

5. Relativistische Kinematik

40

In der Teilchenphysik sind Teilchen in d.R. hochrelativistisch:

$$E \gg mc^2$$

Relativistische Energi-
Impuls - Beziehung

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Häufig: $c=1$ gesetzt

4er Vektoren:

$$(\text{Zeit, Ort}) \quad x = (ct, \vec{x}) = x^\mu$$

$$(\text{E, Impuls}) \quad p = (E/c, \vec{p}) = p^\mu$$

$$\text{allg.} \quad a = (a_0, \vec{a}) = a^\mu$$

Skalarprodukt

$$a \cdot b = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$$

mit $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

Das so definierte Skalarprodukt ist lorentzinvariant
d.h. unabhängig von der Wahl des Bezugssystems.

Bsp. 1 $p = (E/c, \vec{p})$ $p \cdot p =$ unabhängig von Bezugssyst.

Labo: $p \cdot p = (E/c, \vec{p}) \cdot (E/c, \vec{p}) = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2$

CMS: $p \cdot p = (mc, \vec{0}) \cdot (mc, \vec{0}) = \underbrace{m^2 c^2}_{= (\text{invariante Masse})^2 c^4}$

in allen Systemen gleich!

Bsp 2: Kollision zweier Teilchen

$$p_1 = \left(\frac{E_1}{c}, \vec{p}_1 \right) \rightarrow \leftarrow p_2 = \left(\frac{E_2}{c}, \vec{p}_2 \right)$$

$$s = c^2 (p_1 + p_2)^2 = S = (\text{Schwerpunktsenergie})^2$$

- (a) Hochrelativistische Teilchen 1, 2: $m_i c^2 \ll E_i$; $E_i \approx p_i c$
 und $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ (Bsp. 2 hochrelativ. Elektronen: $\vec{p} \leftarrow \vec{p}$)

$$s = c^2 (p_1 + p_2)^2 \approx \left(\left(\frac{E_1}{c}, \vec{p}_1 \right) + \left(\frac{E_2}{c}, -\vec{p}_1 \right) \right)^2 c^2 = 4 \underbrace{p_1^2 c^2}_{E_1^2}$$

d.h. $\sqrt{s} = \text{Schwerpunktsenergie } E_{\text{CMS}} = 2E_1$

- (b) Fixed-Target-Kollision: $M \xrightarrow{\vec{p}_1} \text{⊙ } M, \vec{p}_2 = 0$ Abb. II.

$$s = c^2 \left(\left(\frac{E_1}{c}, \vec{p}_1 \right) + (Mc, 0) \right)^2$$

$$= c^2 \left(\left(\frac{E_1}{c} + Mc \right)^2 - \vec{p}_1^2 \right) = E_1^2 + 2c^2 M E_1 + M^2 c^4 - \vec{p}_1^2 c^2$$

$$= m_1^2 c^4 + \vec{p}_1^2 c^2 + 2c^2 M E_1 + M^2 c^4 - \vec{p}_1^2 c^2$$

$$\approx 2c^2 M E_1 \text{ für } m_1 c, M c \ll \vec{p}_1$$

d.h. $\sqrt{s} = E_{\text{CMS}} \approx c \sqrt{2 M E_1} < E_1$

Bem.: Berechnung von β und γ (z.B. für Zeitdilatation, Geschwindigkeit)

$$\left. \begin{array}{l} \beta = \frac{v}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array} \right\} \text{ mit } \begin{array}{l} E = \gamma \cdot m c^2 \\ p = \gamma m v \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{E}{m c^2} \\ \beta \gamma = p / m c \\ \beta = \frac{p c}{E} \end{array} \right.$$

III. Beschreibung von Streuprozessen

1. Feynman-Diagramme

Korrekte theoretische Einführung von Feynman-Diagrammen ist schwierig und erst in QFT möglich. Feynman-Diagramme beschreiben „Rechenregeln“ zur Berechnung von Übergangsamplituden. Sie können aus der Lagrangedichte (Felder) der entsprechenden ^{QFT}Theorie abgeleitet werden.

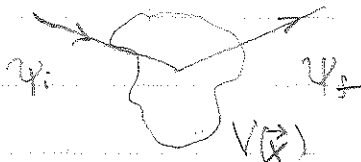
Feynman-Diagramme sind aber sehr illustrativ und vermitteln bereits ohne explizit ausgerechnet zu werden ein gutes Verständnis der Dynamik von WW-Prozessen. Sie sind als „Piktogramme“ ein wichtiges Werkzeug der Teilchenphysik.

