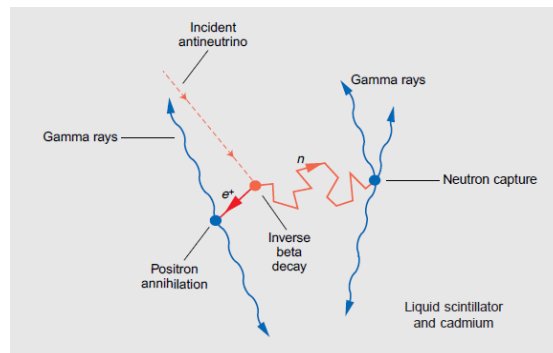


Abbildung VIII.5: Skizze zum Neutrinonachweis im Experiment von C.Cowan und F.Reines. Quelle: LANL

Dieses Problem wurde 1930 von W. Pauli zumindest theoretisch gelöst. In seinem Neutrino-Postulat erklärte Pauli das Spektrum durch die Existenz eines leichten neutralen Teilchens, das in den  $\beta$ -Zerfällen erzeugt wird, und das sich mit dem Elektron die freiwerdende Energie teilt (Rückstoß berücksichtigt). Zu einer Zeit, in der von den Elementarteilchen nur das Elektron und das Proton bekannt waren, wurde Pauli's Postulat eines neutralen leichten Teilchens zur Behebung eines kinematischen Problems nicht allzu ernst genommen. Eine Ausnahme war E. Fermi, der Paulis Vorschlag aufgriff, und der mit seiner Theorie des  $\beta$ -Zerfalls auch gleich das zweite Problem gelöst hat, nämlich die Frage, woher die Elektronen im Kern stammen:  $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$ .

Der direkte Nachweis des Neutrinos ist erst 1956 gelungen, in dem man sich die inverse Reaktion des Neutronzerfalls zum Neutrinonachweis zu Nutze gemacht hat:  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ . Unter dem Projekt-Namen „Poltergeist“ startete das Los Alamos Labor eine Initiative zum Nachweis des „Geisterteilchens“<sup>4</sup>. Das Team unter der Leitung von F. Reines und C. Cowan benutzten als Anti-Neutrino-Quelle einen Kernreaktor, in dem die  $\bar{\nu}_e$  aus Neutronzerfällen stammen. Der Detektor bestand aus einem großen mit Flüssigszintillator gefüllten Tank, dem Cadmiumchlorid zugemischt wurde, und der mit Photomultiplier umgeben war. Zum Neutrinonachweis mittels der obigen Reaktion, wurden gleichzeitig sowohl das entstehende Positron detektiert (zusammen mit einem Elektron des Szintillators annihiliert das Positron in 2 Photonen, die nachgewiesen wurden) als auch das Neutron nachgewiesen (über die Reaktion  $n + {}^{113}\text{Cd} \rightarrow {}^{114}\text{Cd} + \gamma$  entsteht ein Photon, das nachgewiesen wurde.). Abbildung VIII.5 zeigt die Signatur schematisch. Der gemessene Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$  beträgt  $\sigma \approx 6 \cdot 10^{-44} \text{ cm}^2$  und stimmt mit der Vorhersage der Fermi-Theorie überein.

Im Folgenden wird zuerst die Kinematik des  $\beta$ -Zerfalls diskutiert, bevor im zweiten Teil die Lebensdauer verschiedener Kern- $\beta$ -Zerfälle behandelt wird.

<sup>4</sup><https://permalink.lanl.gov/object/tr?what=info:lanl-repo/lareport/LA-UR-97-2534-02>

VIII.3.1 3-Teilchenphasenraum und  $\beta$ -Spektrum

Die Lebensdauer  $\tau$  eines  $\beta$ -instabilen Kerns wird durch die mit Fermi's Goldner Regel berechnete Übergangsrate  $\omega_{fi}$  bestimmt (s.a. Kapitel III):

$$\frac{1}{\tau} = \omega_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |A_{fi}|^2 \rho_3(E_f)$$

wobei hier  $\rho_3(E_f)$  die 3-Teilchenzustandsdichte für die im Endzustand verfügbare Energie  $E_f$  ist. Für schwere Kerne und bei den typischen  $\beta$ -Energien, kann die vom Kern aufgenommene Rückstoßenergie vernachlässigt werden, so dass sich Elektron und Neutrino die freiwerdende Energie  $E_0$  (Q-Wert des Zerfalls) als kinetische Energie teilen:

$$E_f = E_0 \approx E_e + E_\nu$$

Hierbei bezeichnen sowohl  $E_e$  als auch  $E_\nu$  die kinetischen Energien der Teilchen. Die 3-Teilchenzustandsdichte (Phasenraumfaktor)  $\rho_3(E_f = E_0)$  ist gemäß Kapitel III gegeben durch:

$$\rho_3(E_f) = \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} \cdot \frac{d}{dE_0} \int p_e^2 dp_e d\Omega_e p_\nu^2 dp_\nu d\Omega_\nu$$

Wie bereits in Kapitel 3 wird auch hier das Normierungsvolumen zu eins gesetzt  $V = 1$ .

Ziel ist die Berechnung des messbaren  $\beta$ -Spektrums, was der Vorhersage des Zerfallsrate für Elektronen, die mit einer Energie im Intervall  $[E_e, E_e + dE_e]$  emittiert werden, entspricht. Zur Berechnung<sup>5</sup> der Übergangsrate für Elektronen dieser Energie betrachtet man den Phasenraum für konstante Elektronenenergie  $E_e$  bzw. konstanten Elektronenimpuls  $p_e$ . Mit  $E_0 \approx E_e + E_\nu$  und für die Annahme masseloser Neutrinos  $E_\nu = cp_\nu$  findet man,

$$\frac{d}{dE_0} = \frac{1}{c} \frac{d}{dp_\nu},$$

so dass man für die Zustandsdichte  $\rho_3(E_f)$  den folgenden differentiellen Ausdruck erhält:

$$d\rho_3 = \frac{d\Omega_e d\Omega_\nu}{(2\pi\hbar)^6} p_e^2 p_\nu^2 dp_e$$

Zur Berechnung der Übergangsrate muss die Integration über die Winkel von Elektron und Neutrino ausgeführt werden. Dazu führt man die über diese Winkel gemittelten Übergangsamplitude  $\overline{|A_{fi}|^2}$  ein. Mit  $p_\nu^2 \approx (E_0 - E_e)^2/c^2$  erhält man die folgende differentielle Zerfallsbreite  $d\Gamma$  bzw. differentielle Übergangsrate  $d\omega_{fi}$  für einen Zerfall mit dem Elektronenimpuls zwischen  $p_e$  und  $p_e + dp_e$ :

$$d\omega_{fi} = \frac{d\Gamma}{\hbar} = \frac{1}{2\pi^3 c^2 \hbar^7} \overline{|A_{fi}|^2} p_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp_e$$

<sup>5</sup>Die Herleitung folgt dem Lehrbuch von Frauenfelder und Garcia.

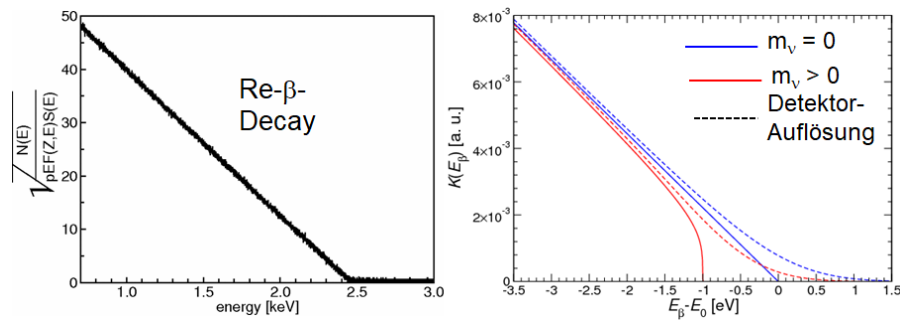


Abbildung VIII.6: (links) Kurie-Plot für  $^{187}\text{Re}$ . (rechts) Berechneter Kurie-Plot für den  $\beta$ -Zerfall von  $^3\text{H}$  (Tritium) unter der Annahme verschwindender Neutrino-Masse  $m_\nu = 0$  und unter der Annahme von  $m_\nu = 1$  eV. Die gestrichelte Kurve zeigt das erwartete Spektrum unter Berücksichtigung der Spektrometerrauflösung des KATRIN-Experiments. Quelle: <https://doi.org/10.1016/j.nima.2003.11.273>, KATRIN

Um das  $\beta$ -Spektrum beliebiger Kernzerfälle beschreiben zu können, muss noch eine Korrektur berücksichtigt werden. Abhängig von der Kernladung  $Z$  und je nach dem ob es sich um einen  $\beta^-$ - oder einen  $\beta^+$ -Zerfall handelt, wird das messbare Spektrum aufgrund der Coulomb-Wechselwirkung mit der Kernladung modifiziert: Für  $\beta^+$ -Zerfälle bewirkt die Kernladung eine Abstoßung der Positronen und damit eine Verschiebung zu höheren Elektronenenergien, während bei  $\beta^-$ -Zerfällen das messbare Elektronenspektrum nach tieferen Energien verschoben ist. Diese Coulomb-Korrektur  $F(\pm, Z, E_e)$  (Fermi-Funktion) kann berechnet und bei der Beschreibung des Spektrums berücksichtigt werden.

$$d\omega_{fi} = \frac{d\Gamma}{\hbar} = \frac{1}{2\pi^3 c^2 \hbar^7} |A_{fi}|^2 F(\pm, Z, E_e) p_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp_e$$

Bevor im nächsten Abschnitt die Übergangsamplitude  $|A_{fi}|^2$  und die Lebensdauer von  $\beta$ -Zerfällen diskutiert wird, kann eine kinematische Analyse des Spektrums durchgeführt werden. Dazu schreibt man die obige Gleichung etwas um:

$$\underbrace{\left( \frac{d\omega_{fi}}{p_e^2 dp_e} \right)^{\frac{1}{2}}}_{K(E_e)} = \text{const.} \cdot \left( |A_{fi}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (E_0 - E_e)$$

Falls das Matrixelement unabhängig von der Elektronenenergie ist, erhält man also eine lineare Abhängigkeit von  $E_0 - E_e$ , die in Abbildung VIII.6(links) beispielhaft für den  $\beta$ -Zerfall von Rhenium  $^{187}\text{Re}$  mit einem Endpunkt  $E_0 \approx 2.5$  keV gezeigt ist. Der Endpunkt der Kurve, die man als Kurie-Plot bezeichnet, ändert sich, wenn man massive Neutrinos betrachtet (s. Abbildung VIII.6(recht) für den Zerfalls von Tritium  $^3\text{H}$ ). Die genaue Vermessung des Endpunktes des Kurie-Plots erlaubt daher eine Bestimmung der Neutrinomasse bzw. die Bestimmung eines Neutrino-Massenlimits.

**Neutrinomassen-Bestimmung:** Experimentell verwendet man hierzu das  $\beta$ -Spektrum

von Tritiumzerfällen,  ${}^3_1\text{H}^+ \rightarrow {}^3_2\text{He}^{2+} + e^- + \bar{\nu}_e$ . Die bisher besten Masenlimits,  $m_\nu < 0.8 \text{ eV}$  (90% *CL*), stammen vom KATRIN-Experiment in Karlsruhe<sup>6</sup>. Die Herausforderung dieses Experiments ist die Manipulation des hochradioaktiven Tritiums und die präzise Vermessung des Endpunktes mit kleinen statistischen und systematischen Unsicherheiten. Zur Anwendung kommt bei KATRIN ein sogenannter MAC-E-Filter für die Vermessung der Elektronenenergie. Dabei laufen die Elektronen gegen eine elektrische Spannung und können den Nachweisähler nur dann erreichen, wenn ihre Energie größer als das Spannungspotential ist. Durch Variation der Spannung lässt sich der Endpunkt sehr genau vermessen.

### VIII.3.2 Lebensdauer von $\beta$ -instabilen Kernen

Die Lebensdauer der  $\beta$ -instabilen Kerne wird maßgeblich durch das gemittelte Matrixelement  $|\overline{A_{fi}}|^2$  bestimmt. Nimmt man an, dass die Übergangsamplitude unabhängig vom Elektronenimpuls ist<sup>7</sup>, so kann die Integration über den Elektronenimpuls ausgeführt werden und man findet für die totale Zerfallsbreite bzw. die Lebensdauer:

$$\frac{\Gamma}{\hbar} = \frac{1}{\tau} = \int d\omega_{fi} = \frac{1}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} |\overline{A_{fi}}|^2 \underbrace{\int_0^{p_{\max}} F(\pm, Z, E_e) p_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp_e}_{=m_e^5 c^7 f(Z, E_0)}$$

Für große Energien  $E_0$ , für die  $p_{\max} \approx E_0/c$  ist, und für kleine  $Z$ , für die Coulomb-Korrektur  $F \approx 1$  ist, wird das Integral

$$\int_0^{p_{\max}} F(\pm, Z, E_e) p_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp_e \simeq \frac{1}{30c^3} E_0^5$$

In diesem Fall erhält man

$$\Gamma \sim E_0^5 \quad \text{bzw.} \quad \tau \sim \frac{1}{E_0^5}$$

Diese Abhängigkeit wird in der Literatur häufig als Sargent-Regel bezeichnet. Sie gilt auch für andere schwache Zerfälle wie beispielsweise den Zerfall des Muons, für den man  $\Gamma \sim m_\mu^5$  findet.

Im allgemeinen Fall benötigt man den korrekten Wert des Integrals, das aber ausgerechnet werden kann und tabelliert wurde<sup>8</sup>. In den Tabellen wird folgende Notation gebraucht:

$$\int_0^{p_{\max}} F(\pm, Z, E_e) p_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp_e = m_e^5 c^7 \cdot f(E_0)$$

<sup>6</sup>Nature Physics Vol. 18 (2022) 160–166.

<sup>7</sup>Diese Annahme ist gerechtfertigt, da  $\beta$ -Zerfälle sehr gut durch Fermi's 4-Fermionwechselwirkung beschrieben werden, die keine  $q^2$ -Abhängigkeit aufweist.

<sup>8</sup>z.B.: N.B. Gove and M.J.Martin, Log-f tables for beta decay (1971), [https://doi.org/10.1016/S0092-640X\(71\)80026-8](https://doi.org/10.1016/S0092-640X(71)80026-8)



Decay	Spin-parity		$E_{\max}$ (MeV)	$ft_{1/2}$ (sec)
	Sequence	$t_{1/2}$		
$n \rightarrow p$	$\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$	10.2 min	0.782	1054
${}^6\text{He} \rightarrow {}^6\text{Li}$	$0^+ \rightarrow 1^+$	0.807 sec	3.50	800
${}^{14}\text{O} \rightarrow {}^{14}\text{N}$	$0^+ \rightarrow 0^+$	70.6 sec	1.752	3039

Tabelle VIII.1: Gezeigt sind für drei  $\beta$ -Zerfälle die freiwerdende Energie  $E_0$  ( $E_{\max}$ ), die Halbwertszeit und der  $ft$ -Wert. Quelle: Frauenfelder-Garcia

Der Faktor  $m_e^5 c^7$  wurde eingeführt um  $f(E_0)$  dimensionslos zu machen.

Kennt man die Lebensdauer  $\tau$  eines Zerfalls, lässt sich aus der Gleichung für die Lebensdauer der Wert des gemittelten Matrixelements  $\overline{|A_{fi}|^2}$  für einen Zerfall  $N \rightarrow N' e^- \bar{\nu}_e$  bestimmen:

$$\overline{|A_{fi}|^2} = \overline{|\langle N' e^- \bar{\nu}_e | H_{\text{WW}} | N \rangle|^2} = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{f \cdot \tau m_e^5 c^4}$$

Der Wert von  $f \cdot \tau$  bzw.  $f \cdot t_{\frac{1}{2}}$ , wobei  $t_{\frac{1}{2}} = \ln 2 \tau$  die Halbwertszeit des Zerfalls ist, wird für  $\beta$ -Zerfälle ebenfalls tabelliert. Man bezeichnet  $ft_{\frac{1}{2}}$  als komparative oder reduzierte Halbwertszeit. Wäre das Matrixelement für alle  $\beta$ -Zerfälle gleich, hätten alle Zerfälle die gleiche Halbwertszeit. Man findet aber  $ft_{\frac{1}{2}}$ -Werte im Bereich von  $10^3$  s bis  $10^{23}$  s. Wir wissen aber bereits, dass der eigentliche schwache Wechselwirkungsoperator, der den  $d \rightarrow u$ -Quark-Übergang beschreibt, in allen  $\beta$ -Zerfällen der gleiche sein sollte. Die großen Unterschiede resultieren daher vor allem von der Kernwellenfunktion, die in  $\langle N' e^- \bar{\nu}_e | H_{\text{WW}} | N \rangle$  eingeht. Tabelle VIII.1 zeigt für einige Zerfälle die komparativen Halbwertszeit  $ft_{\frac{1}{2}}$  die häufig einfach auch nur als  $ft$  bezeichnet werden. Da die möglichen  $ft$ -Werte 20 Zehnerpotenzen abdecken, gibt man  $\log ft$  an.

### VIII.3.3 Auswahlregeln für $\beta$ -Zerfällen von Kernen

Im folgenden werden einige Auswahlregel für  $\beta$ -Zerfällen von Kernen gegeben, die den großen Bereich der beobachteten  $ft$ -Werte motivieren.

#### Erlaubte Übergänge

Im Falle *erlaubter Übergänge* werden Elektron und Neutrino mit einem relativen Bahndrehimpuls  $\ell = 0$  produziert. In diesem Fall ändert sich die Parität des Kerns nicht, d.h. für den Kern ist  $\Delta P = 0$ .

Man unterscheidet zwei Arten von erlaubten Übergängen für die man  $\log ft$  Werte zwischen 4 und 6 misst:

**Fermi-Übergänge:** Elektron und Neutrino befindet sich für diese Übergänge in einem Spin-Singulett ( $S = 0$ ). Die Spinänderung des Kern ist damit  $\Delta J = 0$ . Die Kernparität ändert sich nicht  $\Delta P = +$ .

**Gamov-Teller-Übergänge:** Elektron und Neutrino befinden sich in einem  $S = 1$  Spin-Triplett Zustand. Die  $J_Z$ -Komponente des Kernspins ändert sich damit um 1 und der Kernspin entsprechend um  $\Delta J = 0, \pm 1$  ( $0 \rightarrow 0$  verboten). Die Kernparität ändert sich ebenfalls nicht  $\Delta P = +$ .

### Super-erlaubte Übergänge

Das Kernmatrixelement ist maximal, wenn das im Zerfall entstehende Proton durch die gleiche Wellenfunktion beschrieben werden kann wie das zerfallende Neutron. Das ist der Fall, wenn der Ursprungskern und der entstehende Kern zu einem starken Isospin-Multiplett gehören. Ein Beispiel ist der Zerfall  ${}^{14}_8\text{O} \rightarrow {}^{14}_8\text{e}^+\nu_e$ . Für super-erlaubte Zerfälle misst man  $\log ft$ -Werte zwischen 3 und 4.

### Verbotene Übergänge

Zerfälle bei denen der relative Bahndrehimpuls zwischen Elektron und Neutrino  $\ell > 0$  bezeichnet man als verbotene Übergänge. Da Drehimpuls weggetragen wird, ändert sich auch der Kernspin und die Kernparität entsprechend:

*einfach verboten:*  $\ell = 1 \rightarrow \Delta J = 0, 1, 2, \Delta P(\text{Kern}) = -; \rightarrow \log ft = 6 \dots 15$

*zweifach verboten:*  $\ell = 2 \rightarrow \Delta J = 1, 2, 3, \Delta P(\text{Kern}) = +; \rightarrow \log ft = 11 \dots 18$

*n-fach verboten:*  $\ell = n \rightarrow \log ft$  bis 23

## Kapitel IX

# Kerne, Kernmodelle und Kernzerfälle

Eine ab initio Beschreibung der Bindung von Nukleonen in Kernen im Rahmen der starken Wechselwirkung ist aufgrund des nicht-perturbativen Regimes der Wechselwirkung (Kopplungskonstante  $\alpha_s$  groß) und aufgrund der Komplexität der zwischen den Nukleonen wirkenden Kernkräfte in der Regel äußerst schwierig. Stattdessen bedient man sich verschiedener phänomenologischer Modelle mit sehr vereinfachten Kernkräften.

