

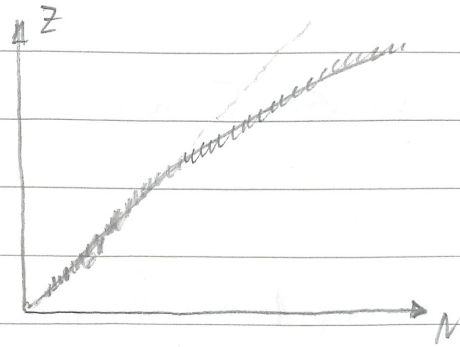
3. Kernzerfälle

Stabile Kerne bilden in der (Z, N) Ebene ein „Stabilitätstal“:

für leichte Kerne $N \approx Z$

für schwere Kerne $N > Z$

(s. hierzu auch Nuklidkarte Abb IX.6.)



Bei Neutronenüberschuß (relativ zu Stabilitätstal) \rightarrow n-Zerfall: β^-

Bei Protonenüberschuß (— — —) \rightarrow β^+ -Zerfall, EC

Bei Kernreaktionen relevant: Q-Wert = $(M(A, Z) - M(A, Z')) c^2 > 0$

3.1 β -Zerfall

Für konstantes A läßt sich die Massenformel als Fkt von Z schreiben:

$$M(A, Z) \Big|_{A=\text{const.}} = \alpha \cdot A - \beta \cdot Z + \gamma Z^2 + \frac{\delta}{A^{1/2}} \quad \left(\begin{array}{l} M(A, Z) \text{ nur Kernmasse,} \\ \text{keine Elektronen} \end{array} \right)$$

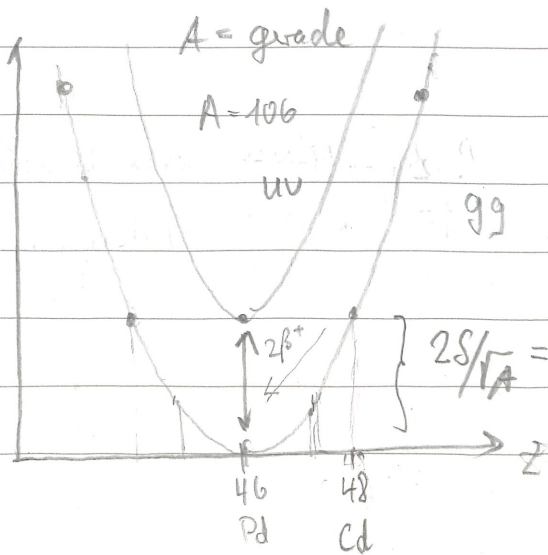
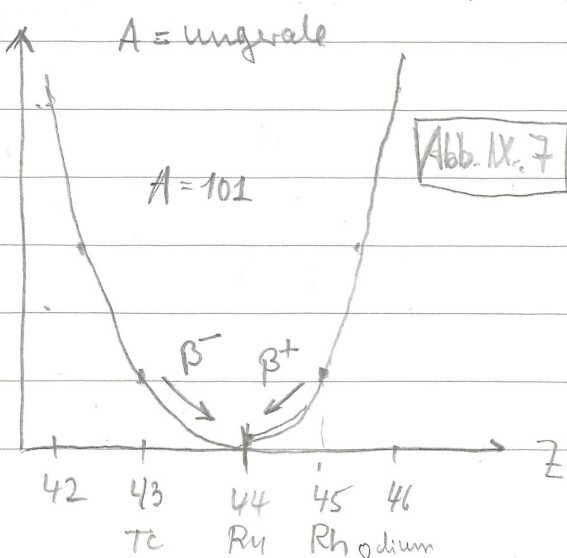
mit $\alpha = m_n - a_v + a_0 A^{-1/3} + a_s$