Typisches Problem:

Vorhersage der WW-Wahrscheinlichkeit bzw. der WW-Rate eines Streuprozesses:

$$\text{Bsp.: } e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$$

Aus der Atomphysik ist bereits die Übergangsamplitude eines atomaren Übergangs bekannt. Vereinfachte Situation:



Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{WW}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

↑
freies Teilchen

Störungstheorie für $\hat{H}_{\text{WW}} < \hat{H}_0$ (klein):

ψ_i, ψ_f sind Eigenfunktionen zu \hat{H}_0 (freies Teilchen):

$$\psi_i = N \cdot \exp(i \vec{k}_i \vec{x} - i \omega_i t) \quad N = \text{Normierung}$$

$$\text{mit } \vec{k}_i = \vec{p}_i / \hbar \quad \text{und } \omega_i = E_i / \hbar$$

Übergangsamplitude:
(wie in Atomphysik)

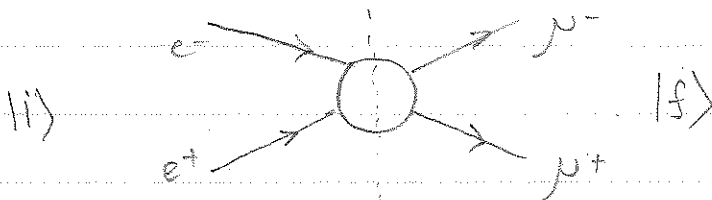
$$A(i \rightarrow f) = \int \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \psi_f^* H_{int} \psi_i d^3r dt$$

Übergangsrate: $\sim P(\text{Übergangswahrsch.}) \sim |A|^2$

Hier: (1) Teilchen bleibt erhalten

(2) nichtrelativistisch $E = \frac{p^2}{2m}$

In der Teilchenphysik ist die Situation hingegen weitens komplizierter:



- (1) Teilchen vernichten sich und neue Teilchen entstehen
- (2) Teilchen sind hochrelativistisch

ad 1) Zur korrekten Behandlung in QFT: $\psi(\vec{x}, t)$ sind nicht mehr länger skalare Funktionen, sondern Operatoren die Teilchen + Anti-Teilchen mit Impuls \vec{k} erzeugen bzw. vernichten können

Zur Notation der Beschreibung von Anti-Teilchen:*)

ad 2) Relativistische Energiimpulsbeziehung: $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$

→ 2 Energieeigenwerte:

$$E_+ = +\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \rightarrow \quad \omega_+ = \frac{+\sqrt{\quad}}{\hbar} = \omega$$

$$E_- = -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \rightarrow \quad \omega_- = \frac{-\sqrt{\quad}}{\hbar} = -\omega$$

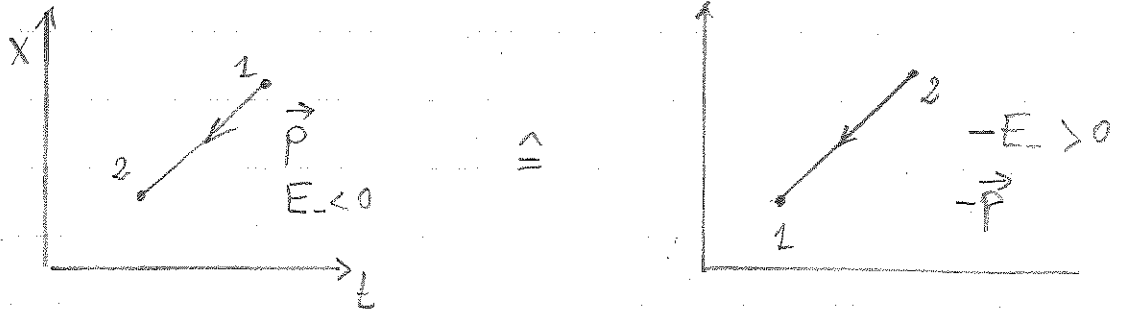
→ zugehörigen Eignfkt.: $E_+ > 0 : \psi_+ = N \cdot \exp(i\vec{k}\vec{x} - i\omega t)$

$$E_- < 0 : \psi_- = N \cdot \exp(i\vec{k}\vec{x} + i\omega t)$$

vom ad
hochwärts

*) Bei Verwendung der Dirac-Gleichung bzw. in QFT erübrigen sich diese Diskussionen → Anti-Teilchen folgen zweifelslos!