Prinzipiell unterscheidet man Einteilchenmodelle, bei denen angenommen wird, dass sich die Nukleonen unabhängig voneinander in einem gemeinsamen Kernpotential bewegen (Fermi-Modell, Schalenmodell) und kollektive Modelle, in denen die Nukleonen miteinander wechselwirken (Tröpfchenmodell).

Bevor die Kernmodelle und die verschiedenen Kernzerfälle diskutiert werden, beschäftigt sich der erste Abschnitt mit der Kernspektroskopie und der Bestimmung der Bindungsenergie der Kerne.

### IX.1 Massenspektroskopie und Kern-Bindungsenergie

Die Bindungsenergie eines Kerns entspricht dem sogenannten Massendefizit, d.h. der Differenz zwischen der Summe der Massen aller Nukleonen und der Masse des Kerns. Eine sehr genaue Bestimmung der Kernmassen ist deshalb eine wichtige experimentelle Voraussetzung zum Verständnis der Kerne.

### IX.1.1 Massenspektrometrie

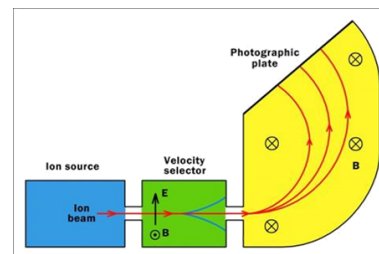
Das Prinzip von Massenspektrometern ist in der folgenden Abbildung skizziert: Ein gekreuztes E- und B-Feld dient als Geschwindigkeitsselektor für den Ionenstrahl mit dem Ladungs-Massen-Verhältnis  $q/m$ . Die Geschwindigkeit beträgt  $v = \frac{E}{B_1}$ . Danach tritt der Strahl mit der Geschwindigkeit  $v$  in ein zweites B-Feld  $B_2$  und wird dort auf eine Kreisbahn abgelenkt deren Radius  $R$  sich aus der Lorentzkraft berechnen lässt. Für das Verhältnis  $q/m$  findet man dann:

$$\frac{m}{q} = R \cdot \frac{B_1 B_2}{E}$$

Zur Präzisionsbestimmung von Kernmassen werden heute Penning-Fallen (MPI-K) und auch Speicherringe (GSI) verwendet. In beiden Fällen wird das gespeicherte Ion durch ein Magnetfeld  $B$  auf eine Kreisbahn gezwungen. Die Zyklotronfrequenz ergibt sich dann zu

$$\omega_c = \frac{q}{m} \cdot B$$

Die Frequenzmessung erlaubt in der Regel eine sehr genaue Bestimmung des Verhältnisses  $q/m$ .



### IX.1.2 Bindungsenergie

Wie oben bereits erwähnt, entspricht die Bindungsenergie eines Kerns  $B$  gerade dem Massendefizit zwischen der Masse der Nukleonen und der Kernmasse:

$$B(A, Z) = (Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - M(A, Z)) \cdot c^2 > 0$$

Die Größen  $A$  und  $Z$  sind die Zahl der Nukleonen und die Kernladungszahl.  $M(A, Z)$  ist die gemessene Kernmasse. Experimentell wird statt der Kernmasse die Masse des Ions bestimmt, das noch Hüllelektronen besitzt. Die Masse der Elektronen und deren Bindungsenergie muss dann ebenfalls berücksichtigt werden. Bei der Verwendung der im Periodensystem angegebenen Atommassen müssen die Hüllelektronen ebenfalls berücksichtigt werden. Mit der obigen Definition ist die Bindungsenergie positiv und entspricht der negativen potentiellen Energie der Nukleonen. Für die Bindungsenergie pro Nukleon,  $B(A, Z)/A$ , findet man die in Abbildung IX.1 gezeigte Abhängigkeit von  $A$ . Das Maximum der Bindungsenergie pro Nukleon beobachtet man für Eisen ( $A=56$ ) mit etwa 8.8 MeV pro Nukleon. Bis zu Eisen kann man also durch Fusion zweier leichter Kerne Energie gewinnen. Bei schweren Kernen gewinnt man Energie durch Spaltung. Bestimmte Kerne, z.B.  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{16}\text{O}$ , weisen eine besonders hohe Bindungsenergie auf, sind also besonders stabil.

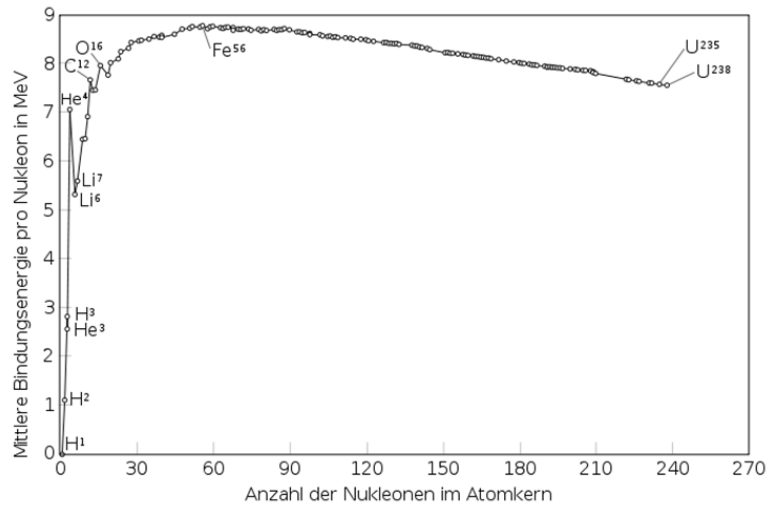


Abbildung IX.1: Bindungsenergie pro Nukleon  $B/A$  als Funktion der Zahl der Nukleonen  $A$ . Das Maximum beobachtet man für Eisen ( $A=56$ ) mit etwa 8.8 MeV pro Nukleon.

## IX.2 Tröpfchenmodell und die Bethe-Weizsäcker-Formel

Im Tröpfchenmodell werden die Nukleonen wie Moleküle eines inkompressiblen geladenen Flüssigkeitströpfchens betrachtet. Jedes Nukleon erfährt durch die kurzreichweitige Kernkraft der übrigen Nukleonen eine bindende Kraft. Die Bethe-Weizsäcker-Formel beschreibt die Bindungsenergie der Nukleonen in diesem Modell. Die phänomenologische Formel wurde ursprünglich durch C.F. v. Weizsäcker aufgestellt (1935) und durch H. Bethe weiterentwickelt (1936). Sie ist inspiriert durch die annähernd konstante Dichte der Kerne (Volumen  $\sim A$ ) und der Tatsache, dass  $B/A \approx \text{konst.}$  für große  $A$  ist. Die Bethe-Weizsäcker-Formel lautet,

$$B(A, Z) = a_V A - a_O A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_S \frac{(N - Z)^2}{A} + \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}},$$

wobei die einzelnen Terme die folgende Bedeutung haben:

**Volumenbeitrag**  $a_V A$ : Jedes der  $A$  Nukleonen liefert aufgrund der Wechselwirkung mit seinen Nachbarn einen Beitrag zur Bindungsenergie.

**Oberflächeneffekt**  $-a_O A^{\frac{2}{3}}$ : Die Nukleonen an der Oberfläche ( $\sim R^2 \sim A^{\frac{2}{3}}$ ) sind weniger stark gebunden da die äußeren Nachbarn fehlen.

**Coulomb-Abstoßung**  $-a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}$ : Die Coulomb-Abstoßung der Protonen verringert die Bindungsenergie. Der Effekt ist  $\sim Z^2$  und anti-proportional zum Radius des Kerns, also

$$\sim 1/A^{1/3}.$$

**Symmetrie-Term**  $-a_S \frac{(N-Z)^2}{A}$ : Leichte Kerne sind bei gleicher Neutron- und Protonzahl  $N \approx Z$  am stabilsten. Für schwere Kerne ist die Abweichung von der Symmetrie nicht mehr relevant, und man findet dass bei gleichem  $A$  aufgrund der Coulomb-Abstoßung Kerne mit  $N > Z$  stabiler sind.

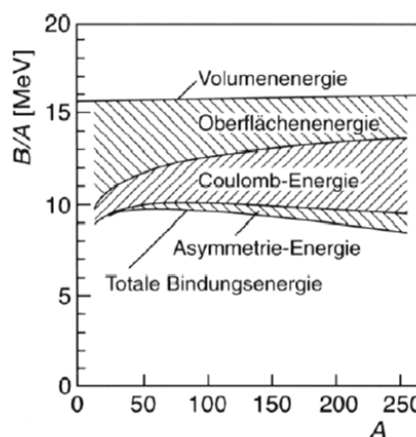
**Paarungsterm**  $\frac{\delta}{A^{1/2}}$ : Eine gerade Anzahl von Protonen und Neutronen erhöhen die Kernstabilität. Man findet für den Paarungsterm  $\delta$  die folgenden Werte:

$$\delta = \begin{cases} +11.2 \text{ MeV} & Z \text{ und } N \text{ gerade:} & \text{gg-Kerne} \\ 0 \text{ MeV} & Z \text{ oder } N \text{ gerade:} & \text{ug-Kerne} \\ -11.2 \text{ MeV} & Z \text{ und } N \text{ ungerade:} & \text{uu-Kerne} \end{cases}$$

Für die Parameter der Bethe-Weizsäcker-Formel findet man empirisch die folgenden Werte (s. Povh):

$$a_V \approx 15.67 \text{ MeV} \quad a_C \approx 0.71 \text{ MeV} \\ a_O \approx 17.23 \text{ MeV} \quad a_S \approx 23.3 \text{ MeV}$$

Der Verlauf der einzelnen Terme ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt. Außer dem Volumenterm sind alle anderen Terme negativ.



Die Bethe-Weizsäcker-Formel erlaubt die Berechnung der in Kernprozessen freiwerdenden Energie. Für Kernzerfälle wird diese Energie als Q-Wert bezeichnet. Ein Kernzerfall ist kinematisch dann möglich wenn die Bindungsenergie der Endprodukte größer ist als die Bindungsenergie des Anfangskerns. Die Masse eines Kern ( $A, Z$ ) lässt sich dann ebenfalls angeben (Massenformel):

$$M(A, Z) = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - B(A, Z)/c^2$$

### IX.3 Kernzerfälle

Stabile Kerne, also Kerne die nicht durch  $\alpha$ ,  $\beta$ - oder Elektroneneinfang zerfallen, bilden, wenn man die Nuklide in der  $(Z, N)$ -Ebene aufträgt, ein sogenanntes „Stabilitätstal“. Das Stabilitätstal lässt sich mit der Bethe-Weizsäcker-Formel berechnen und folgt für leichte Kerne der Geraden  $Z \approx N$ . Für schwere Kerne sind Kerne mit  $N > Z$  stabiler.

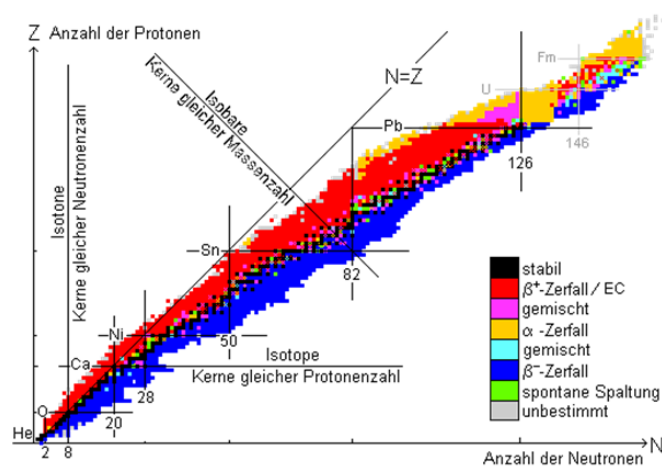


Abbildung IX.2:  $N$  und  $Z$  Verteilung aller bekannten Nuklide. Ein Farbkode spezifiziert ob das jeweilige Nuklid stabil ist, oder ob und wie es radioaktiv zerfällt. Quelle: ???

Abbildung IX.2 zeigt eine Nuklidkarte<sup>1</sup>: Für die bekannten Nuklide ist die  $N$  und  $Z$ -Verteilung gezeigt. Ein Farbkode spezifiziert ob das jeweilige Nuklid stabil ist, oder ob und wie es radioaktiv zerfällt. Man sieht, wie bei kleinem  $A$  das Stabilitätstal (schwarze Punkte) der Geraden  $N \approx Z$  folgt, während es bei größeren  $A$  zu  $N > Z$  kippt. Nuklide mit gleichem  $Z$  (gleiches chemisches Element) bezeichnet man als Isotope. Nuklide mit gleichem  $A$  als Isobare. Bei Kernen, die gegenüber dem Stabilitätstal einen Neutronen-Überschuss aufweisen, kommt es zu  $\beta^-$ -Zerfällen. Bei einem Protonen-Überschuss zeigen die Kerne entsprechend  $\beta^+$ -Zerfälle bzw. Übergänge aufgrund von Elektroneneinfang (EC).

### IX.3.1 $\beta$ -Zerfälle

Für konstantes  $A$  lässt sich die Massenformel  $M(A, Z)$  für die Kernmasse als Funktion von  $Z$  schreiben:

$$M(A, Z)_{A=\text{const}} = \alpha \cdot A - \beta \cdot Z + \gamma \cdot Z^2 + \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{mit } \begin{cases} \alpha = m_n - a_V + a_O A^{-\frac{1}{3}} + a_S \\ \beta = 4a_S + m_n - m_p \\ \gamma = 4a_s A^{-1} + a_C A^{-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

<sup>1</sup>Eine interaktive Nuklidkarte die auch zu jedem Nuklid weite Informationen bereitstellt findet man unter <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>

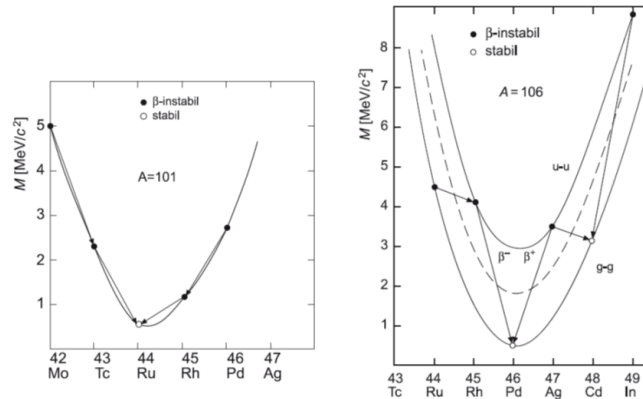


Abbildung IX.3: Gezeigt ist die Kernmasse  $M(A, Z)$  für ein gegebenes  $A$  als Funktion von  $Z$ . (links) Ungerades  $A$  ( $A = 101$ ). (rechts) Gerades  $A$  ( $A = 106$ ): in diesem Fall findet man stabile Nuklide. Quelle: Povh

Die Masse  $M(A, Z)$  wird also durch eine Parabel in  $Z$  beschrieben. Dabei muss man zwei Fälle unterscheiden:

**$A$  ist ungerade.** In diesem Fall muss es sich um einen  $ug$ -Kern handeln und der Paarungsterm verschwindet:  $\delta = 0$ . Abbildung IX.3 (links) zeigt diesen Fall für Isobare mit  $A = 101$ . Das stabilste Nuklid mit der größten Bindungsenergie und der kleinsten Masse ist Ru ( $Z = 44$ ). Alle anderen Nuklide sind  $\beta$ -instabil und zerfallen entweder durch  $\beta^-$ -Zerfall (Nuklide mit kleinerem  $Z$ ) oder durch  $\beta^+$ -Zerfall (Nuklide mit größerem  $Z$ ).

**$A$  ist gerade.** Solche Nuklide können entweder  $uu$ - oder  $gg$ -Kerne sein. Der Paarungsterm bewirkt, dass es zwei verschiedene Massenparabeln gibt, die gerade um  $2 \cdot 11.2/A^{1/2}$  MeV versetzt sind. Ein einfacher  $\beta$ -Zerfall wechselt einen  $uu$ - in einen  $gg$ -Kern (und umgekehrt). Übergänge finden deshalb zwischen den Massenparabeln statt. Für solche Kerne beobachtet man für  $A > 70$  oft zwei stabile Isobare. Abbildung IX.3 (rechts) zeigt diesen Fall für Isobare mit  $A = 106$ . Das stabilste Nuklid ist Pd. Cd ( $gg$ ) zeigt im Vergleich dazu eine niedrigere Bindungsenergie. Ein einfacher  $\beta$ -Zerfall ist aber energetisch nicht möglich, weil die benachbarten Isobaren eine größere Masse aufweisen. Möglich wäre aber ein doppelter  $\beta$ -Zerfall nach Pd:  ${}^{106}_{48}\text{Cd} \rightarrow {}^{106}_{46}\text{Pd} + 2e^+ + 2\nu_e$ . Die Wahrscheinlichkeit für diesen  $2\beta$ -Übergang ist aber so klein, dass man  ${}^{106}\text{Cd}$  als ein stabiles Nuklid betrachten kann.

Aus der Lage des Minimums  $Z_0$  der Massenverteilung für gegebenes  $A$

$$\left. \frac{dM(A, Z)}{dZ} \right|_{Z=Z_0} = 0 \rightarrow Z_0 = \frac{A}{1.98 + 0.015A^{2/3}} < \frac{A}{2}$$

kann man das Stabilitätstal als Funktion von  $Z$  und  $A$  rekonstruieren.



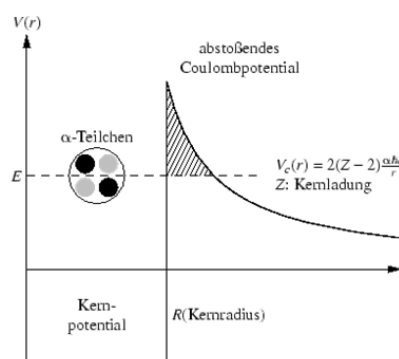
IX.3.2  $\alpha$ -Zerfall

Protonen und Neutronen sind auch bei sehr schweren Kernen noch immer mit einer mittleren Bindungsenergie von etwa 8 MeV gebunden. Protonen- und Neutronen-Emission wird daher nur bei sehr neutronen- bzw. protonarmen Kernen beobachtet.

Aufgrund der hohen Bindungsenergie (7 MeV/Nukleon) eines  $\alpha$ -Teilchens ( ${}^4_2\text{He}$ -Kerns) führt für schwere Kernen aber die Abtrennung eines  $\alpha$ -Teilchens zu einem Energiegewinn. Mit der Massenformel ergeben sich für diese Zerfälle typische kinetische Energien des  $\alpha$ -Teilchens von 5 MeV. Die Potential und Energieverhältnisse sind in der folgenden Abbildung skizziert. Innerhalb des Kern herrscht ein stark anziehendes Kernpotential das näherungsweise durch einen Potentialtopf beschrieben werden kann. Außerhalb des Kerns ( $r > R$ ) spürt das Teilchen eine Coulomb-Abstoßung durch den Restkern:

$$V_C(r) = 2(Z - 2) \cdot \frac{\alpha\hbar c}{r}$$

Dieses Potential bildet eine Coulomb-Barriere: Ein  $\alpha$ -Teilchen mit der skizzierten kinetischen Energie kann bei Annäherung an den Kern diese Barriere nicht überwinden. Umgekehrt kann auch das  $\alpha$ -Teilchen innerhalb des Kerns diese Potentialbarriere nicht überspringen. Quantenmechanisch ist aber ein Durchtunneln der Barriere möglich. Die Wahrscheinlichkeit, dass der  $\alpha$ -Zerfall stattfindet, wird deshalb vor allem durch die Tunnelwahrscheinlichkeit gegeben.



