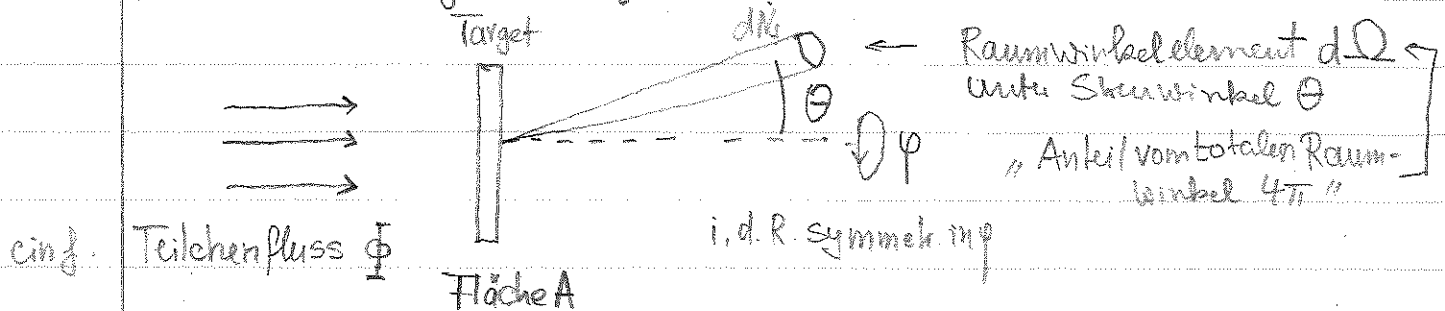


2. Wirkungsquerschnitt, freie Weglänge und Luminosität 52

- 2.1 Wirkungsquerschnitt und Winkelverteilungen von Streuprozessen liefern Informationen über die WW zwischen Projektil und Target. Der Wirkungsquerschnitt (WQ) ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion zwischen zwei Streupartnern.

Betrachte die Streuung eines mono-energetischen Teilchenstrahl.

an einem Target mit N_t Streuzentren:



- einfallender Teilchenfluss Φ mit
$$\Phi = \frac{\dot{N}_i}{A} = n_i v_i$$
 - \dot{N}_i = Rate der auf A einfallenden Teilchen
 - n_i = Teilchendichte im Strahl.
 - v_i = Teilchengeschw. im Strahl.

- $d\dot{N}_s$ = Rate der nach $d\Omega(\varphi, \theta)$ gestreuten Teilchen

$$d\dot{N}_s(\varphi, \theta) \sim \Phi \cdot N_t \cdot d\Omega(\varphi, \theta)$$

Proportionalitätskonst. bezeichnet man als diff. WQ $\sigma_{diff}(\varphi, \theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega}$

$$\sigma_{diff}(\varphi, \theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\dot{N}_s(\varphi, \theta)}{\Phi N_t d\Omega}$$

Den totalen WQ erhält aus der Gesamtrate \dot{N}_s der gestreuten Teilchen:

$$\sigma_{tot} = \frac{\dot{N}_s}{\Phi N_t} = \int_{4\pi} \sigma_{diff} d\Omega$$

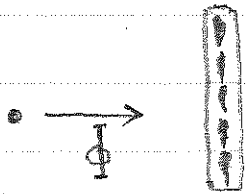
Dimension des WQ = $\frac{\text{Rate}}{\text{Rate/Fläche}} = \text{Fläche}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Einheit von } \sigma \\ 1b = 1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 \\ = 10^{-24} \text{ cm}^2 \end{array} \right.$$

Veranschaulichung: Geometrischer Streuquerschnitt

53

- (1) Pkt förmiges Projektil trifft auf sehr dünnes Target (\rightarrow kein Überlapp der Streuer), nur Kontaktwechselwirkung:



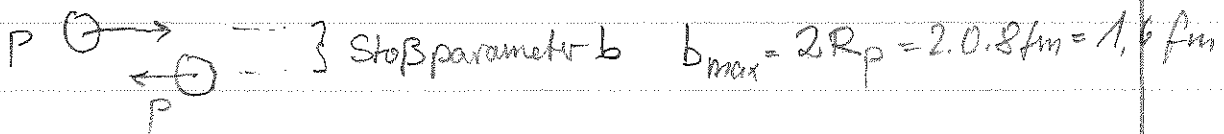
Gesamtrate der gestreuten Teilchen:

$$N_s = \Phi N_t \cdot A_E, \text{ mit } A_E = \text{Querschnitt der Streuer} \\ = \pi R_E^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{tot}} = \frac{N_s}{\Phi N_t} = A_E = \pi R_E^2$$

d.h. der totale WQ entspricht dem geometr. Querschnitt erine Streuzentrums (Streuer).