Interpretation der „neg. Energielösung“ (folgt zwanglos in QFT): Antiteilchen



Teilchen bewegt sich in „+t“ Richtung mit neg. Energie

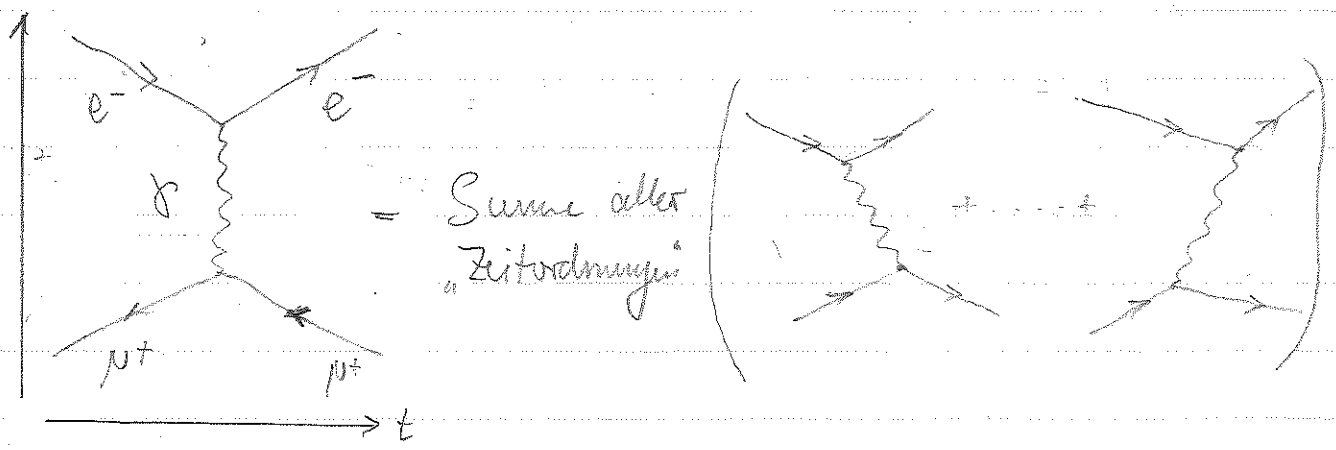
Anti-Teilchen in „+t“ Richtung mit pos. Energi und umgekehrte Impuls $-\vec{p}$.

→ Die Lösungen für E_- erlauben die Beschreibung von Antiteilchen.
 (In Dirac-Gl und QFT folgen Antiteilchen zwanglos ohne Akrobatik)

1.1 Feynman-Diagramme in QED

→ zur Berechnung von Übergangsamplituden von elektromag. Prozessen

Bsp: $e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+$ Streuung
 $L_e = 1, L_\mu = 1$
 { Vernichtung von $e^- \mu^+$ nicht möglich, weil L_e, L_μ = Leptonenzahlen erhalten bleiben



Bem.: Ich benutze die oben erwähnte Konvention dass Anti-Teilchen durch $-\vec{p} = \leftarrow$ beschrieben werden.

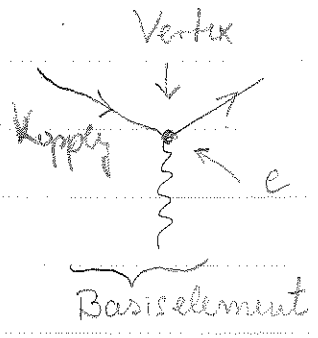
*) häufig = „finden“, „Antiteilchenlauf nicht wahr in Zeit“ - nicht wirklich richtig

a) Feynman-Regeln und ihre Bedeutung

(1) Fermionen (im Limit frei): Pfeile in pos. Zeitrichtung
 A-Fermionen ($-v-$): Pfeile in neg. Zeitrichtung

(2) Austauschboson = Photon:  γ

(3) In QED nur eine Art von γ -Fermionkoppl.
 Stärke der Photon-Fermionkoppl.
 \sim elektrische Ladung e
 $\sim \sqrt{\alpha} \sim \frac{1}{\sqrt{137}}$