Die Transmissionwahrscheinlichkeit  $T$  bei Stoß eines  $\alpha$ -Teilchens mit kinetischer Energie  $E_\alpha$  mit einer Potentialbarriere der Höhe  $V_0$  und der Breite  $d$  kann genähert werden zu<sup>2</sup>:

$$T = e^{-2\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha c^2(V_0 - E_\alpha)}d}$$

Für ein beliebiges Potential  $V(r)$  findet man entsprechend:

$$T = e^{-2G} \quad \text{mit} \quad G = \frac{1}{\hbar} \int_R^{r_1} \sqrt{2m_\alpha c^2 |E_\alpha - V(r)|} dr \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}$$

Die Größe  $G$  bezeichnet man als Gamow-Faktor. Für  $V(r) \sim \frac{1}{r}$  lässt sich das Integral in geschlossener Form angeben.

Die Lebensdauer für den  $\alpha$ -Zerfall wird gegeben durch,

$$\frac{1}{\tau} = w(\alpha) \nu e^{-2G} \sim e^{-2/\sqrt{E_\alpha}},$$

<sup>2</sup>Die Näherung besteht darin, den in der Tunnelwahrscheinlichkeit vorkommenden  $\sinh^2 x$  für  $x \gg 1$  zu  $\sinh^2 x \approx \frac{1}{4}e^{2x}$  zu nähern. S.a. Mayer-Kuckuck, Kernphysik.

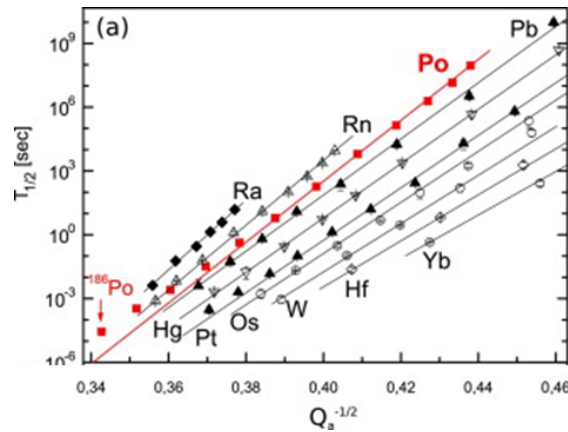


Abbildung IX.4: Lebensdauer von  $\alpha$ -instabilen Nukliden als Funktion von  $Q_{\alpha}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{E_{\alpha}}}$ . Für die Nuklide einer gegebenen Zerfallsreihe ändern sich die Potentialverhältnisse kaum, so dass sie gemäß der Geiger-Nuttall-Regel auf einer Geraden liegen. Quelle: C.Qi et al. Phys. Lett. B 732 (2014) 203.

wobei  $w(\alpha)$  die Bildungswahrscheinlichkeit für ein  $\alpha$ -Teilchen und  $\nu$  die Stoßrate des  $\alpha$ -Teilchens mit der Potentialbarriere ist. Die Stoßrate wird gegeben durch  $\nu = v/2R$ , der mittleren Geschwindigkeit  $v$  des  $\alpha$ -Teilchens und dem Radius des Kerns  $R$ . Für die Halbwertszeit erhält man dann die sogenannte Geiger-Nuttall-Regel,

$$\log t_{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{\sqrt{E_{\alpha}}},$$

die, wie Abbildung IX.4 zeigt, empirisch bestätigt wird. Die sehr starke Abhängigkeit von  $\sqrt{E_{\alpha}}$  ist ein Resultat des Tunnelns und bewirkt Halbwertszeiten für  $\alpha$ -Zerfälle, die von  $O(10\text{ns})$  bis zu  $10^{17}$  Jahren variieren können.

**Radioaktive-Zerfallsreihen:**

Durch sequentielle  $\alpha$ -Zerfälle werden vier radioaktive Zerfallsreihen ( $A = 4n, = 4n + 1, = 4n + 2, = 4n + 3$ ) festgelegt. Drei Zerfallsreihen sind heute noch natürlich vorkommend:

- Uran-239( $4n + 2$ )-Reihe, auch Uran-Radium-Reihe, endet bei  $^{206}\text{Pb}$
- Uran-235( $4n + 3$ )-Reihe, auch Uran-Actinium-Reihe, endet bei  $^{207}\text{Pb}$
- Thorium-232( $4n$ )-Reihe, Thorium-Reihe, endet bei  $^{208}\text{Pb}$

Angegeben sind hier Start- und End-Nuklide. Wenn man eine  $\alpha$ -Zerfallsreihe in der Nuklidtafel verfolgt - Abbildung IX.5 zeigt die drei natürlich vorkommenden Zerfallsreihen, dann findet man dass innerhalb der Reihen neben den  $\alpha$ -Zerfällen auch  $\beta$ -Zerfälle stattfinden. Die Nuklide der vierten Reihe sind aufgrund ihrer Lebensdauer auf der Erde bis auf  $^{209}\text{Bi}$  bereits zerfallen und müssen künstlich erzeugt werden:

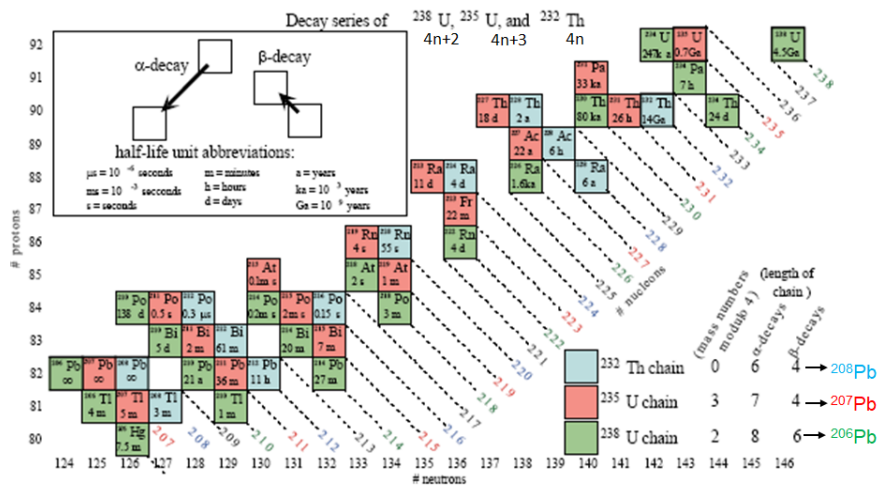


Abbildung IX.5: Radioaktive Zerfallsreihen: Ausschnitt der Nuklidkarte mit den drei radioaktiven Zerfallsreihen, die farblich verschieden markiert sind.  $\alpha$ -Zerfälle entsprechen Sprüngen entlang der Diagonalen ( $A \rightarrow A - 4$ ) und  $\beta$ -Zerfälle entsprechen Verschiebungen entlang der Diagonalen mit konstantem  $A$ .

Plutonium-241( $4n + 1$ )-Reihe, Neptunium-Reihe, endet bei (<sup>209</sup>Bi) <sup>205</sup>Th<sup>3</sup>.

### IX.4 Kernspaltung

Die Kernspaltung wurde 1938 durch O. Hahn und F. Straßmann entdeckt. L. Meitner zusammen mit ihrem Neffen R.O. Frisch gaben als erste eine korrekte Interpretation der zugrundeliegenden Prozesse. Ende 1942 setzte E. Fermi eine erste kontrollierte Kettenreaktion in Gang.

Da die Bindungsenergie  $B(A, Z)$  pro Nukleon für Kerne im Bereich von <sup>56</sup>Fe am größten ist, können sich schwere Kerne mit  $Z > 40$  prinzipiell in zwei mittelschwere Kerne spalten. Der Q-Wert der Spaltung ergibt sich aus der Massendifferenz zwischen Anfangs- und Endzustand der Kerne. Allerdings muss auch hier eine Coulomb-Barriere durchtunnelt werden, so dass spontane Spaltung i.a. sehr unwahrscheinlich ist. Typischerweise müssen Spaltprozesse durch Stöße und Hinzufügen einer Aktivierungsenergie von außen induziert werden.

<sup>3</sup>Auf der Erde findet man heute nur noch <sup>209</sup>Bi. Aufgrund der sehr großen Halbwertszeit (19 Trillionen Jahre) wurde es lange Zeit für das Endnuklid gehalten, bis 2003 entdeckt wurde, dass es einen  $\alpha$ -Zerfall macht, so dass die Reihe tatsächlich bei Thallium endet.

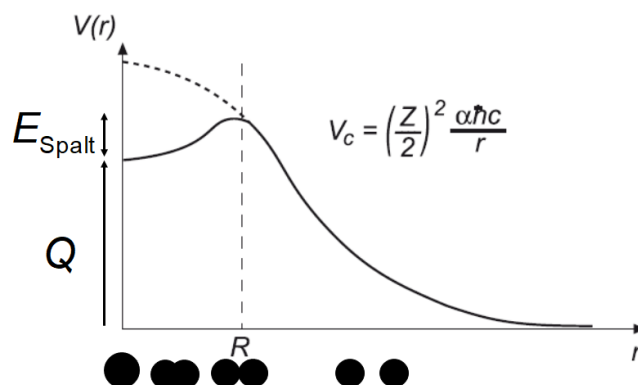


Abbildung IX.6: Qualitativer Potentialverlauf bei der Spaltung, der sich aus dem Tröpfchenmodell ergibt. Um einen Kern zu spalten, ist neben der durch die Spaltung frei werdenden Energie  $Q$  eine zusätzliche Aktivierungs- oder Spaltenergie  $\Delta E_{\text{Spalt}}$  notwendig. Für  $Z^2/A > 51$  verschwindet die Spaltbarriere (gestrichelte Kurve).

#### IX.4.1 Spontane Spaltung

Die leichtesten Kerne, für die die spontane Spaltung mit dem  $\alpha$ -Zerfall konkurriert, sind einige Uran-Isotope.

Abbildung IX.6 zeigt den Potentialverlauf für die Spaltung, der sich aus dem Tröpfchenmodell ergibt. Die Form des Potentials lässt sich verstehen, wenn man von einem ursprünglich sphärischen Kern ausgeht, der sich langsam deformiert. Dadurch vergrößert sich die Oberfläche und der Oberflächenterm nimmt zu - es muss gegen die „Oberflächenspannung“ Arbeit geleistet werden. Gleichzeitig nimmt der Coulomb-Term ab. Wenn sich die Teilkerne weiter entfernen, kommt es schließlich kurz vor der Trennung zu einer Einschnürung (Abstand  $R$ ). Danach wirkt nur noch die Coulomb-Abstoßung. Zur Überwindung des Sattelpunktes ist die Energie  $\Delta E_{\text{Spalt}}$  notwendig. Im Vergleich zum  $\alpha$ -Zerfall, ist die zu überwindende Barriere relativ zur Verfügung stehenden Energie  $Q$  geringer. Für die Spaltung von Uran beträgt die freiwerdende Energie typisch  $Q \approx 200$  MeV, die Höhe der Barriere beträgt hingegen nur  $\Delta E_{\text{Spalt}} = 5 \dots 7$  MeV. Aufgrund einer durch die Kernkräfte bewirkten Abflachung, ist die zu überwindende Coulomb-Barriere tatsächlich sogar noch geringer. Wenn die Potential-Barriere fast verschwindet kann spontane Spaltung auftreten<sup>4</sup>.

Nimmt man symmetrische Spaltung in zwei gleich große Tochterkerne an,  $A' = A/2$  und  $Z' = Z/2$ , so findet man aus der Bethe-Weizsäcker-Formel für den  $Q$ -Wert<sup>5</sup>:

$$Q = a_O A^{\frac{2}{3}} (1 - 2^{\frac{1}{3}}) + a_C Z^2 A^{-\frac{1}{3}} (1 - 2^{-\frac{2}{3}}) = a'_O A^{\frac{2}{3}} + a'_C Z^2 A^{-\frac{1}{3}}$$

<sup>4</sup>In die Tunnelwahrscheinlichkeit geht auch die Masse des Tochterkerns ein, die das Tunneln stark unterdrückt.

<sup>5</sup>Wird positiv ab  $A \approx 90$ .

Die Höhe der Coulomb-Barriere ergibt sich aus dem Abstand der Mitten der beiden Tochterkerne zum Zeitpunkt der Einschnürung  $R = 2R_K = 2 \cdot 1.2 \text{ fm} \cdot (A/2)^{\frac{1}{3}}$ :

$$V_C = \left(\frac{Z}{2}\right)^2 \frac{\alpha}{2R_K} \hbar c = C \cdot Z^2 A^{-\frac{1}{3}}$$

Für Instabilität gegen Spaltung muss der Q-Wert größer oder gleich der Coulomb-Barriere sein. Damit erhält man eine qualitative Abschätzung für  $Z^2/A$ :<sup>6</sup>

$$\frac{Z^2}{A} \geq \frac{a'_O}{C - a'_C}$$

Tatsächlich ist, wie oben bereits gesagt, die effektive Potential-Barriere niedriger als hier angenommen und der Tunneleffekt wurde nicht berücksichtigt. Die Betrachtung zeigt aber, dass die Größe  $Z^2/A$  für die Spaltung ein wichtiger Parameter ist. Eine genaue Berücksichtigung der Deformation des Kerns ergibt als ein Maß für Instabilität gegen Spaltung

$$\frac{Z^2}{A} > 51 \quad \text{bzw. den Parameter} \quad x = \frac{Z^2}{51 \cdot A},$$

wobei man  $x$  als Spaltungsparameter bezeichnet. Der kritische Wert für spontane Spaltung wird oberhalb von  $Z \approx 100$  erreicht. Ein Beispiel ist  ${}^{244}\text{Fm}$  mit einer Halbwertszeit für Spaltung von 3.2 ms und  $Z^2/A = 41$  ( $x = 0.8$ ).

#### IX.4.2 Stoßinduzierte Spaltung

Spaltung kann auch durch Zuführen einer Aktivierungsenergie, mit der die Spaltbarriere  $\Delta E_{\text{Spalt}}$  überwunden wird, ausgelöst werden. Besonders effektiv ist der Beschuss mit Neutronen, da diese keine Coulomb-Barriere überwinden müssen. In manchen Fällen sind sogar thermische Neutronen ausreichend. Dabei ist nicht nur die kinetische Energie der Neutronen relevant. Durch den Einfang des Neutrons wird auch die entsprechende Bindungsenergie frei, die als Aktivierungsenergie zur Verfügung steht. Im Folgenden sind die Energieverhältnisse für die induzierte Spaltung von  ${}^{235}\text{U}$  mittels thermischer Neutronen und für die Spaltung von  ${}^{238}\text{U}$  mittels MeV-Neutronen gezeigt:

- i) therm. Neutronen:  $n(\text{therm.}) + {}^{235}\text{U} \rightarrow ({}^{236}\text{U})^* \rightarrow Y_1 + Y_2 + \nu \cdot n$   
 $\Delta E_{\text{Spalt}} \approx 5.8 \text{ MeV}$   
 $Q({}^{236}\text{U}) = (m({}^{235}\text{U}) + m_n - m({}^{236}\text{U})) \cdot c^2 = 6.4 \text{ MeV}$
- ii) MeV-Neutronen:  $n(\text{MeV}) + {}^{238}\text{U} \rightarrow ({}^{239}\text{U})^* \rightarrow Y_1 + Y_2 + \nu \cdot n$   
 $\Delta E_{\text{Spalt}} \approx 6.4 \text{ MeV}$   
 $Q({}^{239}\text{U}) = (m({}^{238}\text{U}) + m_n - m({}^{239}\text{U})) \cdot c^2 = 4.8 \text{ MeV}$

<sup>6</sup>Sowohl  $a'_O$  als auch  $C - a'_C$  sind negativ, weshalb sich beim Umformen das  $\leq$ -Zeichen zu  $\geq$  umdreht.

$E_{kin}$ der Spaltfragmente	167	±	5 MeV
$E_{kin}$ aller Spaltneutronen	5	±	0.2 MeV
prompte $\gamma$ -Strahlung	8	±	1.5 MeV
verzögerte $\gamma$ -Strahlung	6	±	1 MeV
$E_{kin}$ der $e^-$ aus dem $\beta$ -Zerfall	6	±	1 MeV
$E_{kin}$ der $\bar{\nu}_e$ aus dem $\beta$ -Zerfall	12	±	2.5 MeV
Summe $Q$	204	±	6 MeV

Tabelle IX.1: Q-Wert für die Spaltung von  $^{235}\text{U}$  und die Energieaufteilung auf verschiedene Endzustandsteilchen.

In (i) ist die freiwerdende Aktivierungsenergie größer als die Spaltschwelle und der Kern spaltet. In (ii) müssen die Neutronen ausreichende kinetische Energie mitbringen (2 MeV), um die Spaltung zu ermöglichen. Der Spaltprozess konkurriert hier aber mit dem  $\beta$ -Zerfall. Der qualitative Unterschied zwischen beiden Reaktionen wird durch die Paarungsterm bewirkt:

- i)*  $ug \rightarrow gg$  es wird Paarungsenergie frei.
- ii)*  $ug \rightarrow gg$  es wird Paarungsenergie benötigt.

#### IX.4.3 Kettenreaktion und Kernkraftwerke

Der Q-Wert für Reaktion (i), die Neutronen-induzierte Spaltung von  $^{235}\text{U}$ , beträgt etwa 204 MeV pro Spaltprozess. Tabelle IX.1 zeigt wie sich die Energie auf die entstehenden Teilchen verteilt. Berücksichtigt sind auch  $\beta$ -Zerfälle der Kernfragmente. Da die kinetische Energie der Neutrinos (12 MeV) weggetragen wird, bleiben 192 MeV pro Spaltprozess die thermisch nutzbar sind. Die Spaltung von 1 g  $^{235}\text{U}$  führt so zu einer thermisch nutzbaren Energie von 2.55 MWh.

**Kettenreaktion:** Bei der durch Neutronen induzierten Spaltung von  $^{235}\text{U}$ ,  $n(\text{therm.}) + ^{235}\text{U} \rightarrow Y_1 + Y_2 + \nu \cdot n$ , werden im Mittel  $\nu = 2.3$  „schnelle“ Neutronen, d.h. Neutronen mit einer mittleren Energie von  $\sim 2$  MeV, frei. Diese können wiederum einen Spaltprozess initiieren. Eine Kettenreaktion ist möglich, wenn die Zahl der Neutronen, die effektiv zur Verfügung stehen,  $\nu_{\text{eff}} > 1$  ist. Da  $^{235}\text{U}$  auch durch schnelle Neutronen gespalten wird, wird  $^{235}\text{U}$  explosiv, sobald es eine kritische Masse überschreitet.

Unter der **kritischen Masse** versteht man die Masse von  $^{235}\text{U}$ , bei der genügend Material vorhanden ist, dass eine genügend große Zahl der freiwerdenden Neutronen wieder absorbiert wird und weitere Kernspaltungen induzieren. Als Folge kann der Prozess unkontrollierbar schnell anwachsen. Für  $^{235}\text{U}$  ( $^{239}\text{Pu}$ ) beträgt bei kugelförmiger Anordnung

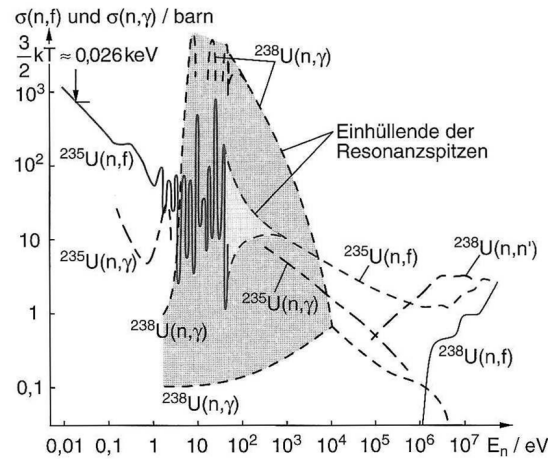


Abbildung IX.7: Neutronen-Wirkungsquerschnitt für verschiedene Prozess in Abhängigkeit der Neutronenenergie für  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$ .

die kritische Masse etwa 49 kg (10 kg). Wenn das Spaltmaterial durch einen Reflektor umgeben ist (z.B. Wasser), der die nach außen entweichenden Neutronen wieder zurück reflektiert, wird die kritische Masse erheblich reduziert ( $\sim 50\%$ ).