- (2) Abschätzung des WQ für Proton-Proton Streuung $p \rightarrow \leftarrow p$



starke WW \Rightarrow kurzreichweitig \Rightarrow geometr. Querschnitt als Abschätzung

$$\sigma_{\text{tot}} = \pi b_{\text{max}}^2 = \pi (1.6 \text{ fm})^2 \approx 80 \text{ mb}$$

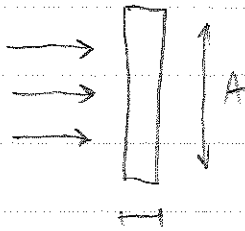
experimentelle Werte für totalen WQ (=inelastisch + elastisch Anteil):

$$\sigma_{\text{pp}}(10 \text{ GeV}) \approx 40 \text{ mb}$$

$$\sigma_{\text{pp}}(1 \text{ TeV}) \approx 80 \text{ mb}$$

\Rightarrow d.h. Annahme des geometr. Querschnitts für die Proton-Proton Streuung ist eine gute Abschätzung und bestätigt die kurze Reichweite der starken WW.

2.2) Freiweglänge und Strahl-Abschwächung



betrachte „dickes“ Target:

$$\text{Zahl der Streuzentren: } N_t = n_t \cdot A \cdot d$$

$$\text{mit der Targetdichte: } n_t = \frac{\rho N_A}{M_{\text{mol}}}$$

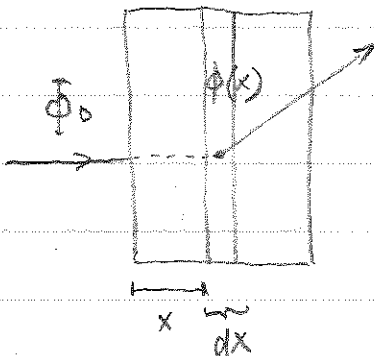
(wobei $\rho = \text{Dichte } \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; $N_A = \text{Avogadro Zahl} = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{\text{Teilchen}}{\text{Mol}}$)

$$M_{\text{mol}} = \text{Molmasse } \left[\frac{\text{g}}{\text{Mol}} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Streurate: } \dot{N}_s &= \Phi \cdot N_t \cdot \sigma = \left(\frac{\dot{N}_i}{A} \right) \cdot (n_t \cdot A \cdot d) \cdot \sigma \\ &= \dot{N}_i \cdot n_t \cdot d \cdot \sigma \end{aligned}$$

wg. $\Phi = \frac{\dot{N}_i}{A}$; $n_t = \frac{N_t}{A \cdot d}$

Streuwahrscheinlichkeit für dickes Target:



Wahrscheinlichkeit für eine Reaktion in dx nach der Strecke x :

$$dW(x) = \frac{\dot{N}_s(x)}{\dot{N}_i(x)} = n_t \sigma dx$$

→ Abnahme des Teilchenflusses $\phi(x)$ mit x :

$$-d\phi(x) = \phi(x) (n_t \sigma dx)$$

$$\begin{aligned} \text{Integration: } \phi(x) &= \phi_0 e^{-x(n_t \sigma)} \\ &= \phi_0 e^{-x/\lambda} \end{aligned}$$

mit der mittleren freien Weglänge λ der Projektile im Target:

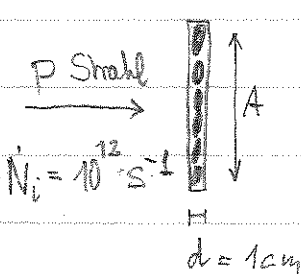
$$\lambda = \frac{1}{n_t \cdot \sigma}$$

2.3) Luminosität

Reaktionsrate $N_S = \underbrace{\phi \cdot N_T}_{\mathcal{L}} \cdot \sigma$
 (= Rate geschehener Tischen)
 \mathcal{L} = Luminosität
 $[\mathcal{L}] = \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$

Häufig auch „integrierte Luminosität“: $\mathcal{L}_{\text{int}} = \int \mathcal{L} dt$: $N_S = \mathcal{L}_{\text{int}} \cdot \sigma$
 Ereignisse

Bsp: Fixed Target Konfiguration



Targel-Dichte $n_T = N_A \frac{\rho}{M_{\text{mol}}} \approx 10^{24} \text{ cm}^{-3}$ (typ.)