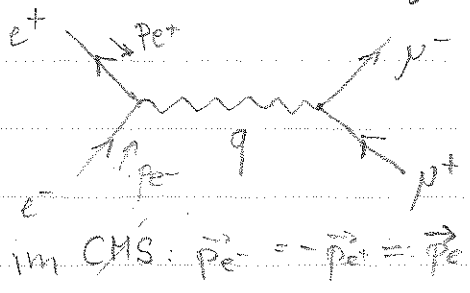


(4) An jedem Vertex gilt 4er Impulserhaltung, Ladungserhaltung und Leptonzahlerhaltung ($L_e(e^-) = +1$
 $e^+ -1$)

(5) Innere Linien zB. "Photonlinien" (=Propagator) sind virtuell und erfüllen i.d. Regel nicht die Energieimpulsbeziehung freier Teilchen insbesondere $q^2 + m_0^2 c^2 = 0$ ($4er$ Impuls \neq Invariant Masse)

(6) Äußere Teilchen (Linien) sind reelle Teilchen und erfüllen die Energi-Impuls Bez. $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$

Bsp: $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ bei LEP $45 \text{ GeV}/c \rightarrow \leftarrow 45 \text{ GeV}/c$



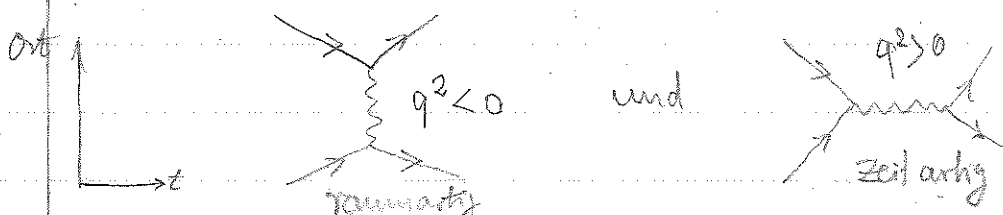
4er Impuls q des Photons:
 $q = (\frac{E_e}{c}, \vec{p}_e) + (\frac{E_e}{c}, -\vec{p}_e) = 2\frac{E_e}{c}$
 $q^2 = 4\frac{E_e^2}{c^2} \neq m_0^2 c^2 = 0$
 wie man für virtuelles Photon erwartet.

$L_e = 0$ $L_\mu = 0$
 $L_p = 0$ $L_e = 0$

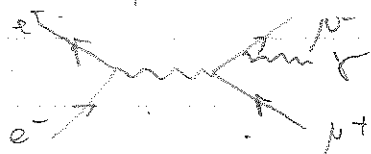
Die Energie-Impuls-Beziehung ist also für das virtuelle Photon verletzt.
Dies ist aufgrund der Heisenberg'schen Unschärfe $\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$ für eine kurze Zeit möglich. \rightarrow erlaubt interessante kurzzeitige Quantenfluktuationen.

Bem. zum q^2 von ausgetauschten Photonen:

Je nach Vorzeichen des q^2 -Werts des virtuellen Photons / Teilchens spricht man von raumartigen ($q^2 < 0$) und zeitartigen ($q^2 > 0$) Photonen.

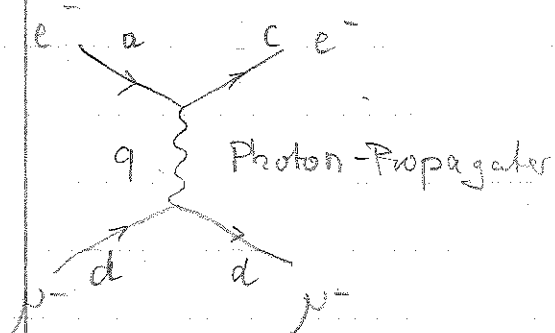


Für freie Photonen: z.B. Bremsstrahlung



$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma \quad q^2 = m_\gamma^2 c^2 = 0!$$

b) Übergangsamplitude aus Feynman-Graphen



Struktur von A :