Auch wenn  $^{238}\text{U}$ , wie in Reaktion (ii) gezeigt, ebenfalls durch Neutronen spaltbar ist, so wird in der Regel für den Betrieb von Kernkraftwerken **angereichertes Uran** mit 97%  $^{238}\text{U}$  und 3%  $^{235}\text{U}$  verwendet (natürliches Uran besteht hingegen zu 99.3% aus  $^{238}\text{U}$  und nur zu 0.7% aus  $^{235}\text{U}$ ). Grund für die Anreicherung ist, dass für  $^{238}\text{U}$  der Wirkungsquerschnitt für Spaltung auch für schnelle Neutronen sehr niedrig ist, und es eine Reihe weiterer Reaktionen gibt, die die Neutronen absorbieren. Der Neutronen-Wirkungsquerschnitt für  $^{235}\text{U}$  und  $^{238}\text{U}$  ist in Abbildung IX.7 gezeigt. Man sieht deutlich, dass der Spaltquerschnitt von  $^{235}\text{U}$  für thermische Neutronen sehr hoch ist. Verwendet man angereichertes Material, und werden die Neutronen alleine durch Stöße im Uran abgebremst, so durchlaufen sie den Energiebereich zwischen 1 und 100 eV, in dem der Absorptionsquerschnitt von  $^{238}\text{U}$  hoch ist. Die Neutronen werden dann absorbiert durch das  $^{238}\text{U}$  absorbiert und stehen nicht mehr für die Kettenreaktion und die Spaltung von  $^{235}\text{U}$  zur Verfügung.

Dieses Problem lässt sich umgehen, wenn man neben den Uranstäben einen eigenen **Moderator** verwendet, der die Neutronen auf thermische Geschwindigkeiten abbremst. Je nach Kraftwerkstyp wird als Moderator-Medium  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{D}_2\text{O}$  oder Graphit verwendet, wobei die Neutronen in  $\text{H}_2\text{O}$  die kürzeste Bremslänge von nur etwa 5 cm haben. Nachteil von  $\text{H}_2\text{O}$  gegenüber den anderen Moderatoren ist aber der hohe Absorptions-wirkungsquerschnitt für Neutronen. Der Moderator umgibt die eigentlichen Brennstäbe. In Deutschland kamen fast ausschließlich nur „Leichtwasser“-Reaktoren mit  $\text{H}_2\text{O}$  als

Moderator zum Einsatz.

**Reaktorregelung:** Für die Regelung der Kettenreaktion eines Reaktors ist der effektive Vermehrungsfaktor  $k_{\text{eff}}$  der Neutronen von Generation zu Generation entscheidend. Die Zahl der in der Generation  $n + 1$  effektiv für die Spaltung zur Verfügung stehenden Neutronen  $N_{n+1}$  ergibt sich dabei aus der Zahl  $N_n$  in Generation  $n$  unter Berücksichtigung von  $k_{\text{eff}}$ :  $N_{n+1} = k_{\text{eff}} \cdot N_n$ . Die Zeitkonstante eines Spaltzyklus  $T$  ergibt sich aus der Abbremszeit der Neutronen auf thermische Energien, die typisch etwa  $100 \mu\text{s}$  beträgt. Damit erhält man für die zeitliche Änderung  $dN/dt$  der vorhandenen Neutronen bzw. für die Zahl der für die Spaltungen zur Verfügung stehenden Neutronen  $N(t)$ :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k_{\text{eff}} - 1}{T} \cdot N \quad \text{bzw.} \quad N(t) = N_0 \exp\left(\frac{k_{\text{eff}} - 1}{T} \cdot t\right)$$

Es ist klar, dass das exponentielle Verhalten den Reaktor für  $k_{\text{eff}} > 1$  in einen nicht mehr zu kontrollierenden Bereich bringt, und dass für einen stabilen Reaktorbetrieb  $k_{\text{eff}} = 1$  sein muss. Die kurze Zeitkonstante von  $100 \mu\text{s}$  erlaubt aber nur schwerlich eine verzögerte Regelung des Vermehrungsfaktors  $k_{\text{eff}}$ . Ein geringer Anteil der Neutronen (1%) wird aber verzögert ( $> 10 \text{ s}$ ) produziert. Ursache sind  $\beta$ -Zerfälle der Kernfragmente, die zu hochangeregten Nukliden führen, für die Neutronen-Emission möglich ist. Auch wenn der Anteil der verzögerten Neutronen nur 1% beträgt, so erlauben diese Neutronen aber eine Regelung der Kettenreaktion und damit des Kernreaktors.

Zur Regelung werden Steuerstäbe aus Materialien mit einem großen Einfangsquerschnitt für thermische Neutronen verwendet (z.B. Cadmium Cd). Werden diese ganz in den Reaktor gesenkt, kommt es zum Abbrechen der Kettenreaktion.

Abbildung IX.8 zeigt schematisch den in Deutschland zumeist verwendeten Typ des Druckwasserreaktors. Ein Reaktor mit einer typischen elektrischen Leistung von etwa 1 GW enthält eine Uranfüllung von etwa 100 t (etwa 3% davon ist  $^{235}\text{U}$ ). Nach einer 3-jährigen Betriebsdauer beträgt der Anteil von  $^{235}\text{U}$  nur noch knapp 1%. Auch der Anteil von  $^{238}\text{U}$  hat sich auf etwa 94% verringert. Stattdessen sind eine Reihe von verschiedenen Spaltprodukten und vor allem auch Plutonium (1%) entstanden. Viele der Spaltprodukte sind hoch-radioaktive  $\beta$ -Strahler ( $^{131}\text{I}$ ,  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{90}\text{Sr}$  (kurzlebig) und  $^{129}\text{I}$  langlebig). Die radioaktiven Zerfälle des Abbrands produzieren noch eine erhebliche Wärme (10-15% der ursprünglichen Leistung), weshalb die Brennstäbe auch nach dem Austausch gekühlt werden müssen.



### Druckwasser-Reaktor

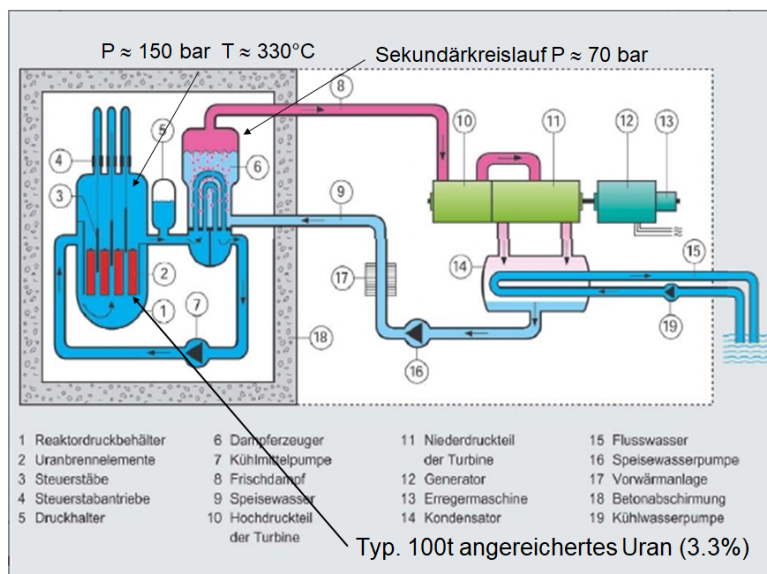


Abbildung IX.8: (oben)

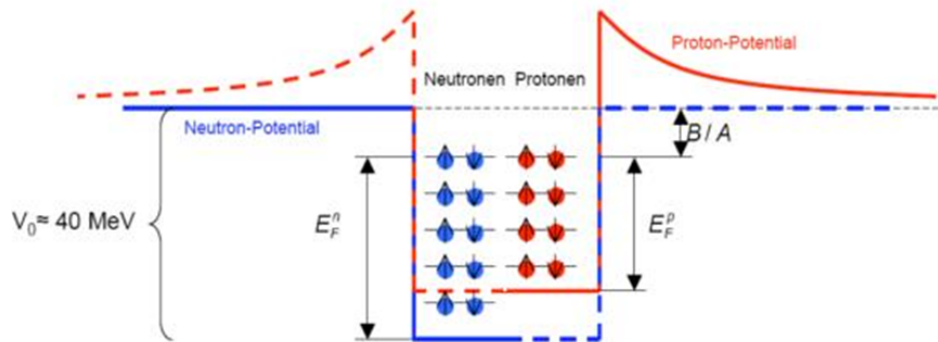


Abbildung IX.9: (Fermigas-Modell des Kerns: Gezeigt sind die beiden Potentialtöpfe für Neutronen und Protonen, die aufgrund der Coulomb-Abstoßung eine unterschiedliche Tiefe haben. Für den Proton-Topf existiert zudem eine Coulomb-Barriere.

### IX.5 Fermigas Modell des Kerns

Im Tröpfchenmodell wurden die Nukleonen als stark miteinander wechselwirkende Teilchen betrachtet (kollektives Modell). Stattdessen sollen die Nukleonen nun als unabhängige Teilchen, die sich in einem gemeinsamen effektiven Potential befinden, betrachtet werden (Einteilchenmodell). Das einfachste dieser Einteilchenmodelle erhält man, wenn man die Nukleonen des Kerns als ein entartetes Fermigas innerhalb eines Potentialtopfs betrachtet. „Entartet“ bedeutet hier, dass die „Gas-Temperatur“ als so niedrig angenommen wird, dass die Nukleonen nur die niedrigsten Energiezustände besetzen. Der dreidimensionale Potentialtopf erstreckt sich über den Kern mit Radius  $R_K$ , wobei aufgrund der Coulomb-Abstoßung sowie der Coulomb-Barriere die Potentialtöpfe für Protonen und Neutronen verschieden sind. Die Potentialverhältnisse als Funktion des radialen Abstandes  $r$  sind in Abbildung IX.9 gezeigt. Bei der Besetzung der Energieniveaus muss für jede Spezies das Pauli-Prinzip berücksichtigt werden, d.h. dass jedes Energieniveau nur mit maximal 2 Nukleonen (Spin  $\pm \frac{1}{2}$ ) besetzt werden kann. Da Neutronen und Protonen unterscheidbar sind, werden die beiden Potentialtöpfe unabhängig besetzt. Aufgrund der Entartung sind die Energieniveaus nur bis zur Fermi-Energie  $E_f$ , die für Protonen und Neutronen verschieden ist, besetzt.

Zur Berechnung der Fermi-Energie muss die Zustandsdichte und die Gesamtzahl der Nukleonen berücksichtigt werden. Die Zustandsdichte<sup>7</sup> ergibt sich aus dem Einteilchenpha-

<sup>7</sup>Für die Zustandsdichte  $\frac{dn}{dE}$  findet man mit der nicht-relativistischen Energie-Impuls-Beziehung  $E = p^2/2m$ ,

$$\frac{dn}{dE} \sim \sqrt{E},$$

d.h., die Abstände der Energieniveaus im Potentialtopf werden nach oben hin immer dichter, was in Abbildung IX.9 nicht korrekt dargestellt ist.

senraum (s. Kap. III). Die Zahl der Zustände  $dn$  für ein Nukleon (Proton oder Neutron) mit Impuls  $p \in [p, p + dp]$  beträgt:

$$dn = \frac{V \cdot 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}$$

Damit lässt sich die Gesamtzahl der Nukleonen (Protonen oder Neutronen)  $n$  mit einem Impuls  $p$  kleiner oder gleich dem Fermi-Impuls  $p_f = \sqrt{2mE_f}$  (nicht relativistisch) berechnen:

$$n = 2 \cdot \frac{V \cdot 4\pi \int_0^{p_f} p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{V \cdot (p_f)^3}{3\pi^2\hbar^3}.$$

Der Faktor 2 berücksichtigt, dass jeder Zustand mit jeweils 2 Nukleonen besetzt werden kann. Aus der Zahl der Protonen  $Z$  und Neutronen  $N$  lassen sich dann die Fermi-Impulse für Protonen und Neutronen bestimmen:

$$Z = \frac{V \cdot (p_f^p)^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad \text{und} \quad N = \frac{V \cdot (p_f^n)^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

Das Kernvolumen lässt sich mit  $R_K = R_0 \cdot A^{1/3}$  zu  $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \cdot A$  bestimmen. Für symmetrische Kerne mit  $Z = N = A/2$  erhält man dann für die Fermi-Impulse  $p_f^{p,n}$  der Protonen und Neutronen,

$$p_f^p = p_f^n = \frac{\hbar}{R_0} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 250 \text{ MeV}/c.$$

Der berechnete Fermi-Impuls stimmt mit der Abschätzung des Nukleon-Impulses aus der Unschärferelation überein. In quasi-elastischer Elektron-Kern-Streuung kann der Fermi-Impuls der Nukleonen gemessen werden - die Resultate bestätigen das Fermi-Modell. Die Nukleonen bewegen sich also mit einem verhältnismäßig großen Impuls frei im Potentialtopf des Kerns.

Aus dem Fermi-Impuls lässt sich die Fermi-Energie  $E_F^{p,n}$ , die der Energie des höchsten besetzten Zustandes entspricht, bestimmen:

$$E_F^{p,n} = \frac{(p_F^{p,n})^2}{2m_{p,n}} \approx 33 \text{ MeV}$$

Die Differenz  $B'$  zwischen der Kante des Potentialtopfs und der Fermi-Energie ist für die meisten Kerne konstant und entspricht der Bindungsenergie  $B/A$  pro Nukleon, die zwischen 7 und 8 MeV liegt. Damit lässt sich die Potentialtopftiefe  $V_0$  berechnen:

$$V_0 = E_F + B' \approx 40 \text{ MeV}$$

Die Potentialtopftiefe und die Energie, die zum Abtrennen eines Nukleons benötigt wird, sind von gleicher Größenordnung wie die mittlere kinetische Energie eines Nukleons

(20 MeV - s. Herleitung in der Box), was ähnlich wie bei einem Elektronengas in einem Metall ist (Im Metall ist die Energieskala aber eV.). Die Nukleonen erscheinen also trotz der starken Wechselwirkung eher „relativ schwach“ gebunden. Die Nukleonen verhalten sich im entarteten Fermigas-Modell also wie ein wechselwirkungsfreies Teilchensystem. Eine Erklärung hierfür ist das sogenannte Pauli-Blocking: Benachbarte Energieniveaus sind bereits alle mit anderen Nukleonen besetzt so dass für eine Nukleon-Nukleon-Streuung keine Energieniveaus zur Verfügung stehen.

Für einen stabilen Kern, sollten die Energieniveaus bis zu den Fermikanten vollständig besetzt sein. Weiter sollten die Fermikanten für Protonen und Neutronen etwa gleich hoch liegen. Findet man beispielsweise unterhalb der Fermikanten der Neutronen noch unbesetzte Protonen-Niveaus, wäre der Kern  $\beta^-$ -instabil: Durch  $\beta^-$ -Zerfall könnte das entstandene Proton ein tieferes Energieniveau einnehmen. Auch ist klar, dass ein einfach besetztes Niveau energetisch ungünstig ist, was den Paarungsterm der Bethe-Weizsäcker-Formel motiviert. Das Fermigas-Modell gibt auch eine Erklärung für den Symmetrie-Term in der Massenformel - siehe dazu die Diskussion in der Box.

### Mittlere kinetische Energie und Symmetrie-Term<sup>a</sup>

Im Folgenden soll für das Fermigas-Modell die Abhängigkeit der Bindungsenergie vom Neutronenüberschuss bestimmt werden, was eine Erklärung für den Symmetrie-Term in der Bethe-Weizsäcker Formel liefert. Dazu betrachtet man die mittlere kinetische Energie eines Nukleons:

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_{kin} p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5} \cdot \frac{p_F^2}{2m} \approx 20 \text{ MeV}$$

Für die gesamte kinetische Energie aller Protonen und Neutronen ergibt sich dann

$$\begin{aligned} E_{kin}(Z, N) &= Z \cdot \langle E_{kin}^p \rangle + N \cdot \langle E_{kin}^n \rangle = \frac{3}{10m} \cdot (Z \cdot (p_F^p)^2 + N \cdot (p_F^n)^2) \\ &= \frac{3}{10m} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{Z^{5/3} + N^{5/3}}{A^{2/3}} \end{aligned}$$

Bei der Herleitung wurde angenommen, dass die Radien der beiden Potentialtöpfe für Protonen und Neutronen gleich groß sind. Für eine feste Massenzahl  $A$  hat die mittlere kinetische Energie ein Minimum bei  $N = Z$ . Die kinetische Energie wird größer, wenn man von  $N = Z$  abweicht. Eine höhere kinetische Energie ist aber mit einer geringeren Bindungsenergie verbunden. Entwickelt man den Ausdruck der kinetischen Energie nach kleinen Werten von  $\Delta = (N - Z)$  erhält man mit  $(1 + \delta)^q = 1 + q\delta + \frac{1}{2}(q-1)q\delta^2 + \dots$

$$N^{5/3} + Z^{5/3} = \frac{1}{2}(A + \Delta)^{5/3} + \frac{1}{2}(A - \Delta)^{5/3} \approx 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{5/3} \cdot \left( A + \frac{5(N-Z)^2}{9A} \right) + \dots$$

$$E_{kin}(Z, N) = \frac{3}{10m} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \left( A + \frac{5(N-Z)^2}{9A} + \dots \right)$$

D.h., die Bindungsenergie sollte einen Term  $\sim \left( -\frac{(N-Z)^2}{A} \right)$  enthalten, was genau dem Symmetrie-Term der Bethe-Weizsäcker-Formel entspricht.

<sup>a</sup>Der Abschnitt folgt dem Buch von Povh.

## IX.6 Schalenmodell der Kerne

Das Fermigas-Modell beschreibt die Nukleonen als ein wechselwirkungsfreies Gas in einem Potentialtopf. Das Modell ist nicht in der Lage Kerneigenschaften wie Spin und Parität oder angeregte Kernzustände, die unter Emission hochenergetischer  $\gamma$ -Strahlung zerfallen, zu beschreiben. Eine weitere Beobachtung, die weder durch das Tröpfchenmodell noch durch das einfach Fermigas-Modell beschrieben werden kann sind die sogenannten

„magischen Zahlen“. Kerne mit einer „magischen“ Anzahl an Protonen oder Neutronen weisen eine große Anzahl stabiler Nuklide auf. Doppelt magische Kerne wie  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$  oder  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$  sind außergewöhnlich stabil. Die magischen Zahlen sind:

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

Trägt man die Separationsenergie eines Nukleons als Funktion der entsprechenden Nukleonenzahl ( $Z$  oder  $N$ ) auf, so zeigt sich, dass immer dann charakteristische Sprünge in der Separationsenergien auftreten, wenn die Zahl dieser Nukleonenspezies einer magischen Zahl entspricht: Die Separationsenergie ist besonders groß, wenn das Nukleon gerade die magische Zahl komplementiert. Die Separationsenergie ist besonders klein wenn nach abgeschlossener magischer Zahl weitere Nukleonen hinzugefügt werden. Dieses Verhalten erinnert an die abgeschlossenen Atomshalen im Falle der Edelgase und deutet auf eine Schalenstruktur auch für die Kerne hin.

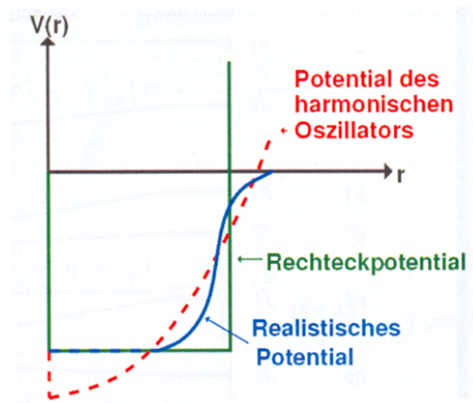
Um Schalenstruktur, Kernspin und die Parität des Kerns zu verstehen, muss man analog zum Mehrelektronensystem die Schrödingergleichung für die Nukleonen lösen. Hier folgt man dem Weg der Atomphysik und betrachtet ein einzelnes Nukleon im effektiven Potential aller anderen Nukleonen, für das man dann die Schrödingergleichung löst.