$$\beta = 4a_s + (m_n - m_p)$$

$$\gamma = \frac{4a_s}{A} + \frac{a_c}{A^{1/3}}$$

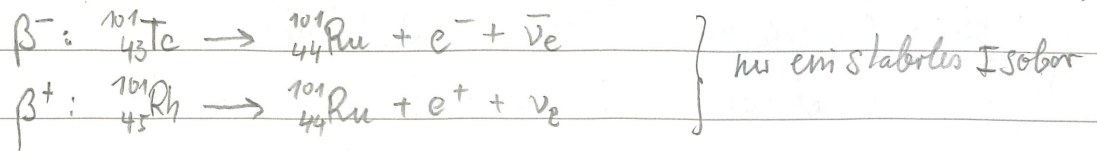
für $A = \text{const.}$

\rightarrow Kernmasse M ist eine quadratische Fkt. von Z : Parabel (Abb IX.7)



β-Zerfall in ungeraden Kernen:

Bsp: Für A=101 liegt Minimum der Parabel bei $^{101}_{44}\text{Ru}$ (Z=44) (Abb IX)



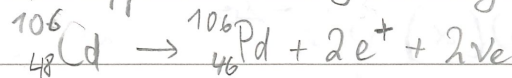
β-Zerfall in geraden Kernen:

Da es hier 2 gebremte Parabeln für un und gg-Kerne gibt gibt es vor allem für A > 70 häufig mehr als ein stabiles gg Isotop. Keine stabilen un Isotope.

Bsp: A=106 (s. Abb. IX. 7)

Die Isobaren $^{106}_{48}\text{Cd}$ und $^{106}_{46}\text{Pd}$ liegen als gg-Kerne beide auf der unteren Parabel, wobei Pd das stabilste Isobar ist.

Die Umwandlung von ^{106}Cd nach ^{106}Pd ist nur durch den stark unterdrückten Doppel beta-Zerfall möglich:



Die Wahrscheinlichkeit für diesen Prozess ist aber sehr klein, so daß auch ^{106}Cd als stabiles Nuklid betrachtet werden kann.

Bem: Stabilitätstal: $\left. \frac{\partial M}{\partial Z} \right|_{Z_0} = 0 \rightarrow Z_0$ für das Minimum $\Rightarrow Z_0 = \frac{A}{1.98 + 0.015 A^{2/3}} \neq A/2$

3.2 α-Zerfall

Protonen und Neutronen sind auch in schweren Kernen mit 7-8 MeV gebunden und können in allg. nicht aus dem Kern entweichen. Oft ist allerdings die Emission eines ^4He -Kerns (2n2p) möglich, was an der ausgesprochen starken Bindung der Nucleonen im ^4He liegt

Außerhalb des Kerns erfährt ^4He (α-Teilchen) eine Coulomb-Abstoßung durch Restkern:

$$V_{\text{Coulomb}}(r) = 2(Z-2) \frac{\alpha_{\text{He}}}{r}$$

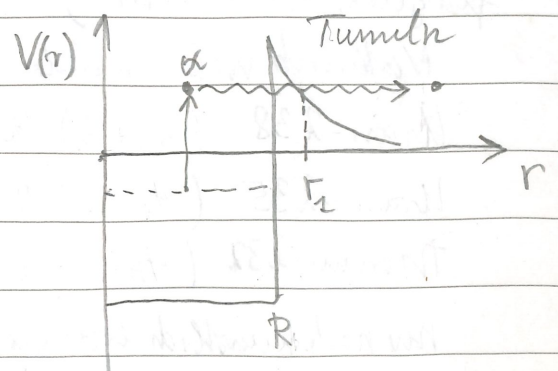


Abb. IX.8

Innehalb des Kerns herrscht ein stark anziehendes Kernpotential das näherungsweise durch ein Potentialtopf beschrieben werden kann (s. Skizze). Wahrscheinlichkeit für α -Zerfall wird durch die Tunnelwahrscheinlichkeit durch die Coulomb-Barriere gegeben.

Für das Coulomb-Potential findet man Transmission T :

$$T = e^{-2G} \quad G = \text{Gamov-Faktor} = \frac{1}{\hbar} \int_R^{r_2} \sqrt{2m |E_\alpha - V(r)|} dr \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}$$

(Tunnelwahrschl.) dimensionlos!