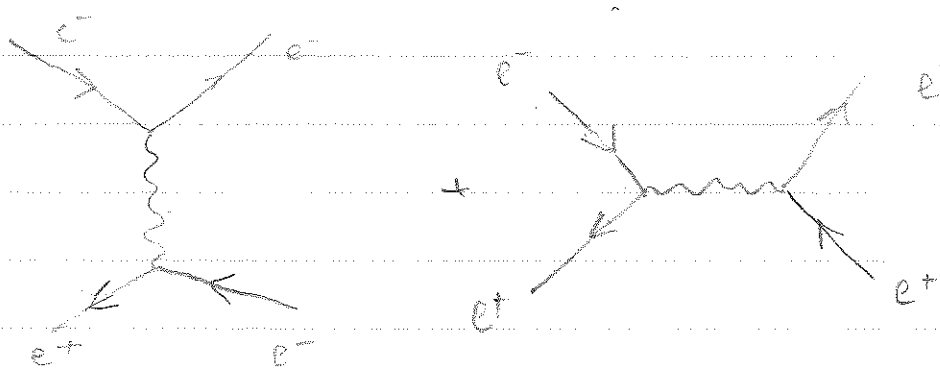
$$A(a+b \rightarrow c+d) \sim \underbrace{\langle c | W | a \rangle}_{W \sim e} \cdot \underbrace{\text{Photon Propagator}}_{\frac{1}{q^2}} \cdot \underbrace{\langle d | W | b \rangle}_{W \sim e}$$

$$\Rightarrow A(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) \sim e \cdot \frac{1}{q^2} \cdot e \sim \frac{e^2}{q^2} \leftarrow \text{Feinstruktur konst.}$$

In ähnlicher Weise können auch andere Prozesse beschrieben werden

Ein physikal. beobachtbarer Prozess (bsp $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$) wird durch die Summe aller möglichen Amplituden (= Feynman Diagramme), die zum gleichen Endzustand führen, beschrieben. Die Einzelamplituden werden kohärent (auf Amplitudenlevel) zur Gesamtamplitude addiert. Die Wechselwirkungsrate ergibt sich dann als Betragsquadrat der Gesamtamplitude.

$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$:



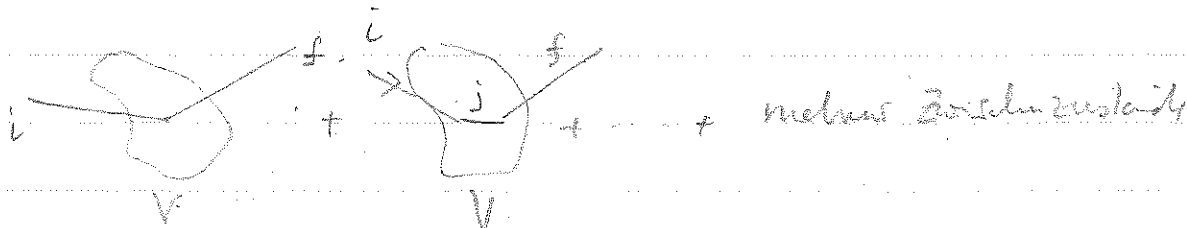
$$A_1 + A_2 = A_{\text{tot}}$$

$$\text{WW-Rate} \sim |A_{\text{tot}}|^2 = |A_1 + A_2|^2$$

→ Man erwartet Beiträge von Interferenzen (→ interessanter Effekt)

c) Feynman-Graphen höherer Ordnung

Idee: (klassisches Potentia V)



$$A(i \rightarrow f) \propto \langle f | W | i \rangle + \sum_j \frac{\langle f | W | j \rangle \langle j | W | i \rangle}{E_i - E_j}$$

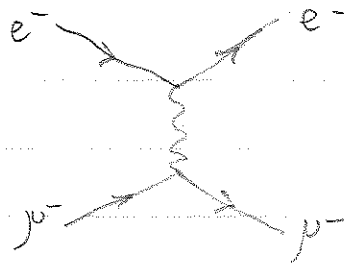
→ Störungsreihe

→ Störungsentwicklung in QED

Bsp: $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

leading order (LO)