Für ein radialsymmetrisches Potential lassen sich wie in der Atomphysik zu Energieeigenwerten  $E_{nl}$  entsprechende Nukleon-Eigenfunktionen,  $\psi_{n,\ell,m} = R_{nl}(r) \cdot Y_{\ell m}(\theta, \phi)$  finden, die in einen Radial- und Winkelanteil faktorisieren. Auch hier sind die  $n\ell$ -Niveaus aufgrund des Nukleospins  $2(2\ell + 1)$ -fach entartet. Die Energieniveaus werden unter Beachtung des Pauliprinzips sukzessive mit den Nukleonen aufgefüllt. Dadurch erhält man dann wie für die Atomhülle eine Schalenstruktur des Kerns.

Das Schalenmodell wurde 1949 von M. Goeppert-Mayer und unabhängig im gleichen Jahr von J. Hans D. Jensen, O. Haxel und H. E. Suess ausgearbeitet. Goeppert-Mayer und Jensen erhielten dafür 1963 den Nobelpreis für Physik.

### IX.6.1 Potentialansätze und magische Zahlen

Die Form des effektiven Potentials kennt man a priori nicht. Aufgrund der kurzreichweitigen Kräfte sollte das Potential aber der Dichteverteilung der Nukleonen folgen. Zur Anwendung kommen verschiedene phänomenologische radial-symmetrische Potentiale. Drei vereinfachte Potentialansätze sind in der folgenden Abbildung dargestellt:



**Kasten-Potential**

**Harmonisches Potential:** gute Näherung für leichte „gaußförmige“ Kerne.

**Woods-Saxon-Potential:**

$$V(r) = -V_0 \left( 1 + \exp \left( \frac{r - R_0}{a} \right) \right)^{-1}$$

Potentialverlauf folgt der Nukleonverteilung im Kern mit „weichem“ Rand.

Harmonisches Potential:

Am einfachsten zu behandeln und bereits sehr instruktiv ist das 3-dimensionale harmonische Potential (3-dim. harmonischer Oszillator) mit

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \quad \text{mit} \quad \hbar \omega_0 \approx \frac{41}{A^{1/3}} \text{ MeV}$$

Für die Energieeigenwerte findet man entsprechend im kartesischen System:

$$E_N = \left( N_x + \frac{1}{2} + N_y + \frac{1}{2} + N_z + \frac{1}{2} \right) \cdot \hbar \omega_0 = \left( N + \frac{3}{2} \right) \cdot \hbar \omega_0 \quad \text{mit} \quad N, N_x, N_y, N_z = 0, 1, 2, \dots$$

Für Kugelkoordinaten erhält man entsprechend,

$$E_{n\ell} = \left( 2(n - 1) + \ell + \frac{3}{2} \right) \cdot \hbar \omega_0 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots \\ \ell = 0, 1, 2, \dots \end{cases},$$

wobei also  $N = 2(n - 1) + \ell$  ist. Hier kommt es für Zustände mit verschiedenen  $(n, \ell)$ -Kombinationen aber gleichem  $N$  zu einer für den harmonischen Oszillator spezifischen zufälligen Entartung (z.B. (2,0) und (1,2) haben den gleichen Energieeigenwert), die für andere Potentialformen i.a. aufgehoben ist. Man findet die folgenden Zustände, die aufgrund der Entartung eine klare Schalenstruktur aufweisen:

$nl$	$N$	$2n + l - 2$	$m_l$ -Entartung	mit Spin	Zustände mit $E_N$	Zustände $E \leq E_N$
1s	0	$2 \cdot 1 + 0 - 2$	1	2	2	2
1p	1	$2 \cdot 1 + 1 - 2$	3	6	6	8
1d	2	$2 \cdot 1 + 2 - 2$	5	10		
2s		$2 \cdot 2 + 0 - 2$	1	2	12	20
1f	3	$2 \cdot 1 + 3 - 2$	7	14		
2p		$2 \cdot 2 + 1 - 2$	3	6	20	40
1g	4	$2 \cdot 1 + 4 - 2$	9	18		
2d		$2 \cdot 2 + 2 - 2$	5	10		
3s		$2 \cdot 3 + 0 - 2$	1	2	30	70
1h	5	$2 \cdot 1 + 5 - 2$	11	22		
2f		$2 \cdot 2 + 3 - 2$	7	14		
3p		$2 \cdot 3 + 1 - 2$	3	6	42	112

Die abgeleiteten Nukleonenzahlen für die Schalenabschlüsse (letzte Spalte) lauten 2, 8, 20, 40, 70, 112 und stimmen nur für die ersten drei Elemente mit den magischen Zahlen überein.

#### Woods-Saxon-Potential:

Ein realistischeres Potential für schwerere Kern ist das Woods-Saxon-Potential. Es ist der Fermi-Funktion angepasst, die die Nukleondichte im Kern beschreibt. Die  $(n, \ell)$ -Entartung des harmonischen Oszillators ist für dieses Potential aufgehoben. Man findet die folgenden Zustände:

$n\ell$	1s	1p	1d	2s	1f	2p	1g	2d	3s	...
Entartung	2	6	10	2	14	6	18	10	2	...
Zustände mit $E \leq E_{n\ell}$	2	8	18	20	34	40	58	68	70	...

Auch hier entsprechen die ersten 3 abgeschlossenen Energieniveaus den magischen Zahlen. Die höheren magischen Zahlen können ebenfalls nicht reproduziert werden.

### IX.6.2 Spin-Bahn-Kopplung und Schalenmodell

Alleine mit der Annahme eines effektiven radialen Potentials lassen sich die magischen Zahlen nicht erklären. Zur Erklärung haben M. Goeppert-Mayer sowie H. Jensen, O. Haxel und H.E. Suess vorgeschlagen, dass beim Kern, die Wechselwirkung zwischen Spin und Bahndrehimpuls miteinbezogen werden muss und eine entscheidende Rolle spielt. Während der Spin-Bahn-Kopplung im Falle der Atomhülle klein ist und die Feinstrukturaufspaltung der Energieniveaus bewirkt, liegt die Spin-Bahn-Wechselwirkungsenergie für Nukleonen in der gleichen Größenordnung wie die Abstände der Energieniveaus  $E_{n\ell}$ .

Experimentell lässt sich der Einfluss der Spin-Bahn-Kopplung mittels Nukleon-Kern-Streuung studieren. Ein Beispiel ist die Neutron-Streuung an  ${}^4\text{He}$ , bei der  ${}^5\text{He}$  sowohl im Grundzustand als auch im angeregten Zustand  ${}^5\text{He}^*$  erzeugt wird:  $n+{}^4\text{He} \rightarrow {}^5\text{H}/{}^5\text{He}^* \rightarrow {}^4\text{He}+n$ . Durch Winkel- und Energieanalyse des gestreuten Neutrons lassen sich die Energien als auch die Drehimpulsconfiguration der beiden  ${}^5\text{He}$ -Zustände ermitteln. Dabei stellte sich heraus, dass sich das zusätzliche Neutron im  ${}^5\text{He}$  im 1p-Zustand ( $\ell = 1$ ) befindet (was man auch erwartet, da der 1s-Zustand bereits mit 2 Neutronen besetzt ist), der Grundzustand einen Gesamtdrehimpuls von  $j = \ell + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$  aufweist, und der energetisch höher liegende angeregte Zustand ein  $j = \ell - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ -Zustand ist. Die Termfolge ist also umgekehrt wie man aus der Atomphysik erwarten würde. Weiter muss der  $\ell s$ -Wechselwirkungsterm groß sein, da eine sehr signifikante Aufspaltung der  $j = \frac{3}{2}$  und  $j = \frac{1}{2}$ -Zustände beobachtet wird.

Um die Spin-Bahn-Wechselwirkung im Einteilchenmodell zu berücksichtigen, wird das



bisherige effektive Potential  $V(r)$  um einen radial-symmetrischen wirkenden Spin-Bahnanteil erweitert<sup>8</sup>:

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + V_{\ell s}(r) \cdot \frac{\langle \vec{\ell} \vec{s} \rangle}{\hbar^2}$$

Analog zum Wasserstoffatom führt auch hier die Kopplung von Spin  $\vec{s}$  und Bahndrehimpuls  $\vec{\ell}$  zu einem Gesamtdrehimpuls  $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$  und man findet (Herleitung siehe Kapitel 1):

$$\begin{aligned} \frac{\langle \vec{\ell} \vec{s} \rangle}{\hbar^2} &= \frac{1}{2\hbar^2} \left( \langle \vec{j}^2 \rangle - \langle \vec{\ell}^2 \rangle - \langle \vec{s}^2 \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} (j(j+1) - \ell(\ell+1) - \underbrace{s(s+1)}_{\frac{3}{4}}) = \begin{cases} +\frac{\ell}{2} & \text{für } j = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{(\ell+1)}{2} & \text{für } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

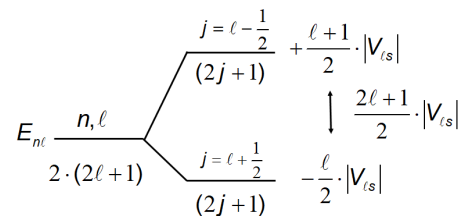
Der zusätzliche Spin-Bahn-Kopplungsterm im Potentialansatz führt zu einer Energieaufspaltung  $\Delta E_{\ell s}$ , die abhängig vom Drehimpuls  $\ell$  und aufgrund von  $V_{\ell s}$  auch abhängig vom Abstand  $r$  ist:

$$\Delta E_{\ell s} = V_{\ell s}(r) \cdot \frac{2\ell + 1}{2}$$

Der vom Abstand abhängige Faktor  $V_{\ell s}$  muss für jedes  $(n, \ell)$  empirisch bestimmt werden. Eine Analyse der beobachteten Kernmassen und Kernspektren ergibt für  $V_{\ell s}$  die folgenden Eigenschaften:

1.  $V_{\ell s}$  ist von ähnlicher Größe wie  $E_{n,\ell}$ .
2.  $V_{\ell s} < 1$  im Gegensatz zur Atomphysik, wo der Term positiv war.

Damit erhält man die in der nebenstehenden Abbildung gezeigte Aufspaltung des Energieniveaus  $E_{n,\ell}$  mit der angegebenen Entartung.



Berücksichtigt man die Spin-Bahn-Kopplung erhält man das in Abbildung IX.10 gezeigte Termschema. Gezeigt sind die Energieniveaus ohne Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung sowie die Aufspaltung der Niveaus durch  $V_{\ell s}$  und die dadurch entstehende Schalenstruktur. Die Unterschalen werden mit  $\ell_j$  bezeichnet). Berücksichtigt man die Niveau-Entartung so lassen sich nun alle magischen Zahlen reproduzieren. Die absolute Lage und die Größe der Aufspaltung der Niveaus ist für Protonen und Neutronen aufgrund der Coulomb-Wechselwirkung leicht unterschiedlich. Dies führt ab  $N = 50$  zu Unterschieden in der Niveaureihenfolge. Die eigentliche Schalenstruktur und die magischen Zahlen, die den Schalenabschlüssen entsprechen, ändern sich aber nicht.

<sup>8</sup>Die radiale Abhängigkeit von  $V_{\ell s}$  muss aus den Messdaten bestimmt werden.

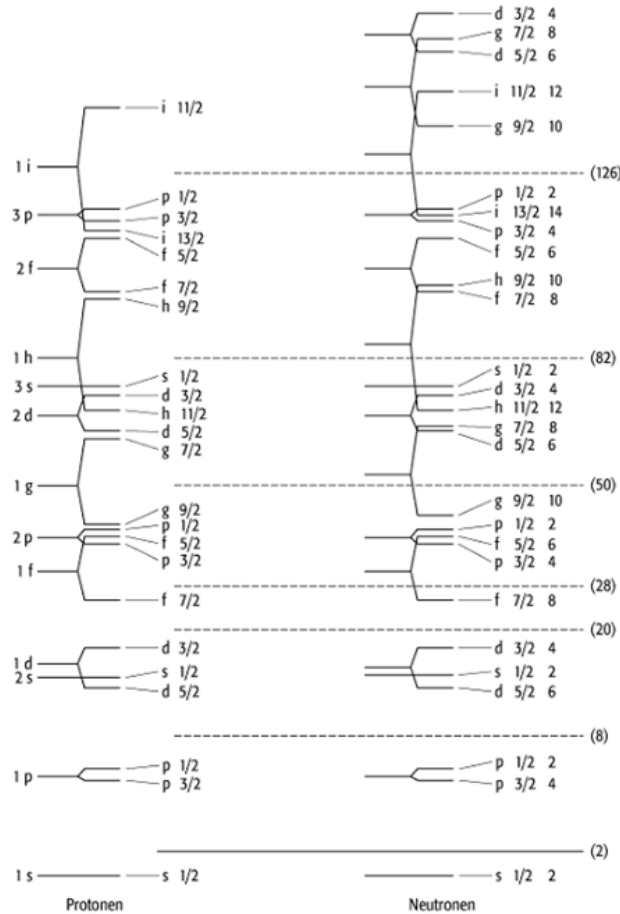


Abbildung IX.10: Schalenstruktur des Einteilchen-Schalenmodells. Die Energieniveaus ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung entsprechen denen des Woods-Saxon-Potential (Interpolation zwischen Zuständen des harmonischem Oszillator und den Zuständen des Rechteckpotentials). Die Spin-Bahn-Kopplung führt zu dem gezeigten Termschema und Schalenstruktur deren Schalenabschlüsse die magischen Zahlen reproduzieren. Die Unterschalen werden mit  $l_j$  bezeichnet. Die Niveautartung der Niveaus ergibt sich aus  $2j + 1$ . Die exakte Lage der Niveaus unterscheiden sich für Protonen und Neutronen. Die Reihenfolge ist ab  $N = 50$  leicht verschieden, die Schalenstruktur und die magischen Zahlen bleiben aber unverändert.

### IX.6.3 Vorhersagen des Schalenmodells

Wie in der Atomphysik werden auch im Schalenmodell die berechneten Einteilchenzustände sukzessive besetzt, und wie in der Atomphysik ist der Gesamtdrehimpuls der voll besetzten  $\ell j$ -Unterschalen Null. Die Parität von Kernen mit vollbesetzten Unterschalen ist positiv.

#### Spin und Parität von Kernen im Grundzustand

Damit lassen sich zumindest prinzipiell die Kerneigenschaften auch für Kern mit nicht vollbesetzten Unterschalen vorhersagen. Der einfachste Falle sind Kerne bei denen sich ein weiteres Nukleon außerhalb der vollbesetzten Schalen befindet. Der Drehimpuls dieses Valenznukleons bestimmt den Kernspin und die Kernparität. Beispiele sind  ${}^8_{17}\text{O}$  und  ${}^9_{17}\text{F}$  bei denen sich entweder ein einzelnes Neutron oder ein einzelnes Proton in der  $d_{5/2}$  befindet (die letzte voll gefüllte Unterschale ist  $p_{1/2}$ ). Der Spin dieser Kerne beträgt  $J = 5/2$  und die Parität des Kerns ist aufgrund von  $P=(-1)^\ell$  mit  $\ell=2$  positiv.

Ähnlich einfach ist die Vorhersage von Kernspin und Parität für Kerne, bei denen ein einzelnes Nukleon für den Schalenabschluss fehlt (Loch). Hier entsprechen der Spin und Parität des Kerns denen des „fehlenden“ Nukleons. Ein Beispiel ist  ${}^{15}\text{O}$  bei dem ein Neutron in der  $p_{1/2}$ -Unterschale zum Schalenabschluss fehlt. Der Spin des Kerns beträgt entsprechend  $j = 1/2$  und die Parität ist wegen  $(-1)^\ell$  negativ.

### IX.6.4 Angeregte Zustände - $\gamma$ -Strahlung

Wie für Atome existieren auch für Kerne angeregte Zustände. Dies können angeregte Zustände eines einzelnen Nukleons<sup>9</sup>, eines Nukleonpaares, oder kollektive Anregungszustände (Rotationen oder Vibrationen) sein. Wenn die Anregungsenergie unterhalb der Schwelle für Teilchenemission liegt, kann der Kern die Anregungsenergie nur durch elektromagnetische Strahlung abgeben, also durch Emission von  $\gamma$ -Quanten. Analog zur Atomphysik kann die Abstrahlung elektromagnetischer Strahlung durch verschiedene Multipolanteile beschrieben werden: E1, E2, E3 und M1, M2, M3 für elektrische (magnetische) Dipol-, Quadrupol- oder Oktupol-Strahlung. Welche Multipolanteile möglich sind, ergibt sich aus den Erhaltungssätzen von Drehimpuls und Parität. Drehimpuls und Parität eines Photons mit der elektrischen Multipolarität  $E\ell$  beträgt  $\ell$  und  $P = (-1)^\ell$ . Ein Photon der magnetischen Multipolarität  $M\ell$  hat ebenfalls Drehimpuls  $\ell$  aber die Parität  $P = (-1)^{(\ell+1)}$ . Damit ergeben sich die folgenden Auswahlregeln für elektrische und magnetische Übergänge von Kernen:

<sup>9</sup>Zur Anregung einzelner Nukleonen in gg-Kernen müssen die energetisch günstigen Nukleonenpaare aufgebrochen werden, wozu die Paarungsenergie aufgebracht werden muss (1-2 MeV). Für gg-Kerne gibt es daher nur wenige Anregungszustände unterhalb von 2 MeV.

Multipol	$E\ell$	$ \Delta J ^{10}$	$\Delta P$	$M\ell$	$ \Delta J $	$\Delta P$
Dipol	E1	1	-	M1	1	+
Quadrupol	E2	2	+	M2	2	-
Oktupol	E3	3	-	M3	3	+

<sup>10</sup> Es gelten die Regeln der Drehimpuls-Algebra:  $|J - \Delta J| \leq J' \leq J + \Delta J$

Kontinuumszustände<sup>11</sup> Bei Anregungsenergien oberhalb von etwa 8 MeV, was der Bindungsenergie der Nukleonen im Kern entspricht, können einzelne Nukleonen emittiert werden. Vorzugsweise werden Neutronen emittiert, da es für sie keine Coulomb-Barriere gibt. Es existieren trotzdem quasi gebundene diskrete Zustände. Da Nukleonemission ein Prozess der starken Wechselwirkung ist, ist er gegenüber der  $\gamma$ -Emmission stark bevorzugt, was zu sehr kurzen Lebensdauer dieser Zustände relativ zu den elektromagnetischen Anregungen führt. Diese Kontinuumszustände sind daher sehr breit und überlappen miteinander.

### IX.6.5 Kollektive Anregungen - Rotationen und Vibrationen

Kerne mit abgeschlossenen Schalen sind kugelsymmetrisch. Die Anregungen einzelner Nukleonen mit typischen Anregungsenergien von O(MeV) wird in diesem Fall gut durch das Schalenmodell reproduziert. Kerne, bei denen sich hingegen eine größere Zahl von Nukleonen außerhalb abgeschlossener Schalen befinden, weisen Rotationsbanden auf, die relativ nahe bei einander liegen (typische Abstände O(100) keV). Dieses Anregungsmuster wird dadurch erklärt, dass diese Kerne stark von der Kugel abweichen, und man sie vereinfacht durch Rotationsellipsoide beschreiben kann. Die niedrigsten Rotations-Anregungszustände dieser Kerne sind Rotation senkrecht zur Symmetrieachse, da um diese Achse das Trägheitsmoment am größten und die Anregungsenergien für Rotation am kleinsten sind. Die Energieeigenwerte der entsprechenden Rotationsmoden sind<sup>12</sup>:

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2\Theta} \cdot J(J+1) \quad \text{mit } J = 0, 2, 4, \dots$$

Hierbei ist  $\Theta$  das Trägheitsmoment um die Drehachse senkrecht zur Symmetrieachse. Die Einschränkung auf gerade Werte von  $J$  ist eine Folge der Symmetrie: Der Kern ist spiegel-symmetrisch zur Ebene senkrecht zur Symmetrieachse. Aufgrund dieser Symmetrie ist die Parität des Grundzustandes positiv und die angeregten Zustände müssen ebenfalls positive Parität haben ( $(-1)^{2J}$ ). Das Rotationspektrum des Grundzustandes von <sup>232</sup>Th ist in Abbildung IX.11 gezeigt. Der Linienabstand kann genutzt werden, um das Trägheitsmoment des Kerns zu bestimmen. Man stellt fest, dass das Trägheitsmoment

<sup>11</sup>Abschnitt folgt der Buch von Povh.