Übergangswahrsch. dichte/Zeit für α -Zerfall

$$t_{1/2} = \tau = W(\alpha) \nu e^{-2G} \sim e^{-2\sqrt{E_\alpha}}$$

\uparrow Stoßrate an Coulomb-Barriere $\sim \frac{v}{2R}$
 \uparrow Bremswahrsch. dichte für α

↳ Halbwertszeit $t_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 \rightarrow \log t_{1/2} \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}$

$\log t_{1/2} \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}$

} Geiger-Nuttall-Regel
 Abb IX. 8

(starke Abhängigkeit von $t_{1/2}$ von $\sqrt{E_\alpha}$) : ns... 10^{17} a

Durch sequentielle α -Zerfälle werden 4 Zerfallsreihen festgelegt: $A = 4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3$;

Natürlich vorkommende Zerfallsreihen. → Abb. IX. 9

- Uran-238 ($4n+2$) Reihe = Uran-Radium-Reihe → ^{206}Pb
- Uran-235 ($4n+3$) Reihe = Uran-Actinium-Reihe → ^{207}Pb
- Thorium-232 ($4n$) Reihe = Thorium-Reihe → ^{208}Pb

nu noch künstlich erzeugt.

Plutonium 241 ($4n+1$) Reihe = Neptunium 237 Reihe → ^{205}Tl Thallium
 (^{209}Bi)

3.3 n. Zerfälle
 Mangelnde Kernzustände A^* können durch Erzeugung ein Photons in Grundzustand übergehen: $A^* \rightarrow A + \gamma$
 Dipol, Quadrupol Übergänge sind entsprechen Auswahlrregeln

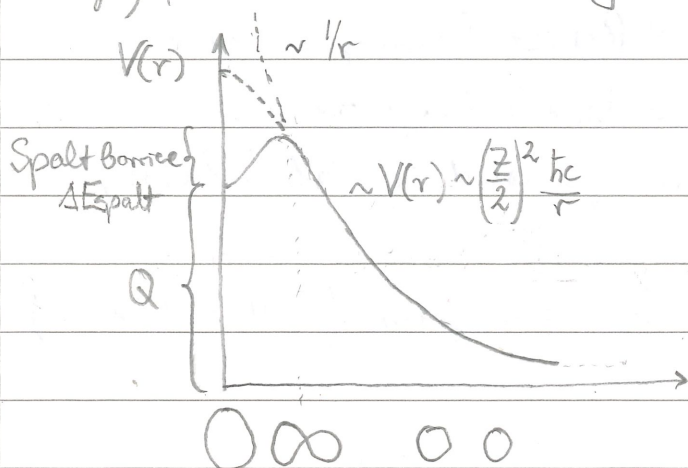
4. Kernspaltung

Da Bindungsenergie/Nukleon für Kerne im Bereich von ^{56}Fe am größten ist, können sich schwere Kerne ($Z > 40$) prinzipiell in 2 mittelschwere Kerne spalten. Allerdings ist die Potentialbarriere, die durchtunnelt werden muß, beträchtlich, so daß spontane Spaltung i.a. extrem unwahrscheinlich ist.

4.1 Spontane Spaltung

$$Q = M(A, Z) - M(A_x, Z_x) - M(A_y, Z_y) > 0$$

Leichteste Isotope bei denen die Spontane Spaltung mit α -Zerfall konkurriert sind einige Uran-Isotope. Möglich ist spontane Spaltung nur aufgrund einer Verformung des Kern (\rightarrow Absenkung der Bindungsenergie), die zu einer Absenkung der Spaltbarriere führt.