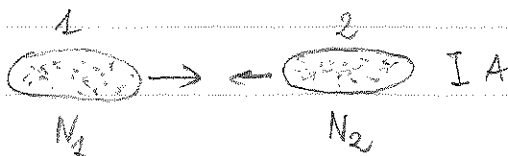
Zahl Targel $N_T = N_A \frac{\rho}{M_{\text{mol}}} \cdot A \cdot d$

→ Luminosität $\mathcal{L} = \phi N_T = \frac{N_i}{A} \cdot N_A \frac{\rho}{M_{\text{mol}}} \cdot A \cdot d$

$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

$= N_i n_T \cdot \underbrace{d}_{= 1 \text{ cm}} \approx 10^{36} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

Bsp.: Collider-Konfiguration
 (Speicherringe)



$\mathcal{L} = f \cdot \frac{N_1 N_2}{A}$ mit $\left\{ \begin{array}{l} N_1, N_2 = \text{Zahl der Teilchen im Strahl} \\ f = \text{Umlauffrequenz, Kollisionsfrequenz} \\ A = \text{Strahlquerschnittsfläche} \end{array} \right.$

LHC: Die beiden Strahl bestehen aus insgesamt n_b ($= 2808$) Strahl-
 pabelten mit je N ($= 1.2 \cdot 10^{14}$ (max)) Protonen, $A \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2$
 $(\approx \varnothing 60 \mu\text{m})$

$\mathcal{L} = \underbrace{f \cdot n_b}_{\text{n mal mehr Kollisionen}} \frac{N^2}{A} \approx 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ mit $f = 11,25 \text{ kHz}$

$N_S = \mathcal{L} \cdot \sigma_{pp} \approx 800 \text{ MHz}$ (pp Ereignisse!)

3. Lebensdauer und Zerfallsbreiten

3.1 Lebensdauer und Massendbreite instabiler Teilchen

Radioaktives Zerfallsgesetz: $A \rightarrow 1 + 2 (+ \dots)$
(s. a. Atomphysik)

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

mit τ = Lebensdauer des Teilchens / Zustandes ($\tau = \frac{t_{p2}}{\ln 2}$ od. $t_{p2} = \tau \ln 2$)
↳ Halbwertszeit.

Beschreibung des Teilchens im Zeit- und Energierraum

- Wellenfkt. für stabiles Teilchen: $\psi(t) = \psi_0 e^{-iE/\hbar \cdot t}$
im Ruhesystem: $E = mc^2$ $= \psi_0 e^{-imc^2/\hbar \cdot t}$

- Wahrscheinlichkeit und Wellenfkt. für instabiles Teilchen: $P(t) \sim |\psi(t)|^2 \sim e^{-t/\tau}$
 $\Rightarrow \psi(t) = \psi_0 e^{-imc^2/\hbar \cdot t - t/2\tau}$

Masse \leftrightarrow " $mc^2 - i\frac{\Gamma}{2}$ " mit $\Gamma = \hbar/\tau$

Wie sieht die Energieverteilung des instabilen Teilchens aus?

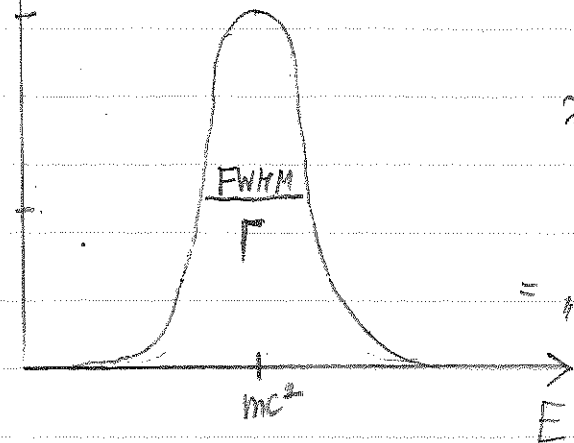
Die Teilchenverteilung im Energierraum ergibt sich als Fouriertaf.