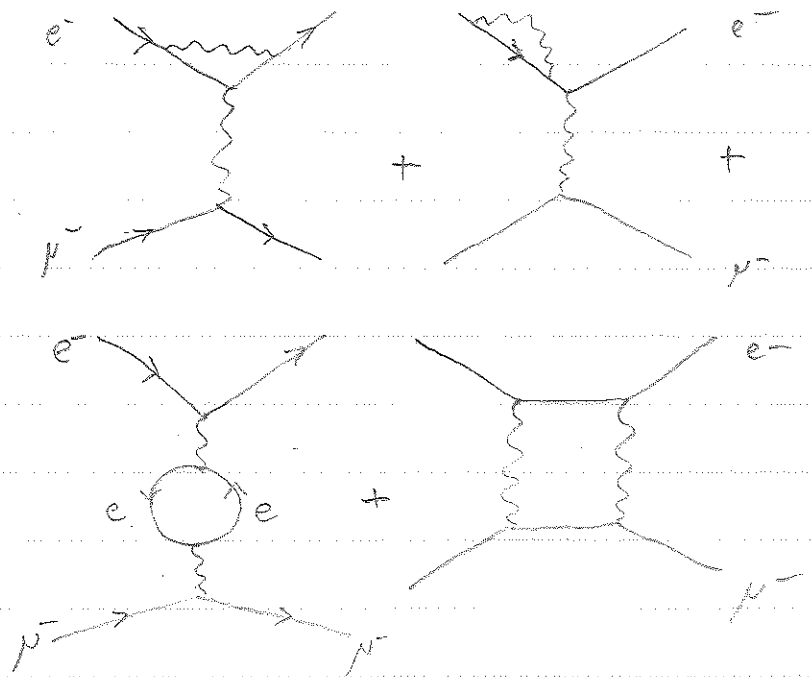
$A_{LO} \sim e^2 \sim \alpha$



next-to-leading order (NLO)

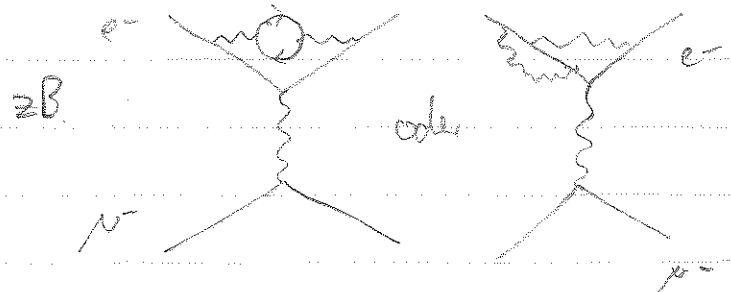
$A_{NLO} \sim e^4 \sim \alpha^2$

(gleiche Anfangs- + Endzustands teilchen)



next-to-next to leading order (NNLO)

$A_{NNL} \sim e^6 \sim \alpha^3$



Da $\alpha = \frac{1}{137} \ll 1$ spielen in der Störungsreihenentwicklung die Terme höherer Ordnung eine immer weniger wichtige Rolle.

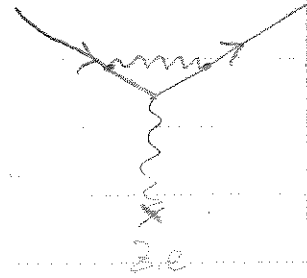
d) Meßbare Effekte der Quanten-Korrekturen:

1) Lamb-Shift (s. oben) → Atomphysik

2) Anomales magnetisches Moment:

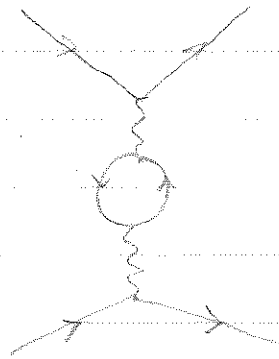
$$\vec{\mu} = g \frac{e\hbar}{2mc} \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar} \quad \rightarrow \quad (g-2) = \frac{\alpha}{\pi} - 0,16 \frac{\alpha^2}{\pi^2} + \dots$$

Bohr Hamilton
 $g=2$ in Dirac-Theorie

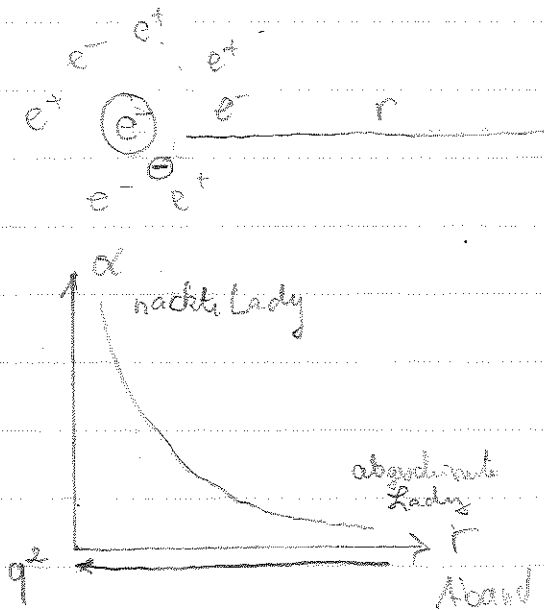


3) Running von α : $\alpha = \alpha(q^2)$

Vakuumpolarisation
 führt zur teilweisen Abschirmung
 der Ladung und damit zu
 ein „laufendes“ Kopplungskonst.
 $\alpha = \alpha(q^2)$