<sup>12</sup>Im allgemeinen koppelt der Kernspin des Grundzustandes mit dem Drehimpuls der Rotationsmoden. Um diese Komplikation zu vermeiden, beschränkt man sich auf gg-Kerne ohne Spin.

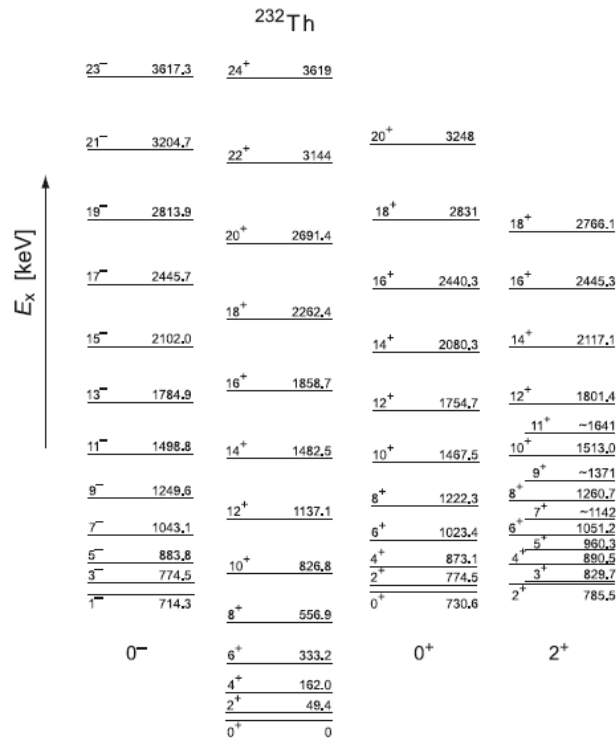


Abbildung IX.11: Termschema von  $^{232}\text{Th}$ . Die Energien sind in keV angegeben. Neben der Rotationsbande des  $^{232}\text{Th}$ -Grundzustandes ( $J^P = 0^+$ ) (zweite Spalte) sind weitere Banden gezeigt, die auf Vibrationszuständen aufbauen. Im Falle des Vibrationszustandes  $J^P = 0^-$  (linke Spalte), haben auch alle Rotationszustände negative Parität (ungerades  $\ell$ ). Quelle: Povh

des deformierten Kerns weitaus geringer ist, als man für einen starren Körper erwarten würde. Das deutet darauf hin, dass sich die Nukleonen bei der Rotation eher wie eine Flüssigkeit verhalten.

Neben den Rotationen gibt es auch Vibrationen als kollektive Phänomene eine wichtige Rolle, wobei man Kompressionsschwingen, Translationsschwingungen und Quadrupolschwingungen unterscheidet. Translationsschwingungen der Neutronen gegen die Protonen des Kerns sind die Ursache der sogenannten Riesenresonanzen, die im Kontinuumsbereich des Anregungsspektrums der Kerne beobachtet werden.

## Kapitel X

# Fusion und Elementsynthese

Das letzte Kapitel beschäftigt mit Fusionsreaktionen, die die Basis für die Energieproduktion der Sterne und die Erzeugung der Elemente in unserem Universum sind. Ausgehend von den Fusionsreaktionen in der Sonne wird im zweiten Abschnitt die Energieproduktion mittels Fusionsreaktoren behandelt. Abschnitt 3 befasst sich mit der Entstehung unseres Universums und der primordialen Elementsynthese leichter Elemente bis Lithium. Die Sternenentwicklung und die Erzeugung schwerer Elemente ist Gegenstand der letzten beiden Abschnitte.

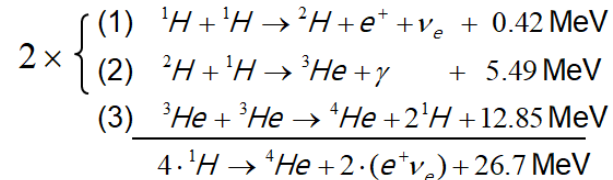
### X.1 Wasserstoff-Fusion in der Sonne

Für Elemente mit  $A < 56$  wird bei Fusion von 2 Kernen Energie frei. Um allerdings einen kontinuierlichen Fusionsprozess innerhalb von Materie aufrecht zu erhalten, müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein: Zum einen muss die kinetische Energie der beiden Reaktionskerne groß genug sein, um die Coulomb-Abstoßung zu überwinden. Bei leichten Kernen (H, He) ist das bei Energien oberhalb von 1 keV der Fall, was einer Temperatur von mehr als  $10^7$  K entspricht ( $k_B = 8.6 \cdot 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$ ,  $k_B T \approx 1 \text{ keV}$ ). Die Temperatur im Innern der Sonne beträgt  $1.6 \cdot 10^7$  K. Bei diesen Temperaturen sind Wasserstoff und Helium vollständig ionisiert und bilden ein Plasma<sup>1</sup>. Zum anderen muss die Dichte der Reaktionskerne so hoch sein, dass die Stoßrate der Kerne genügend Fusionsreaktionen bewirken kann, um die hohe Temperatur aufrecht zu erhalten und einen Energieüberschuss zu produzieren. Bei einem Druck von  $2 \cdot 10^{10}$  bar beträgt die Dichte in der Sonne etwa  $100 \text{ g/cm}^3$ .

---

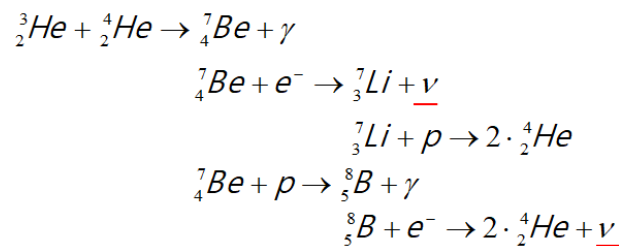
<sup>1</sup>Teilchengemisch aus Ionen und freien Elektronen.

Die Fusionsprozesse in der Sonne sind mittlerweile sehr gut erforscht und das Sonnenmodell wurde durch verschiedene unabhängige Beobachtungen bestätigt (s.u.: Sonnen-Neutrinos). In der Sonne wird der überwiegende Teil der Energie ( $> 98\%$ ) durch den Proton-Proton(pp)-Prozess erzeugt:



Als Netto-Reaktion fusionieren im pp-Zyklus also vier Wasserstoffkerne (Protonen) zu einem  ${}^4\text{He}$ -Kern, wobei 2 Positronen zusammen mit zwei Neutrinos erzeugt werden. Die freiwerdende Energie beträgt 26.2 MeV und berücksichtigt bereits, dass die beiden Positronen mit vorhandenen Elektronen annihilieren und mit  $2 \times 1.02 \text{ MeV}$  zur Energiebilanz beitragen. Die Reaktion (1) beruht auf dem schwachen Umwandlungsprozess  $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$  und hat einen sehr niedrigen Wirkungsquerschnitt. Die Reaktionsrate ist deshalb sehr niedrig. Als Folge ist die Leistungsdichte der Sonne im Innern mit  $0.3 \text{ kW/m}^3$  verhältnismäßig niedrig<sup>2</sup>, die Gesamtlebensdauer der Sonne aber mit etwa  $10^{10}$  Jahren hingegen sehr groß. Der pp-Zyklus eignet sich deshalb nicht für die Anwendung in Fusionsreaktoren auf der Erde.

Für die Energiegewinnung in der Sonne eher unbedeutend sind die folgenden beiden Seitenzweige des pp-Zyklus, in denen  ${}^4\text{He}$  über Be und Li bzw. Be und B erzeugt wird:



In beiden Zweigen entstehen aber ebenfalls Neutrinos die neben den pp-Neutrinos signifikant zum beobachtbaren Neutrino-Spektrum beitragen, das in Abbildung X.1(unten) gezeigt. Die Neutrinos unterschiedlichen Ursprungs weisen sehr unterschiedliche spektrale Verteilungen auf. Neutrinos aus 2-Körperzerfällen haben eine feste Energie. Die B-

<sup>2</sup>Im Vergleich zur Leistungsdichte eines KKW:  $10^5 \text{ kW/m}^3$ .

Die Gesamtleistung der Sonne beträgt aber unvorstellbare  $3.8 \cdot 10^{26} \text{ W}$ . In jeder Sekunde verschmelzen im Zentrum der Sonne 600 Millionen Tonnen Wasserstoff zu 594 Millionen Tonnen Helium.

und Be-Neutrinos sind hochenergetischer als die pp-Neutrinos. Zusätzlich gibt es noch sogenannte pep- und hep-Neutrinos. Die Reaktionen in denen die Neutrinos entstehen sind nochmals in Abbildung X.1(oben) zusammengefasst.

### Sonnen-Neutrinofluss

Der Sonnen-Neutrinofluss ist auf der Erde gemessen worden. Dabei kommen unterschiedliche Detektortechnologien, die ganz unterschiedliche Energieschwellen haben und deshalb unterschiedliche Anteile des Spektrums vermessen, zur Anwendung. Die folgende Tabelle fasst für einige Detektor-Typen die Nachweisreaktionen und die Energieschwellen zusammen<sup>3</sup>:

Cl <sub>2</sub> Detektoren	$\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e, {}^{37}\text{Ar} \rightarrow {}^{37}\text{Cl} \text{ (EC)}$	$E_\nu > 0.8 \text{ MeV}$
Ga Detektoren	$\nu_e + {}^{71}\text{Ga} \rightarrow {}^{71}\text{Ge} + e$	$E_\nu > 0.2 \text{ MeV}$
H <sub>2</sub> O Detektoren	Elastische Streuung: $\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e$	$E_\nu > 5 \text{ MeV}$

Alle Detektoren haben relativ zur Vorhersage des Sonnenmodells einen zu niedrigen Neutrinofluss beobachtet. Anfänglich wurde das Sonnenmodell durch diese Messungen in Frage gestellt. Mittlerweile wissen wir, dass aufgrund von Neutrinooszillationen ein Teil der in der Sonne erzeugten Elektron-Neutrinos die Erde als Myon- oder Tau-Neutrino erreichen und deshalb mittels der obigen Reaktionen nicht nachgewiesen werden können. Der SNO-Kollaboration<sup>4</sup>, die mit ihrem Detektor, der aus schwerem Wasser bestand, in der Lage war, den Fluß aller Neutrinos gleichzeitig zu messen, ist es 2001 gelungen zu zeigen, dass der Gesamtfluss aller Neutrinos tatsächlich der Vorhersage des Sonnenmodells entspricht. SNO hat mit dieser Messung zum einen die Neutrino-Oszillation zweifelsfrei nachgewiesen, zum anderen das Sonnenmodell bestätigt. Der Sprecher der SNO-Kollaboration, A. B. McDonald hat für seine Beiträge, die zur dieser Messung führten, 2015 den Nobelpreis für Physik erhalten.

<sup>3</sup>Das Pionier-Experiment bei der Vermessung der solaren Neutrinos war das Homestake-Experiment, das von R. Davis Jr. in der Homestake-Mine (South Dakota) in 1500 m Tiefe durchgeführt wurde. R. Davis verwendete 380 m<sup>3</sup> Perchlorethylen das einen sehr hohen Chlor-Anteil hat. Zum Nachweis der Sonnenneutrinos ( $E_\nu > 0.814 \text{ MeV}$ ) wurde die folgende Reaktion verwendet:  $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$ . Das erzeugte  ${}^{37}\text{Ar}$  hat eine Halbwertszeit von 37 Tagen und zerfällt dann wieder über EC nach Chlor. Um die Zahl der erzeugten  ${}^{37}\text{Ar}$ -Kerne zu zählen (nur etwa ein  ${}^{37}\text{Ar}$  pro Tag), wurde alle paar Wochen das Argon mittels Helium aus dem Tank heraus gespült und dann in einem Zähler vermessen. Davis hat nur etwa 1/3 der durch das Sonnenmodell vorhergesagten Neutrinos nachweisen können. Überlange Zeit wurden erst die experimentelle Methode und dann die Berechnungen des Sonnenmodells in Frage gestellt. Davis hat die Messungen aber mit großer Ausdauer über mehr als 20 Jahre (1970-1994) durchgeführt und im Detail nachgewiesen, dass er die Systematiken der Messung völlig kontrolliert. Erst als das „Solar Neutrino Problem“ durch andere Experimente bestätigt wurde, hat sich langsam die Einsicht durchgesetzt, dass der beobachtete zu niedrige Elektronenneutrinosfluss eine Folge der Neutrino-Oszillation ist. R. Davis wurde 2002 (nach dem SNO nachgewiesen hatte, dass der Gesamtfluss der Neutrinos tatsächlich dem aus dem Sonnenmodell erwarteten Fluss entspricht) mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

<sup>4</sup><https://sno.phy.queensu.ca/>



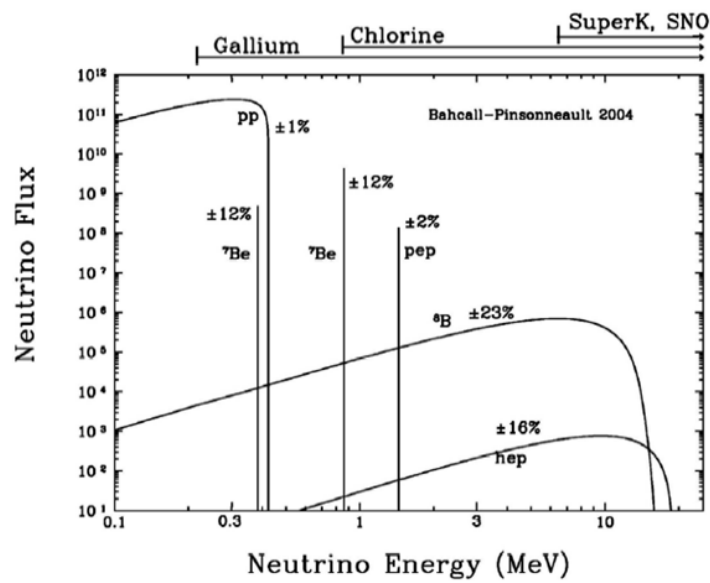
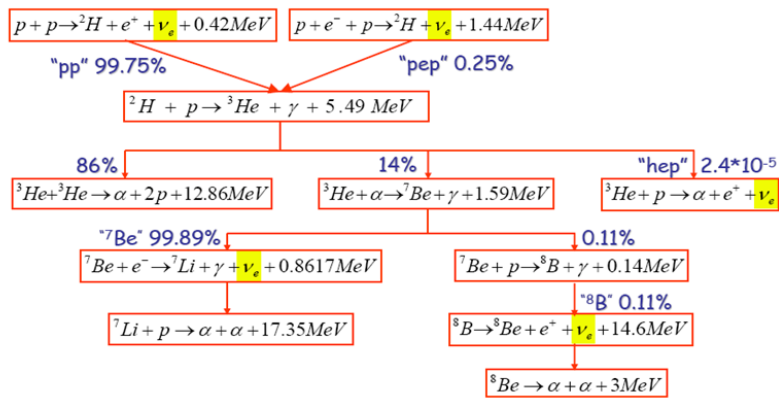
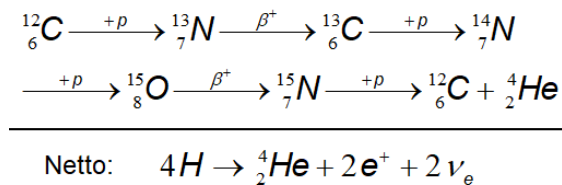


Abbildung X.1: (oben) Neutrino-Produktion im Fusionszyklus der Sonne. (unten) Berechnetes Neutrino-Spektrum.

CNO-Zyklus

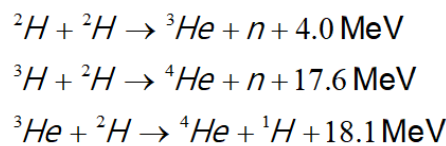
Neben dem pp-Zyklus gibt es bei hohen Temperaturen ( $> 1.5 \cdot 10^7$  K) auch noch den CNO-Zyklus, der von H. Bethe und C.F. Weizsäcker vorgeschlagen wurde. Dieser Zyklus ist vor allem für größere, massereiche Sterne ( $m > m_{\odot}$ ) relevant. Dabei dient im Sternenninnern vorhandenes  ${}^{12}_6\text{C}$  als Katalysator:



Als Nettoreaktion fusionieren auch hier 4 Protonen zu  ${}^4_2\text{He}$ . Der CNO-Zyklus läuft schneller als der pp-Zyklus ab. Aufgrund der höheren Coulomb-Barriere der schwereren Kerne, setzt der Zyklus aber erst bei deutlich höheren Temperaturen ein, weshalb er vor allem für massereiche Sterne relevant ist.

## X.2 Fusionsreaktoren auf der Erde

Die Konstruktion eines Fusionsreaktors auf der Erde ist überaus schwierig: Der Einschluss eines Plasmas bei einer Temperatur von  $10^8$  K ist eine technische Herausforderung. Zudem ist der pp-Zyklus der Sonne, der auf einem schwachen Prozess beruht und auch in der Sonne Leistungsdichten von nur  $0.3 \text{ kW/m}^3$  erzeugt, für eine technische Anwendung in einem Reaktor völlig ungeeignet. Stattdessen müssen Fusionsreaktionen genutzt werden, die alleine auf der starken Wechselwirkung beruhen und daher weitaus größere Wirkungsquerschnitte aufweisen. Die folgenden „starken“ Fusionsprozesse bieten sich an:



Die Fusion von Deuterium und Tritium zu  ${}^4\text{He}$  (2. Reaktion) kombiniert den Vorteil eines hohen Q-Wertes mit einer minimalen Coulomb-Abstoßung der beiden Wasserstoffkerne. Zum anderen kann das Tritium im Reaktor selbst durch Beschuss von Lithium mit Neutronen erbrütet werden:  ${}^6\text{Li} + n \rightarrow {}^4\text{He} + {}^3\text{H} + 4,8 \text{ MeV}$ . Zukünftige Fusionsreaktoren nutzen deshalb diesen Fusionsprozess.

Coulomb-Barriere

Die Coulomb-Barriere muss entweder überwunden oder durchtunnelt werden. Für die Fusion von Wasserstoff ( $Z=1$ ) beträgt die Coulomb-Barriere

$$V_C = \frac{\alpha}{2r_p} \hbar c \approx 1 \text{ MeV}$$

Eine endliche Tunnelwahrscheinlichkeit kann bereits für mittlere kinetische Energien der Protonen zwischen 10 und 100 keV erreicht werden. Diese Energien entsprechen Temperaturen des eingeschlossenen Wasserstoffs zwischen  $10^8$  und  $10^9$  K. Wie breites erwähnt, ist der Wasserstoff bei diesen Temperaturen vollständig ionisiert und bildet ein Plasma.

## X.2.1 Plasma-Einschluss und Zündbedingung

Fusion kann nur dann stattfinden, wenn die Einschlusszeit  $\tau_E$  des Plasmas größer ist als die Zeit  $\tau_F$  bis zu einem Fusionsstoß. Dabei ist  $\tau_F$  durch die Fusionsrate  $f = 1/\tau_F = n_d n_t \langle v\sigma \rangle$  gegeben. Hierbei sind  $n_d$ ,  $n_t$  die Dichten des Deuteriums bzw. des Tritiums, die durch die Elektronendichte  $n_e$  im Plasma angenähert werden können  $n_d = n_t = n_e/2$ ,  $\langle v\sigma \rangle$  ist das Produkt aus mittlerer Relativgeschwindigkeit von Deuterium und Tritium und dem Fusionsquerschnitt. Weiterhin muss die durch die Fusion gelieferte Leistung die Verlustleistung des Plasmas ausgleichen. Dabei ist aber zu berücksichtigen, dass nur ein Teil der freiwerdenden Fusionsenergie auf das entstandene Helium übertragen wird ( $\epsilon \approx 3.5 \text{ MeV}$ ) und dem Plasma zur Verfügung steht. Die restliche Energie wird als kinetische Energie auf die Neutronen übertragen, die das Plasma verlassen.