der zeitabhängigen Wellenfkt. Man findet (\rightarrow s. Fourierfeld S. 94)

Bem.: $E = p^2 c^2 + m^2 c^4$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\psi}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(t) e^{-iE/\hbar \cdot t} dt = \frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\hbar}{(E - mc^2) + i\Gamma/2} \\ \tilde{P}(E) \sim |\tilde{\psi}(E)|^2 = C \cdot \frac{\hbar^2}{(E - mc^2)^2 + \Gamma^2/4} \cdot \frac{|\psi_0|^2}{2\pi} \\ \tilde{P}(E) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(E - mc^2)^2 + \Gamma^2/4} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{Normierung} \\ \int_0^\infty \tilde{P}(E) dE = 1 \\ \downarrow \\ C = \frac{\Gamma}{\hbar^2 |\psi_0|^2} \end{array} \right.$$

Abb. III.4a

$\tilde{\rho}(E)$ 

$$\tilde{\rho}(E) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{(E - mc^2)^2 + \Gamma^2/4}$$

= „Breit-Wigner-Form“
(Lorentz-Kurve)

Aufgrund seiner endlichen Lebensdauer besitzt das Teilchen eine „Energiebreite“ (= „natürliche Linienbreite“) $\Delta E = \Gamma$

$$\Gamma \cdot \tau = \hbar$$

Misst man für einen Teilchenzerfall $A \rightarrow 1+2$ die invariante Masse $m_{inv}(A) = m_{inv}(1+2)$ so erhält man eine endliche Breite, die umso größer ist, je kürzer das Teilchen lebt.

$$\phi \rightarrow K^+ K^- \quad \Gamma_\phi \approx 5 \text{ MeV} \Leftrightarrow \tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.582 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}}{5 \text{ MeV}}$$

$$\text{Bsp: } \rho \rightarrow \pi^+ \pi^- \quad \text{Abb. III.4} \quad \approx 1.3 \cdot 10^{-22} \text{ s}$$

$$\text{Abb. III.4b} \quad \Gamma_\rho = 150 \text{ MeV} \Leftrightarrow \tau_\rho = 0.4 \cdot 10^{-23} \text{ s}$$

Bsp: kurzlebige Resonanzen: $\pi p \rightarrow \Delta \rightarrow \pi p$ (Abb. III.4c)

3.2 Partialbreiten

Falls Teilchen mehrere Zerfallskanäle besitzt kann man mit den Verzweigungsverhältnisse B_i sogenannte Partialbreiten definieren: $\Gamma_i = B_i \cdot \Gamma$

Verzweigungsverhältnis

[WB und Partialbreiten lassen sich berechnen!]

4. Übergangswahrscheinlichkeit und Fermi's Goldene Regel

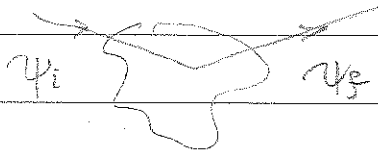
Übergangswahrscheinlichkeit / Zeit ω bestimmt die Lebensdauer eines Teilchenzustandes bzw. den WQ eines Streuprozesses:

Lebensdauer : $\omega = \frac{1}{\tau}$

WQ : $\omega = \frac{\dot{N}_s}{N_i \cdot N_t} = \frac{(n_i v_i N_t)}{n_i V \cdot N_t} \tilde{G} = \frac{v_i G}{V}$

$V =$ Normierungsvolumen
(fällt aus Rechnung heraus)

Die Übergangswahrscheinlichkeit / Zeit ergibt sich mittels Fermi's Goldener Regel:



$$\omega_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |A_{fi}|^2 g(E_f)$$

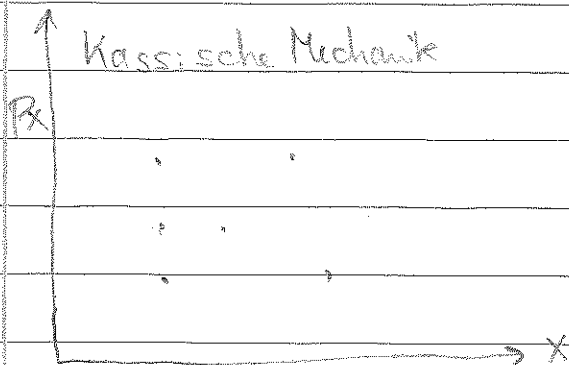
$A_{fi} = \langle f | A_{int} | i \rangle$
(aus Feynman-Regeln)