Ladung ist umgeben von e^+e^- -Paaren:



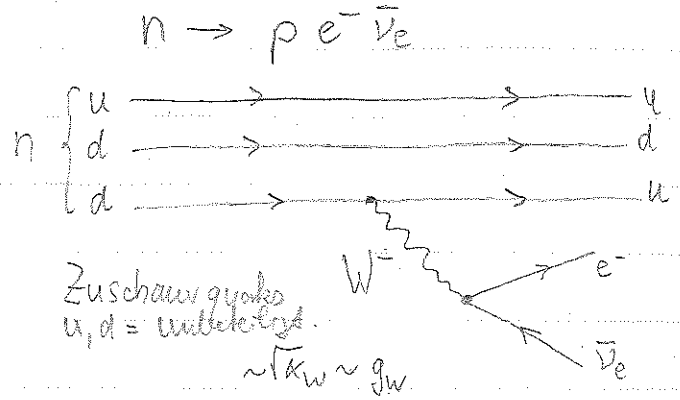
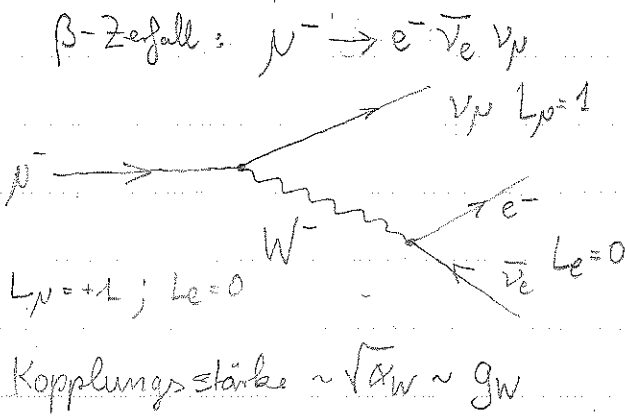
Testladung
 ⊖ großer Abstand $\hat{=}$ kleines q^2
 → abgeschirmte Ladg: α klein
 kleines Abstand $\hat{=}$ großes q^2
 → „nackte“ Ladung: α groß

Feinstruktur $\alpha = \frac{1}{137}$ ist im Limit
 $q^2 \rightarrow 0$ gemessen: $\alpha(q^2 = M_e^2 c^2) = \frac{1}{128}$

Bem. Die hier diskutierten Quanteneffekte spielen
 auch für die anderen WW eine Rolle!

1.2 Feynman-Graphen für schwache WW

Austausch-Boson: QED = Photon (masselos) → schwache WW = W^\pm, Z (massiv)



Wie in QED gilt Leptonzahl erhalten. Quarktyp bleibt nicht erhalten!
 W^\pm Bosonen: u-typ \leftrightarrow d-typ Quarks (bei W^\pm !)

Massive W-Bosonen ($80 \text{ GeV}/c^2$) führen zu einem modifizierten Propagator

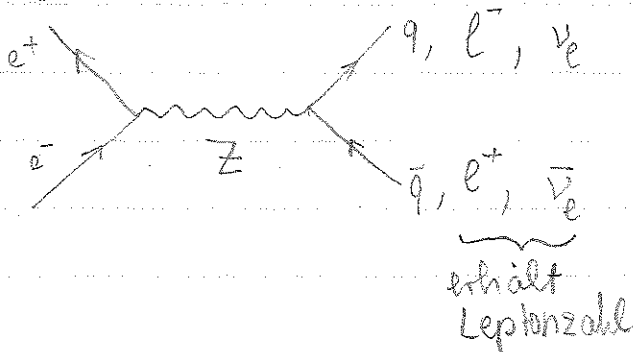
$$\frac{1}{q^2} \rightarrow \frac{1}{q^2 - M_W^2 c^2} \leftarrow \text{Pol, falls } q^2 = M_W^2 c^2$$

$$A \sim \frac{g_W^2}{q^2 - M_W^2 c^2}$$

Für kleine q^2 ($q^2 \ll M_W^2 c^2$): $A \sim \frac{g_W^2}{M_W^2 c^2}$ starke $\frac{1}{2}$ Unterdrückung