Zur Beschreibung der Zündbedingungen des Plasmas benutzt man das Triple-Produkt aus Einschlusszeit, der Teilchendichte  $n$  und der Plasma-Temperatur  $T$ :  $n_e \tau_E T$ . Man findet das dieses Produkt das sogenannte **Lawson-Kriterium**<sup>5</sup> erfüllen muss:

$$n_e \tau_E T \geq \frac{12k_B T^2}{\langle v\sigma \rangle \epsilon}$$

Für die Fusion von von Deuterium und Tritium ergibt sich:

$$n_e \tau_E T \geq 3.5 \cdot 10^{28} \text{ K s/m}^3 \quad \text{bzw.} \quad n_e \tau_E k_B T \geq 3 \cdot 10^{21} \text{ keV s/m}^3$$

Zum Einschluss und Heizen des Plasmas kommen zwei völlig unterschiedliche Methoden zum Einsatz:

**Magnetischer Einschluss:** Vorteile sind hier große zu erreichende Einschlusszeiten ( $\tau_E \approx O(10 \text{ s})$ ) bei allerdings nur sehr niedrigen Plasmadichten  $n_e \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}$ .

**Trägheitseinschluss (Laser induziert):** Den sehr kurzen Einschlusszeiten ( $\tau_E \approx O(10^{-10} \text{ s})$ ) stehen bei dieser Methode sehr hohe erreichbare Dichten ( $n_e \approx 10^{31} \text{ m}^{-3}$ ) gegenüber.

---

<sup>5</sup>J.D. Lawson, 1955

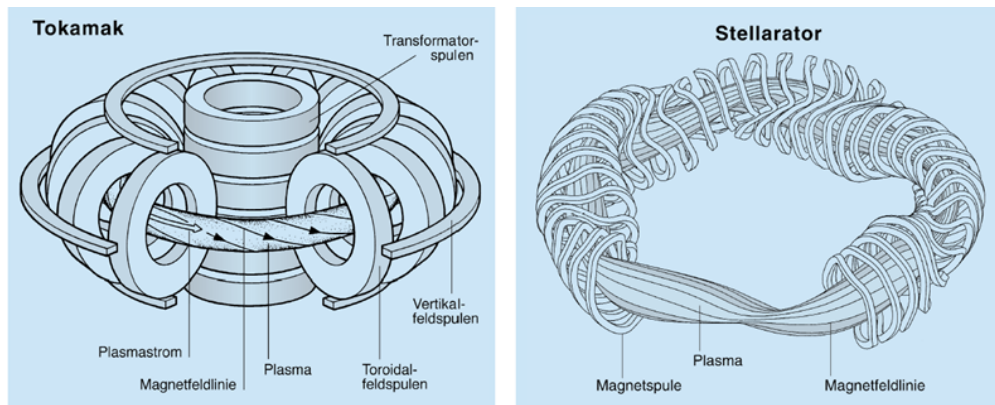


Abbildung X.2: Magnetischer Einschluss mittels eines Tokamak-Toroiden (links) oder mittels eines Stellarators (rechts).

### X.2.2 Fusionsreaktoren basierend auf magnetischem Einschluss

Das Plasma wird hier durch magnetische Felder eingeschlossen. Derzeit werden zwei verschiedene Geometrien studiert: Das sogenannte **Tokamak-Design** mit einem toroidalen Magnetfeld und das **Stellarator-Design** (z.B. Wendelstein 7-X) mit einer sehr komplexen Magnetfeld-Geometrie. Der Prinzipielle Aufbau der Spulenkonfiguration ist in Abbildung X.2 gezeigt.

Um das Plasma auf die für die Fusion notwendige Temperatur zu bringen muss das Plasma aktiv aufgeheizt werden. Auch hier werden verschiedene Techniken benutzt:

**Elektrisches Aufheizen:** Da das Plasma ein elektrischer Leiter ist, kann in seinem Innern ein Strom induziert werden, der das Plasma aufheizt. Das Plasma kann dabei als Sekundärspule eines Transformators betrachtet werden. Da der elektrische Widerstand des Plasma mit der Temperatur fällt sind damit nur Temperaturen von etwa  $2 \cdot 10^7$  K erreichbar.

**Neutralteilcheneinschuss:** Beim Einschießen schneller neutraler Atome in das Plasma wird die kinetische Energie dieser Teilchen auf das Plasm übertragen.

**Hochfrequenz-Einstrahlung:** Mikrowellen können die Ionen und Elektronen im Plasma mit ihren Resonanzfrequenzen anregen.

**Magnetische Kompression:** Das Plasma kann wie ein Gas durch schnelles (adiabatisches) Zusammenpressen erwärmt werden. Diese Methode hat den zusätzlichen Vorteil, dass sich die Dichte erhöht.

**Versuchsreaktoren:**

Der Joint European Torus (JET)<sup>6</sup> ist eine europaweit gemeinsam betriebene Versuchsanlage in Culham (Großbritannien) des Typs Tokamak. Die Tokamak-Spulen sind normal leitend. Das darin befindliche ringförmige Vakuumgefäß für das Plasma hat einen D-förmigen Querschnitt von 4.2 m Höhe und 2.5 m Breite. Das eingeschlossene Plasma hat ein Volumen von etwa 90 m<sup>3</sup> und eine Masse von weniger als einem Zehntel Gramm.

Die Anlage nahm 1983 den Experimentierbetrieb auf. 1991 ist es erstmal gelungen, ein Energie lieferndes Plasma für 2 Sekunden herzustellen, was die erste kontrollierte Kernfusion überhaupt darstellte. 1997 konnte mit einem Mischungsverhältnis von Deuterium zu Tritium von 50:50 bei einer Pulsdauer von 4 Sekunden 21.7 Megajoule Fusionsenergie freigesetzt werden. Kurzzeitig konnte eine Fusionsleistung von 16 MW (etwa 2/3 der eingekoppelten Heizleistung) erzeugt werden.

Als Nachfolganlage von JET, wird derzeit im südfranzösischen Cadarache ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor)<sup>7</sup> aufgebaut. Ziel der Anlage ist eine Fusionsleistung von etwa 500 MW, was etwa der 10-fachen Verstärkung der eingesetzten Heizleistung entspricht, über mehr als 300 Sekunden aufrechtzuerhalten. In einem weiteren Betriebsmodus sind Brenndauern von bis zu einer Stunde, dann aber bei einem niedrigeren Verstärkungsfaktor, vorgesehen.

Das Plasma hat einen Torusradius von 6.2 m und erstreckt sich über einen radialen Abstand von 4.2 bis 8.2 m von der vertikalen Symmetrieachse. Die Plasmahöhe wird 6.7 m betragen was einem Volumen von 837 m<sup>3</sup> entspricht. Das toroidale Feld beträgt 5.3 T im Zentrum des Plasmas. Es soll von 18 supraleitenden Spulen mit maximaler Feldstärke von 11.8 T erzeugt werden. Abbildung X.3 zeigt eine Skizze des Reaktors und fasst die wichtigsten Daten zusammen.

### X.2.3 Fusionsreaktoren basierend auf Trägheitseinschluss

Beim Trägheitseinschluss wird das Lawson-Kriterium dadurch erfüllt, dass der Brennstoff, der sich in kleinen Kapseln befindet, durch eine sehr schnelle und sehr hohe Energiezufuhr stark verdichtet wird und so die erforderliche Temperatur von 10<sup>8</sup> K erreicht. Die zum Starten einer Fusion notwendige Einschlussdauer beträgt dann nur Nanosekunden. Aufgrund der kurzen Zeit genügt die Massenträgheit des Plasmas, um es zusammenzuhalten. Die notwendige schnelle Energiezufuhr geschieht durch starke fokussierte Licht- oder Teilchenstrahlen. Am aussichtsreichsten erscheint die Verwendung von Hochleistungslasern. Abbildung X.4 zeigt die 4 Phasen der Zündung einer Fusionsreaktion bei Trägheitseinschluss.

---

<sup>6</sup><https://www.euro-fusion.org/de/forschungsanlagen/jet/>

<sup>7</sup><https://www.iter.org/>

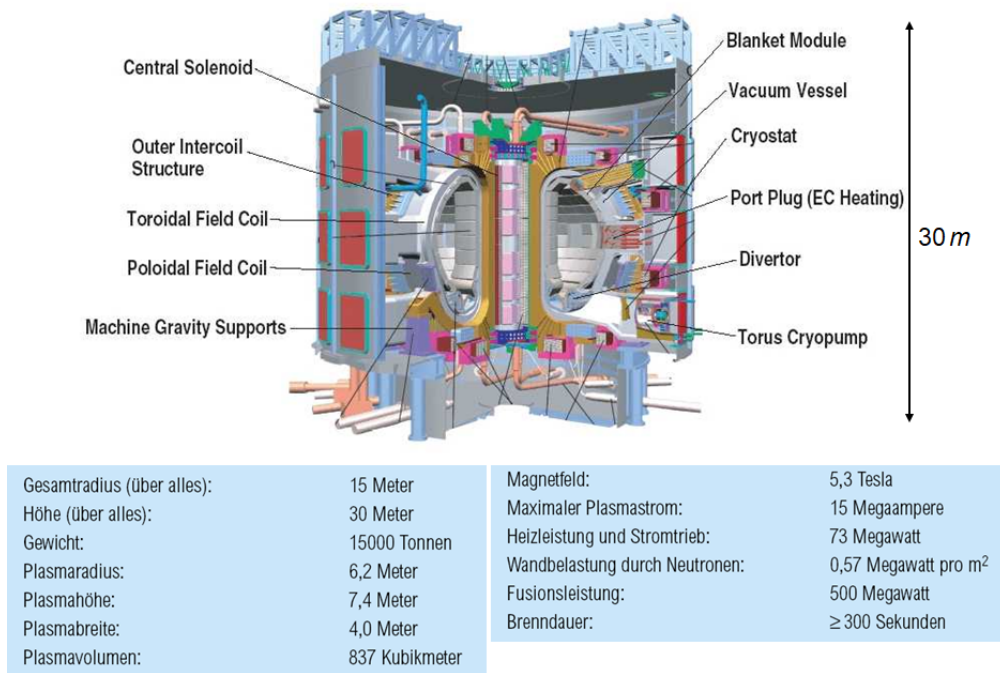


Abbildung X.3: ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor): Skizze und die wichtigsten Daten.

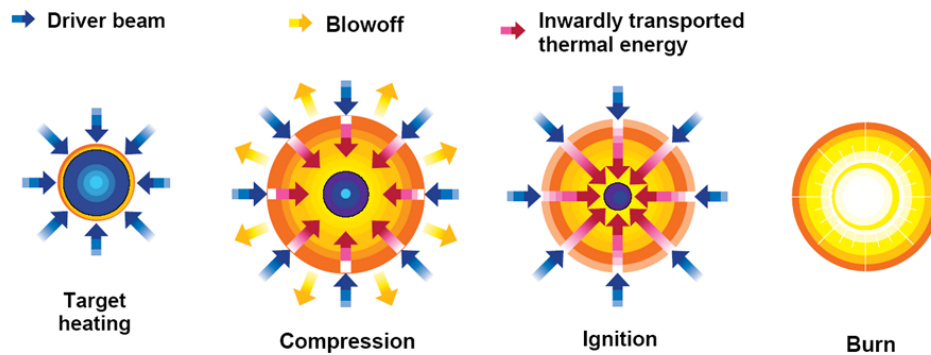


Abbildung X.4: Phasen der Fusionsreaktion bei Licht- oder Teilchenstrahl-induziertem Trägheitseinschluss.

Eine Versuchsanlage, NIF (National Ignition Facility), befindet sich am amerikanischen Lawrence Livermore National Laboratory. Die Strahlung von insgesamt 192 Hochleistungslaser treffen sich in einer Reaktionskammer von 10 m Durchmesser. In der Mitte der Kammer befinden sich die Brennstoffpellets. Die Anlage hat 2009 den vollen Betrieb aufgenommen. In 2012 wurde eine Spitzenleistung des Laserpulses von 500 Terawatt mit 1.85 Megajoule Energie erzielt. In 2021 wurde eine Fusionsenergie von 1.4 MJ bei einem Einsatz von 1.9 MJ Laserenergie erzeugt. Ende 2022 wurde eine Fusionsenergie von 3.2 MJ bei einem Input von 2.1 MJ Laserenergie gemessen. Im Vergleich zur gesamten aufgewandte Energie für die Laser(322 MJ) betrug die Fusionsenergie aber nur etwa 1%. Auch ist der derzeitige Versuchsaufbau und Ablauf für eine technische Anwendung schwerlich skalierbar.

### X.3 Big Bang und Primordiale Elementsynthese

Die primordiale Nukleosynthese (BBN, Big-Bang Nucleosynthesis) bezeichnet die Bildung leichter Nuklide, vor allem  ${}^4\text{He}$ , aus Protonen und Neutronen in den ersten 30 Minuten nach dem Urknall.

**Urknall - Big Bang:** Die Beobachtung der Expansion und damit einhergehend der Abkühlung des Universums hat schon früh zur Vorstellung geführt, dass das Universum aus einem extrem dichten und heißen Anfangszustand hervorging. Eine zeitliche Rückextrapolation führt formal an einen Punkt, an dem Materie- und Energiedichte unendlich waren. Der „Urknall“, der vor 13.8 Milliarden Jahren den Beginn des Universums markiert, bezeichnet eine Singularität, aus der heraus Materie, Raum und Zeit entstanden sind. Theoretische Beschreibungen der Entwicklung des Universums setzen erst  $10^{-43}$  s (Planck-Zeit) nach der Singularität an, da vor dieser Zeit das Konzept einer kontinuierlichen Raum-Zeit zusammenbricht. Um Aussagen vor dieser Zeit zu erhalten, sind Theorien notwendig, die Gravitation und Quantenmechanik miteinander verbinden. Zur Planck-Zeit betrug die Temperatur des Universums  $T \approx 10^{32}$  K ( $k_B T \approx 10^{19}$  GeV).

**Die erste Sekunde des Universums:** Etwa zur Planck-Zeit wird die Gravitation schwächer als die anderen Wechselwirkungen und entkoppelt von diesen. Das Universum ist zu dieser Zeit in die sogenannte GUT(Grand Unified Theory)-Ära eingetreten, in der starke und elektroschwache Wechselwirkung noch vereinigt waren. Im Verlauf expandiert das Universum weiter und kühlt sich weiter ab. Nach etwa  $10^{-35}$  s wird die GUT-Skala ( $\approx 10^{16}$  GeV) erreicht bei der sich starke und elektroschwache Wechselwirkung aufspalten. Nach etwa  $10^{-10}$  s, als die Temperatur des frühen Universums auf etwa  $3 \cdot 10^{15}$  K (entsprechend einer Energie  $k_B T = 100$  GeV) gefallen ist, separieren auch die elektromagnetische und schwache Wechselwirkung, und es wirken die Kräfte, die wir auch heute kennen. Beim Abkühlen von der GUT-Skala zur elektroschwachen Skala hat sich aus den im heißen „Feuerball“ existierenden Teilchen und Antiteilchen die heute

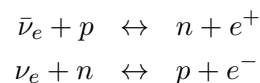
beobachtete Baryon-Asymmetrie eingestellt, d.h., das Verhältnis zwischen Quarks und Antiquarks ( $n_B : n_{\bar{B}}$ ) hat sich von 1:1 direkt nach dem Urknall zu der heute beobachteten Baryon-Asymmetrie entwickelt (Baryonen-Anti-Baryonen zu Photon Verhältnis):

$$\eta_{\bar{B}} = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} \approx \frac{n_B}{n_\gamma} \approx 6 \cdot 10^{-10}$$

Der genaue Mechanismus und Zeitpunkt der **Baryogenese** ist Gegenstand aktueller Forschung.

Zur Zeit  $t \approx 1\mu\text{s}$  ( $k_B T \approx O(100\text{ MeV})$ ) bilden sich aus den Quarks und den Gluonen des heißen Quark-Gluon-Plasmas die ersten Baryonen und Mesonen. Da die meisten Hadronen instabil sind, existierten am Ende der Hadronisierungsphase neben den stabilen Leptonen fast ausschliesslich nur Protonen und Neutronen (quasi-stabil mit einer Lebensdauer von 880 s), die aufgrund der Isospin-Symmetrie in gleicher Zahl produziert wurden.

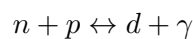
**Big Bang (primordiale) Nukleosynthese (BBNS):** Bis zu einer Temperatur von etwa  $10^{11}\text{ K}$  ( $k_B T \approx 10^7\text{ eV}$ ) herrscht zwischen Protonen und Neutronen aufgrund der folgenden beiden bidirektionalen Reaktionen ein 1:1 Gleichgewicht:



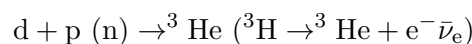
Bei abnehmender Temperatur verschiebt sich Gleichgewicht aber aufgrund der niedrigeren Protonmasse hin zu den Protonen. Bei einer Temperatur von  $k_B T \approx 0.7\text{ MeV}$  verlaufen die Reaktionen so langsam ab, dass das n:p-Verhältnis auf das zu diesem Zeitpunkt herrschende thermische Gleichgewicht eingefroren wird (man spricht von freeze-out):

$$\left. \frac{N_n}{N_p} \right|_{t=1\text{ s}} \approx \exp\left(-\frac{m_n - m_p}{k_B T}\right) \approx \frac{1}{6}$$

Die freien Neutronen zerfallen mit einer Lebensdauer von 880 s wodurch sich das n:p-Verhältnis in den nächsten 300 s auf etwa  $\frac{1}{7}$  reduziert. Bis zu diesem Zeitpunkt herrscht aufgrund der folgenden Dissoziationsreaktion ein Gleichgewicht zwischen freien Protonen und Neutronen und durch Fusion erzeugten Deuteronen:

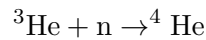


Danach war die Temperatur so niedrig, dass die Dissoziation nicht mehr möglich war und gebildetes Deuteron erhalten blieb. Proton- und Neutron-Einfang durch das Deuteron führten zur Bildung von  ${}^3\text{He}$  bzw.  ${}^3\text{H}$ ,

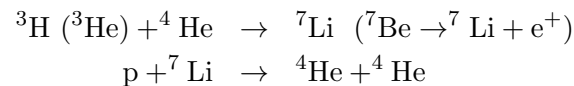




wobei das gebildete  ${}^3\text{H}$  über einen  $\beta^-$ -Zerfall ebenfalls in  ${}^3\text{He}$  übergeht. Ein weiterer Neutron-Einfang führt zur Bildung von  ${}^4\text{He}$ :



Fusion von  ${}^3\text{H}$  und  ${}^3\text{He}$  mit  ${}^4\text{He}$  führte zur Bildung von  ${}^7\text{Li}$  und  ${}^7\text{Be}$ , wobei letzteres durch  $\beta^+$ -Zerfall nach  ${}^7\text{Li}$  übergang. Durch Protonenbeschuss wird das  ${}^7\text{Li}$  aber wieder zerstört, so dass am Ende nur sehr wenig Li übrigblieb:



Zwar ist auch die Fusion von zwei  ${}^4\text{He}$ -Kernen zu  ${}^8\text{Be}$  möglich, dieses spaltet sich aber unmittelbar wieder in die zwei  ${}^4\text{He}$ -Kerne auf. Da es keine stabilen Kerne mit  $A = 5$  bzw.  $A = 8$  gibt, war es zu dieser Zeit nicht möglich, weitere schwere Elemente zu bilden, da das 5er- bzw. 8er-Gap nicht überbrückt werden konnte. Nach dem die Temperatur zur Zeit  $t = 30 \text{ min}$  auf etwa  $3 \cdot 10^8 \text{ K}$  ( $k_B T \sim 10^4 \text{ eV}$ ) gefallen war, stoppte die primordiale (Big-Bang) Nucleosynthese und die Häufigkeiten der bis dahin erzeugten Elemente wurde eingefroren. Zu diesem Zeitpunkt waren alle Neutronen gebunden und  ${}^4\text{He}$  war mit einem Massenanteil von 24% nach Wasserstoff das häufigste Element. Die Anteile von d,  ${}^3\text{He}$  und  ${}^7\text{Li}$  sind dem gegenüber vernachlässigbar. Die verbleibenden baryonische Masse (76%) wird durch Wasserstoff ( ${}^1\text{H}$ ) gebildet.