$g(E_f) =$ Zustandsdichte $= \frac{dN(E_f)}{dE}$
 $=$ Zahl der Zustände in $[E_f, E_f + dE]$

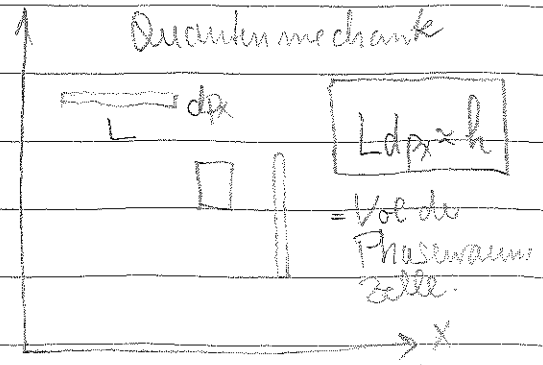
4.1 Phasenraum und Zustandsdichte

Um einen Teilchenzustand zu beschreiben muß Ort und Impuls des Teilchens bestimmt und angegeben werden. Im 1-dim. "Impuls Ortsraum":

$=$ Phasenraum: x, p_x



Teilchenzustände beschrieben durch Punkte im Phasenraum.



Zustände werden durch Phasenraumzellen beschrieben:
Phasenraumvol. $\approx h$

Wieviele Zustände passen in ein Phasenraumvolumen L^3 ?

1-dim: $dN^{1D} = \frac{L dp_x}{h} \rightarrow N^{1D} = \frac{L \int dp_x}{h}$

3-dim: $dN^{3D} = \frac{V d^3p}{h^3} \rightarrow N^{3D} = \frac{V \int d^3p}{h^3} = \frac{V \int d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$

$V = \text{Normierungsvol.}, \text{so}$

Benötigt wird aber die Zustandsdichte $\frac{dN^{3D}}{dE}$:

1-Teilchen-Zustandsdichte (3D):

$N_1^{3D} = \frac{V \int d^3p_1}{(2\pi\hbar)^3}$; $g_1 = \frac{dN_1^{3D}}{dE_1} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{d}{dE_1} \int d^3p_1$

wg. $E_1^2 = p_1^2 c^2 + m^2 c^4$

$\rightarrow \frac{d}{dE_1} = \frac{E_1}{p_1 c^2} \cdot \frac{d}{dp_1} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_1 p_1}{c^2} \cdot \int d\Omega_1$

$E = E_1 + E_2$

2-Teilchen-Zustandsdichte^{*}:

wg. der Korrelation $\nearrow p_2$ im CMS
 $\hat{=}$ "1-Teilchen" mit $E = E_1 + E_2$

$g_2 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE} \int d^3p_1$ Integration über p_2 deckt wg $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ alle ab
 $= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^2} \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} p_1 \int d\Omega_1$

n-Teilchen-Zustandsdichte^{*}:

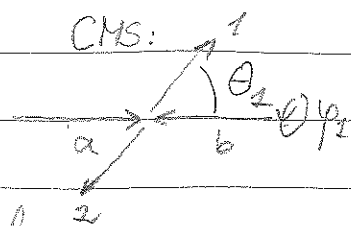
n-1-Teilchen frei
 1-Teilchen wg im CMS fest.

$g_n = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \frac{d}{dE} \left(\int d^3p_1 \cdot \dots \cdot d^3p_{n-1} \right)$

Bem: Die angegebenen Zustandsdichten sind nicht Lorentz invariant \rightarrow s. Abschnitt 6.

* Herleitung: s. a. Fraamfelds + Jänly S. 280 ff.

4.2 WQ für 2-Teilchenreaktion



WQ: $\sigma = \frac{W_{fi}}{V_i}$ ← ignore Normierung.