→ Grund für die „Schwäche“ der WW
 ($g_W \approx 0(e)$)

Z-Austausch:

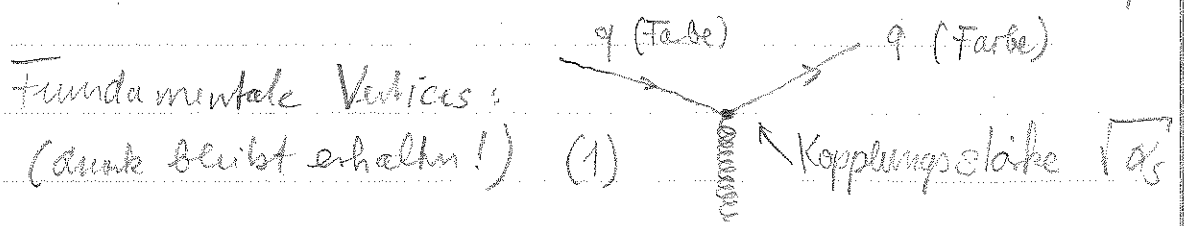


wegen $A \sim \frac{1}{q^2 - M_Z^2 c^2}$

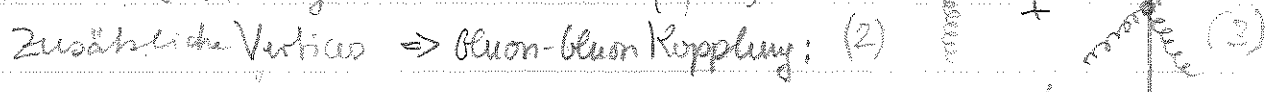
„Pol“ für $q^2 \approx M_Z^2 c^2$
 ⇒ Anstieg der WW-Rate!

1.3 Feynman-Graphen für starke WW

Austausch-Bosonen = masselose Gluonen \rightarrow Propagator $\sim \frac{1}{q^2}$

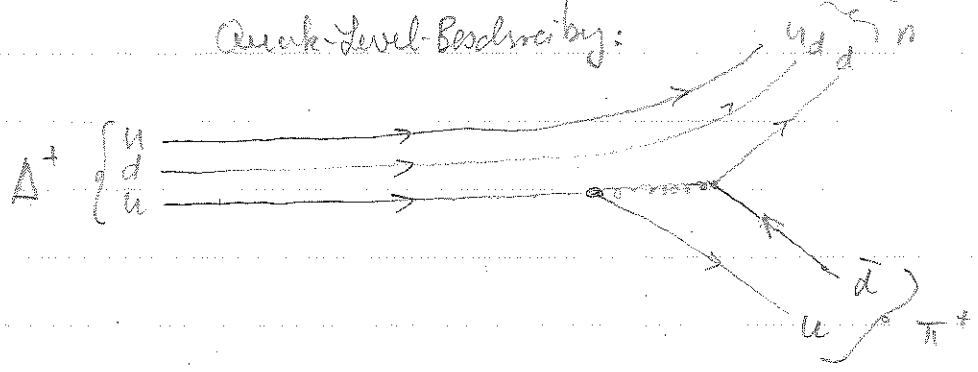


Aber Gluonen tragen selbst Farbe (spalte) -



Bem: Aufgrund der Quantenzahlen findet man auch
 \hookrightarrow hier eine „laufende Kopplungskonstante“ oder „Antiscreening“
 Aber: $\alpha_s(q^2) = (91 \text{ GeV}/c^2) = 0.123$ $\alpha_s = O(1)$ für $q^2 = (200 \text{ MeV}/c)$

Bsp: Starker Zerfall einer Δ -Resonanz (Baryon)
 $\Delta^+ (uud) \rightarrow n (udd) + \pi^+ (u\bar{d})$
 Quark-Level-Beschreibung:



Bem: Die Quark-Level-Beschreibung von ^{stark} Hadronzerfällen
 ist sinnvoll um den Quarkinhalt zu verstehen. Störungstheoretisch aber machen diese Feynman-Graphen keinen Sinn.
 (wegen $\alpha_s \rightarrow 1$ keine Störungstheorie + Eichwidrig sinnvoll)

„Harte“ (q^2 groß) Streuungen aber gut beschreibbar - QCD gut getestet.