Das Wechselspiel zwischen der Baryon-Dichte ausgedrückt als  $\eta_{\bar{B}}$  (s.o.) oder auch durch  $\Omega_B$ , den verschiedenen Kern-Reaktionen und der Abkühlung des Universums bestimmt die Häufigkeiten der verschiedenen Nuklide. Abbildung X.5 zeigt die Vorhersage der Häufigkeit der einzelnen Elemente als Funktion der Baryon-Dichte. Die gelben Boxen geben die beobachteten Häufigkeiten ( $\pm 1\sigma$ ) an. Das blaue vertikale Band zeigt die durch Analyse des gemessenen kosmischen Mikrowellen-Hintergrundes (CMB) bestimmte Baryon-Dichte. Das hier diskutierte Modell der primordialen (Big-Bang) Nucleosynthese wird also durch die Messdaten in hervorragende Weise bestätigt.

## X.4 Sternenentwicklung und die Entstehung schwerer Elemente

In der primordialen Nucleosynthese entsteht mit signifikanten Massenanteil nur  ${}^4\text{He}$ . Alle schwereren Elemente entstehen in den Fusionsprozessen im Innern der Sterne oder im Endstadium eines Sterns, wenn sein Brennstoff aufgebraucht ist (z.B. in Roten Riesen oder in einer Super-Nova). Im Folgenden werden die verschiedenen Phasen der Sternenentwicklung und die mit diesen Phasen verbundenen Fusions- bzw. Syntheseprozesse diskutiert.

**Entstehung des Sterns:** Sterne entstehen durch gravitative Kontraktion des interstellaren Gases das hauptsächlich aus  ${}^1\text{H}$  und  ${}^4\text{He}$  besteht. Dabei steigen Druck und

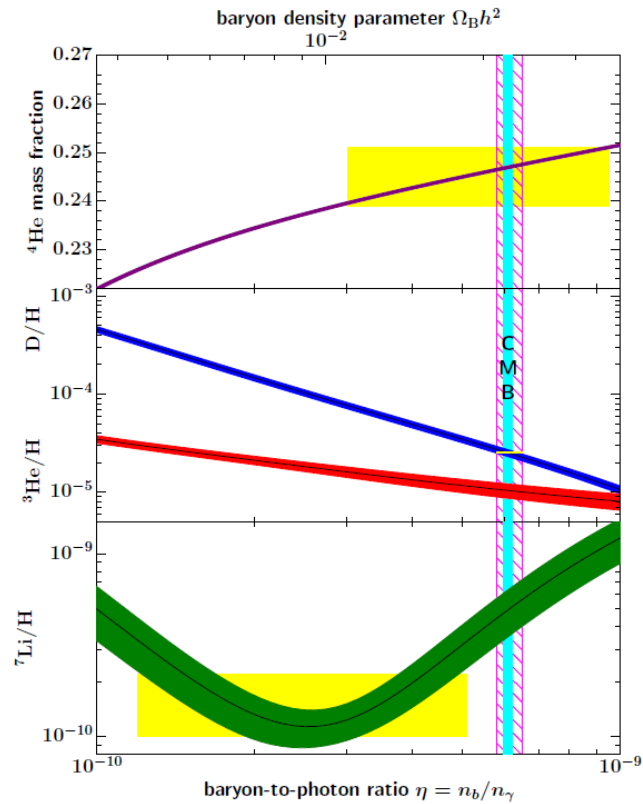


Abbildung X.5: Primordiale Massenanteile der Elemente als Funktion der Baryon-Dichte. Die Kurven zeigen im Rahmen der Big-Bang-Nukleosynthese vorhergesagten Anteile. Während für  ${}^4\text{He}$  der absolute Massenanteil angegeben ist, sind die Anteile der anderen Elemente auf den  ${}^1\text{H}$ -Massenanteil normiert. Die gelben Boxen zeigen die beobachteten Massenanteile ( $\pm 1\sigma$ ). Der beobachtete  ${}^4\text{He}$ -Massenanteil muss dazu um den später in den Sternen entstandene Anteil (etwa 10%) korrigiert werden. Die aus dem gemessenen kosmischen Mikrowellen-Hintergrund (CMB) bestimmte Baryon-Dichte ist als blaues vertikales Band gezeigt.

Temperatur stark an. Wenn die Zündbedingungen erreicht sind, startet das Wasserstoff-Brennen und der entstehende Strahlungsdruck verhindert eine weitere Kontraktion des Sterns, so dass sich der Stern in einer stabilen Brennphase befindet. Die Dauer der Wasserstoff-Brennphase und die Luminosität des Sterns und die anschließenden Entwicklungsstadien hängen sehr stark von der Masse des Sterns ab.

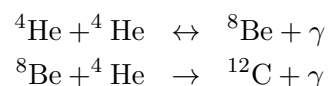
Den überwiegenden Teil seines Sternenlebens verbringt der Sterne in der Phase des Wasserstoff-Brennens. Sehr massenreiche Sterne mit  $m > 25 \cdot m_{\odot}$  sind sehr heiß und haben große Luminositäten. Die sehr schnell ablaufenden Fusionsreaktionen bewirken aber Lebensdauern des Wasserstoff-Brennens dieser Sterne von nur wenigen Millionen Jahren. Danach setzt Helium-Brennen ein. Bei unserer Sonne hingegen beträgt die Zeit des Wasserstoffbrennens etwa  $10^{10}$  Jahre, bevor die Helium-Brennphase beginnt. Leichtere Sterne sind nachdem der Wasserstoff-Brennstoff aufgebraucht ist, aufgrund der zu niedrigen Temperatur nicht in der Lage, das Helium-Brennen zu starten. Diese Sterne enden nachdem Wasserstoffbrennen als planetengroßer Weißer Zwerg (s. Abbildung X.6).

Die Sterne lassen sich in einem Helligkeits(Luminosität)-Temperatur(Farbe)-Diagramm einordnen, das als Hertzsprung-Russel Diagramm bezeichnet wird und in Abbildung X.6 gezeigt ist. Sterne in der Wasserstoff-Brennphase befinden sich auf der **Hauptreihe**. Die Hauptreihe verlassen sie, wenn sie in eine andere Brennphase übergehen, oder zum Weißen Zwerg werden.

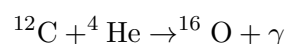
**Brennphasen - Fusion bis Eisen:** Das Wasserstoffbrennen wurde bereits in Abschnitt X.1 diskutiert. Hier sollen nun die Brennphasen diskutiert werden, die sich nach dem Wasserstoffbrennen anschließen. Die Sterne blähen sich dabei stark auf. Die Sterne in dieser Phase entsprechen im Hertzsprung-Russel-Diagramm (Abbildung X.6) je nach Masse den Roten Riesen oder den Super-Riesen.

Am Ende des Wasserstoffbrennens (wenn im Innern etwa 20% des Wasserstoffs verbraucht ist) kontrahiert der Stern weiter und für Sterne mit  $m > 0.8m_{\odot}$  werden die Temperaturen im Innern so hoch ( $T \approx 10^{10}$ ), dass **Helium-Brennen** einsetzt. Durch das Helium-Brennen im Innern nimmt die Temperatur und der Druck dort stark zu und der Stern expandiert stark, wobei sich aber die Außenschicht abkühlt (Roter Riese).

Aufgrund des 8er-Gaps ist es nicht möglich zwei  ${}^4\text{He}$  zu stabilem  ${}^8\text{Be}$  zu verschmelzen, da dieses sofort wieder in die Heliumkerne zerfällt. Bei hohen Helium-Dichten kann aber genügend instabiles  ${}^8\text{Be}$  produziert werden, dass durch weiteren Einfang eines  ${}^4\text{He}$ -Kerns Kohlenstoff entsteht:



Durch Fusion mit einem weiteren  ${}^4\text{He}$ -Kern entsteht Sauerstoff,



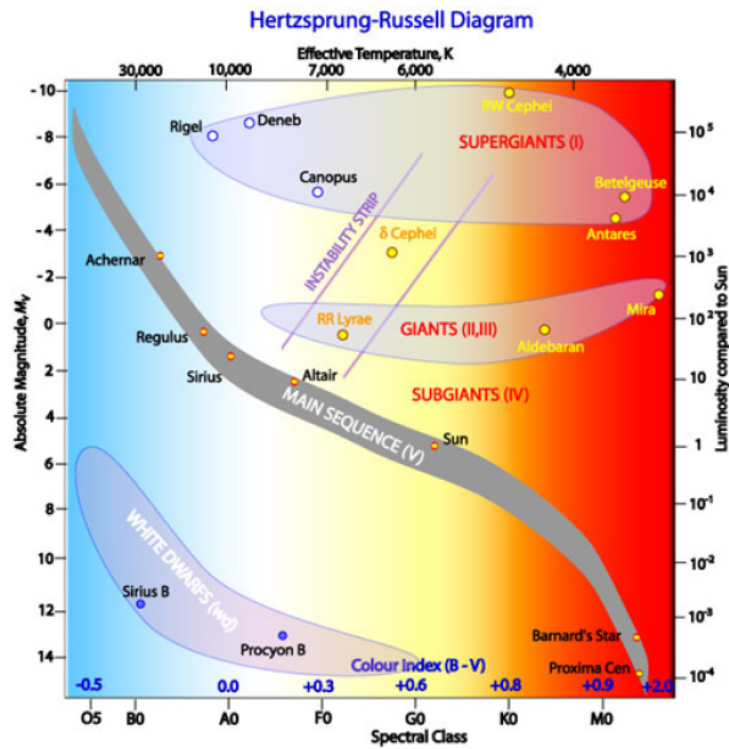
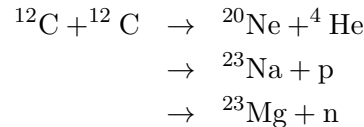


Abbildung X.6: Hertzsprung-Russel-Diagramm (schematisch): Aufgetragen ist die Leuchtkraft der Sterne (Magnituden) als Funktion der Temperatur (Spektralklasse) der Sterne. Die Sterne der Hauptreihe befinden sich in der Wasserstoffbrennphase. Massereiche Sterne befinden sich im oberen Teil der Hauptreihe, massearme Sterne liegen unterhalb der Sonne.

und durch weitere Fusion der entstandenen Element mit  ${}^4\text{He}$  werden in 4er-Massenschritten ( $A + \alpha \rightarrow A'$ ) weitere Elemente erzeugt. Der Einfang von Neutronen und Proton erlaubt die Produktion von Zwischenelementen.

Wenn ein Teil des Heliums verbrannt ist, und weiteres Helium-Brennen ineffizient wird, führt der gravitative Druck für massereiche Sterne ( $m > 4m_{\odot}$ ) zu weiterer Kompression des Sterns und zu einer Temperaturerhöhung im Innern. Bei Temperaturen von  $10^9$  K ( $k_B T \sim 10^5$  eV) setzt **Kohlenstoff-Brennen** ein:



Für Sterne mit Massen  $m > 8 \cdot m_{\odot}$  führt am Ende des Kohlenstoff-Brennens die weitere Kompression bei Temperaturen  $T > 2 \cdot 10^9$  K zum Starten von **Neon-, Sauerstoff- und Silizium-Brennens** wobei Eisen ( ${}^{56}\text{Fe}$ ) als schwerstes Element entsteht. Diese Fusionsprozesse laufen alle sehr schnell ab. Die folgende Tabelle zeigt für einen massereichen Sterne mit  $m = 25 \cdot m_{\odot}$  die Brenndauern der verschiedenen Brennphasen.

Fusion of	Time to complete	Core temperature (K)	Core density ( $\text{kg m}^{-3}$ )
H	$7 \times 10^6$ yr	$6 \times 10^7$	$5 \times 10^4$
He	$5 \times 10^5$ yr	$2 \times 10^8$	$7 \times 10^5$
C	600 yr	$9 \times 10^8$	$2 \times 10^8$
Ne	1 yr	$1.7 \times 10^9$	$4 \times 10^9$
O	0.5 yr	$2.3 \times 10^9$	$1 \times 10^{10}$
Si	1 day	$4.1 \times 10^9$	$3 \times 10^{10}$

**Endstadium der Sterne:** Nach Bildung des Eisenkerns für Sterne mit mehr als 8 Sonnenmassen laufen dort keine Fusionsprozesse mehr und die äußeren Hüllen des Sterns fallen in Richtung des Kerns. Der Druck steigt extrem an und die fallenden Schichten werden vom Kern zurückgeworfen. Sie treffen dann auf weitere einfallende Schichten des Sterns und werden stark erhitzt. In diesen Bedingungen können auch schwerer Elemente als Eisen erzeugt werden (s.u.). Der Stern explodiert in einer Super-Nova (Typ II). Dabei werden die äußeren Schichten des Sterns ins All geschleudert. Der Kern des Sterns kollabiert zu einem Neutronenstern oder Schwarzen Loch.

Für leichtere Sterne wie beispielsweise unsere Sonne versiegt am Ende des Helium-Brennens die Energiequelle, und ohne den Strahlungsdruck aus dem Innern schrumpft der Rote Riese zu einem Weißen Zwerg zusammen. Diese kleinen, sehr heißen Objekt sind etwa so groß wie die Erde, enthalten aber gut die Hälfte der ursprünglichen Sternennasse.

Die Sternenentwicklung lässt sich also wie folgt verkürzt zusammenfassen: Massearme

Sterne werden zu Roten Riesen und schrumpfen dann zu weißen Zwergen. Massereiche Sterne werden zu roten Überriesen, explodieren in einer Supernova und beenden schließlich ihre Entwicklung als Neutronenstern oder schwarzes Loch

## X.5 Entstehung der Elemente schwerer als Eisen

Die Elemente mit Massenzahlen oberhalb von Eisen können nicht durch Fusionsprozesse in den Sternen erzeugt werden. Sie entstehen vor allen durch den Einfang von Neutronen<sup>8</sup>.

Beim Einfang von Neutronen unterscheidet man zwei verschiedene Prozesse: Den r-Prozess mit schnellem (rapid) Einfang von Neutronen und den s-Prozess mit langsamen (slow) Neutroneneinfang. Schnell und langsam vergleicht dabei die typische Einfangszeit mit der Zerfallsdauer für  $\beta^-$ -Zerfall.

**s-Prozesse:** Der langsame Neutroneneinfang findet in Umgebungen mit niedriger Neutronendichte, wie dies beispielsweise in Roten Riesen der Fall ist, statt. Aufgrund des niedrigen Neutronenflusses ist der Neutroneneinfang selten und nach einem Einfang kann der Kern durch  $\beta^-$ -Zerfall die Zahl der Protonen erhöhen bevor ein neues Neutron eingefangen wird. s-Prozesse folgen in der Nuklidtafel einem Weg entlang stabiler Nuklide und dauern mehrere hunderte oder gar tausende Jahre. Der s-Prozess endet mit einem Zyklus, der  ${}^{209}_{83}\text{Bi}$  durch mehrere Neutronenanlagerung und einer Sequenz von  $\alpha$ - und  $\beta$ -Zerfällen wieder zurück zum  ${}^{209}_{83}\text{Bi}$  bringt (maximales  $A \leq 210$ ).

**r-Prozesse:** Wenn der Neutronfluss sehr hoch ist wie in einer Super-Nova oder bei Verschmelzung zweier Neutronensterne (Neutron Star Merger) dann findet das Einfangen der Neutronen sehr viel schneller statt, und mehrere Neutronen können eingelagert werden, bevor der Kern durch  $\beta^-$ -Zerfall die Zahl der Protonen erhöht. Der Weg folgt hier der sogenannten Neutron Drip Line, der Grenze, bei der der gebildete Kern durch Emmission eines Neutrons wieder zerfällt. Die gebildeten Nuklide sind deshalb sehr neutronenreich und liegen fern des Stabilitätstals. Aufgrund der steigenden Instabilität der gebildeten Kerne für spontane Spaltung endet der r-Prozess bei Massenzahlen um  $A = 270$ .

Neben dem Einfang von Neutronen können innerhalb des Sterns auch Protonen eingefangen werden (p-Prozesse). In einer sehr protonenreichen Umgebung findet der sogenannte **rp-Prozess**, bei dem es zum schnellen Einfang von Protonen kommt, statt. In der Nuklidtafel verläuft der Weg der rp-Prozesse nahe der Proton Drip Line. Abbildung X.7 zeigt die verschiedenen Weg der r-, s- und rp-Prozesse in der Nuklidtafel.

<sup>8</sup>Der folgende Abschnitte folgt dem Buch von Frauenfelder und Henley.

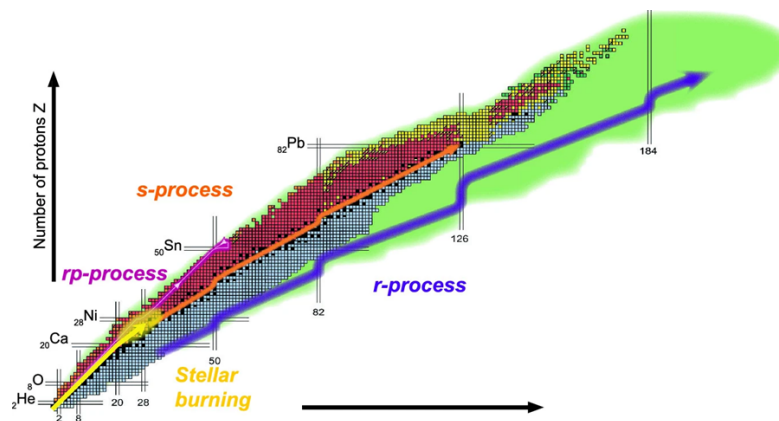


Abbildung X.7: Nuklidtafel mit den verschiedenen Prozessen, die zur Entstehung der Elemente führten. Quelle: Obertelli.

Die Elementhäufigkeit in unserem Sonnensystem als Funktion der Massenzahl ist in Abbildung X.8 gezeigt. Sie ist der Fußabdruck der verschiedenen Prozesse, die zur Elementsynthese beigetragen haben. Die gezeigte Elementhäufigkeit wurde mit zwei verschiedenen Methoden ermittelt: Zum einen durch Spektralanalyse der Sonne; Zum anderen durch direkte chemische Analyse von Gestein der Erde, des Mondes und Meteoriten. Die Elementhäufigkeit anderer Sterne und Galaxien sind der unseres Sonnensystems ähnlich. Für einige Systeme werden aber Unterschiede beobachtet, was am spezifischen Entwicklungsstadium des Systems liegt.

Bis auf Wasserstoff und Helium stammen alle Elemente, aus denen die Erde aufgebaut ist, aus dem Innern von Sternen und wurden vermutlich sogar mehrmals durch Super-Nova Explosionen freigesetzt.

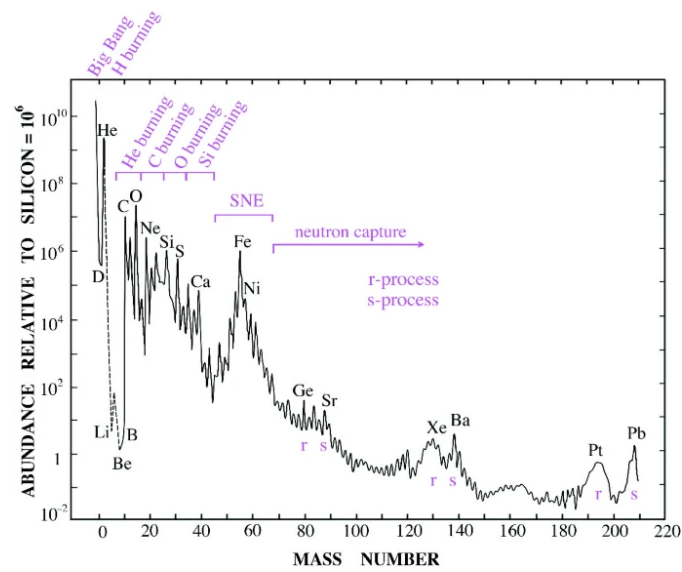


Abbildung X.8: Elementhäufigkeit in unserem Sonnensystem. Die Häufigkeit wird relativ zu Si angegeben, das auf  $10^6$  gesetzt wurde. Auch gezeigt sind die Prozesse, die zur Entstehung der Elemente führten. Quelle: Obertelli.