$V_i = \text{relativ. Geschw } a \rightarrow b$

$$W_{fi} = \int \frac{2\pi}{h} |A_{fi}|^2 \underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \right)}_{\text{Zustandsdichte} = \text{Phasenraum } 2 \text{ dim}} p_1 d\Omega_1$$

- (1) hochrelativistisch: $v_i \approx c \rightarrow \beta_i = \frac{v_i}{c} \approx 1$
- (2) vernachlässige Massen auch im Endzustand: $m_{1,2} \ll E_{1,2}/c^2$
- (3) CM-System: $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = |\vec{p}|$ $\beta_f \approx 1$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow E_1 + E_2 &= 2p_1 c \\ \rightarrow E_1 \cdot E_2 &= p_1^2 c^2 \end{aligned} \right\} (*)$$

- (4) Zusätzliche Konvention des Fußes relativ zu Fixiert Target Konfig (s. O. Nachtmann)

$$d\sigma = 2 \cdot \frac{2\pi}{h} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^3} \cdot \frac{p_1^2 c^2}{2p_1 c} p_1 |A_{fi}|^2 d\Omega_1$$

mit (*)

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{\hbar^4 c^4} \cdot (p_1^2 c^2) |A_{fi}|^2 d\Omega_1$$

bzw $d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{\hbar^4 c^4} \right) \frac{p_1^2 c^2}{\beta_i \beta_f} |A_{fi}|^2 d\Omega_1$

für endliche Geschwindigkeiten

4.3 Zufallsbreite 2-Teilchen zerfall: $A \rightarrow 1+2$

$$d\Gamma = \hbar d\omega_f = \hbar \cdot \frac{2\pi}{h} |A_{fi}|^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^2} \frac{E_1 E_2}{Mc^2} p_1 d\Omega_1$$

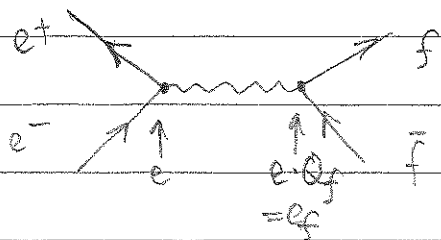
mit $\Gamma = \frac{1}{\tau} = \hbar \omega_f$

$$= \frac{|A_{fi}|^2}{(2\pi)^2 \hbar^3 c^3} \cdot \frac{1}{c} \frac{E_1 E_2}{M} p_1 d\Omega_1 \sim \frac{\left(\frac{Mc^2}{2} \right)^2}{M} \cdot p_1 d\Omega$$

$A \rightarrow 1+2$

5. e^+e^- -Anihilation (als Beispiel)

$$e^+e^- \rightarrow f\bar{f} \text{ mit } f\bar{f} = (e^+e^-), \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-, q\bar{q}$$



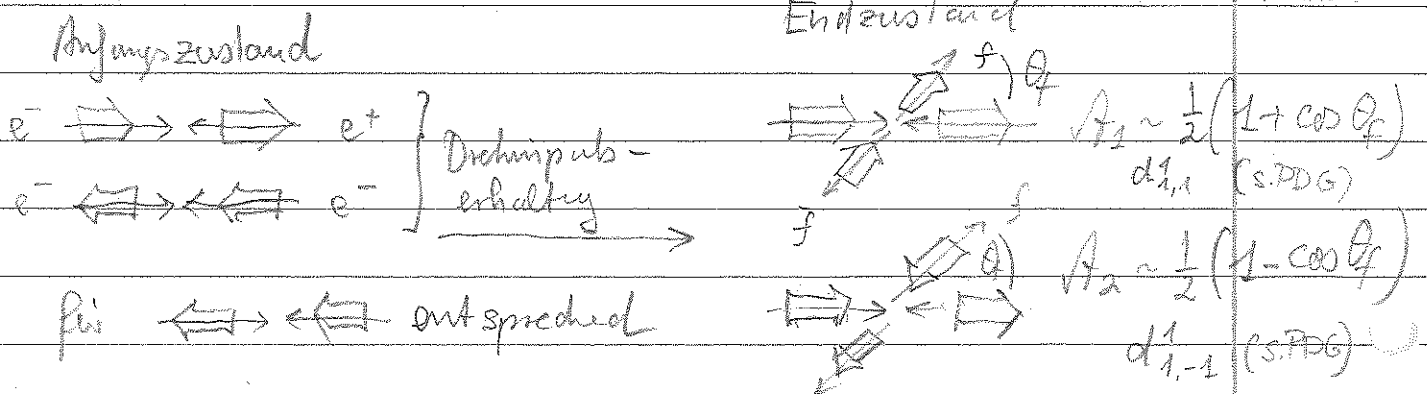
$$Q_f = 1 \text{ für } \mu, \tau, e \\ = +\frac{2}{3} \text{ für } u, c, t \\ = -\frac{1}{3} \text{ für } d, s, b$$

$$|A_{fi}| \sim e \underbrace{\frac{1}{q^2}}_{E_{\text{cms}}^2} e \cdot Q_f \sim \frac{4\pi\alpha}{q^2} \cdot Q_f \cdot \left(\frac{\hbar c}{c}\right)^3 \left. \begin{array}{l} \text{Faktor berücksichtigt} \\ \text{Dimensionen} \\ \text{(Normierungswert} \\ \text{weggelassen)} \end{array} \right\}$$

(in Folgenden $Q_f = 1$)

Die hier angegebene Amplitude ignoriert die Spins von Photon (Spin=1) und Fermionen (Spin=1/2). Erlaubte Kombinationen wg. Photonspin=1: und Drehimpuls erhalten.

s. Abb. III.5:



\Rightarrow Addition der einzelnen Spinamplituden sowie Mittelung über Anfangskonfigurationen

$$|A_{fi}|^2 = \frac{1}{4} \sum |A_i|^2 = \frac{1}{4} (1 + \cos^2\theta_f) \cdot \frac{(4\pi\alpha)^2}{q^4} \cdot \left(\frac{\hbar c}{c}\right)^2 \\ = \frac{1}{4} (1 + \cos^2\theta_f) \frac{(4\pi\alpha)^2}{E_{\text{cms}}^4} (\hbar c)^3$$

Mit W(klaus(4):

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} \frac{E_{\text{cms}}^2}{4} \frac{(4\pi\alpha)^2}{E_{\text{cms}}^4} (\hbar c)^6 \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta_f) d\Omega$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4} \frac{1}{E_{\text{cms}}^2} (1 + \cos^2\theta_f) (\hbar c)^2$$

Integration über $\cos\theta_f$ und $d\phi$:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{(\hbar c)^2}{E_{\text{cms}}^2} = \frac{87\text{nb}}{E_{\text{cms}}^2 (\text{GeV}^2)} \left. \begin{array}{l} \text{s. Abb. III.6} \\ ee \rightarrow \mu\mu \end{array} \right\}$$

Bemerkungen

- G_{tot} ignoriert die Massen der Endzustandsfermionen:

$$G_{tot}(ee \rightarrow f\bar{f}) = 0 \text{ für } E_{cms} < 2m_f$$

- für $Q_f \neq 1$: $G_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3} \cdot Q_f^2 \cdot \frac{1}{E_{cms}^2} \cdot (\hbar c)^2$

(Achtung: für $q\bar{q}$ muß man auch noch die Farbladung berücksichtigen)

$$\rightarrow q\bar{q} \cdot \underbrace{(\bar{r}\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b})}_{\times 3} \Rightarrow \text{später}$$

6.) Lorentzinvarianter Phasenraum

s. Abb III.7a
s. Abb III.7b

Weder Fermi's Goldene Regel noch der Phasenraumfaktor sind in der angegebenen Form Lorentzinvariant.

Lorentzinvariante Formulierung: $\omega = \frac{2\pi}{\hbar} \underbrace{\frac{|M_{fi}|^2}{4E_i}}_{\text{alt. inif. state Teilchen}} \cdot \rho$

$$\rho = \frac{d}{dE_{\text{tot}}} \frac{1}{(2\pi\frac{\hbar}{h})^{3(n-1)}} \int \frac{d^3p_1}{2E_1} \dots \frac{d^3p_n}{2E_n} \leftarrow \text{final state Lorentzinvariantes Maß}$$

M_{fi} = Lorentzinvariante Übergangsamplitude

(folgt dem gleichen Prinzipien wie A_{fi} - nur andere Normierung)

Man findet für den 2-Teilchen WQ

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{1}{\hbar^4 c^4}\right) \frac{1}{s} \cdot |M_{fi}|^2 d\Omega_1$$

bzw für die Zerfallsbreite $A \rightarrow 1+2$;
M (Masse von A)

$$dT = \frac{1}{32\pi^2} \frac{|\vec{p}_1|}{M^2} \cdot |M_{fi}|^2 d\Omega_1$$