Potential für verschiedene Phasen

Verformung des Kerns zu Ellipsoid:

- Bindungsenergie verringert sich aufgrund der Oberflächenzunahme
- Coulomb-Abschirmung sinkt

Spontane Spaltung möglich für:

(s. dazu auch Abb IX. 10)

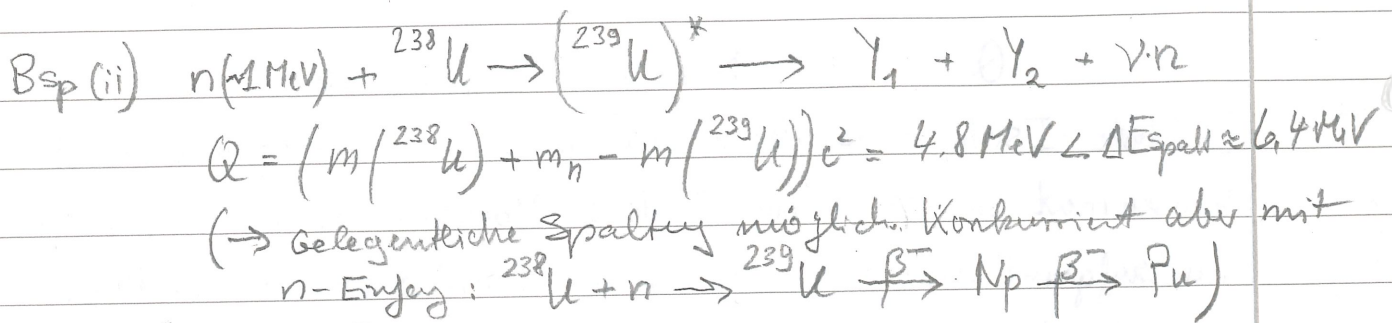
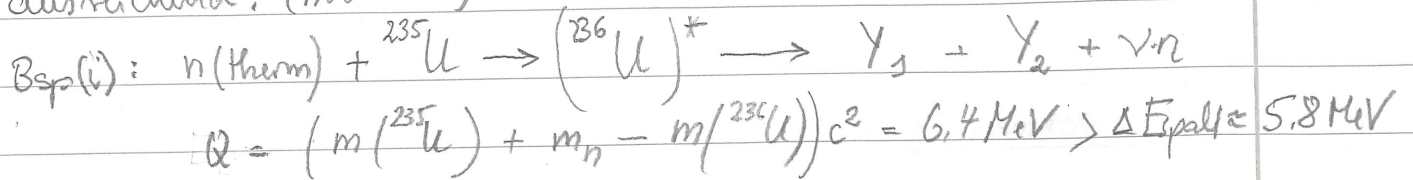
$$\frac{Z^2}{A} \gtrsim \frac{200}{a_c} \approx 48$$

Bemerkung für $\frac{Z^2}{A} \gtrsim 48$ verschwindet die Spaltbarriere (-----).

Bsp: $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow \frac{Z^2}{A} = 35,6 \rightarrow t_{1/2}(\text{Spaltung}) = 10^{16} \text{ a}$
 $t_{1/2}(\alpha\text{-Zerfall}) = 10^9 \text{ a}$

4.2 Stoßinduzierte Spaltung

Spaltung wird durch Zuführen einer Stoßenergie, mit der die Spaltbarriere ΔE_{Spalt} überwunden wird, ausgelöst. Besonders effektiv ist der Beschuss mit Neutronen, da diese keine Coulomb-Barriere überwinden müssen. In manchen Fällen sind thermische Neutronen ausreichend. (Abb IX.11)



Unterschied zwischen (i) und (ii) ist Paarungsenergie:

(i) $u_g \rightarrow g_g$: es wird zusätzliche Energie frei

(ii) $g_g \rightarrow u_g$: Paarungsenergie wird zusätzlich benötigt.

Für Bsp (i) ist eine Kettenreaktion möglich (${}^{235}\text{U} + \text{therm. } n$).

4.3 Kernspaltung und Kernkraftwerke \rightarrow als Slides

Bei der obigen Spaltung von ${}^{235}\text{U}$ (i) werden im Mittel 2,3 „schnelle“ Neutronen mit mittlerer Energie von $\sim 2 \text{ MeV}$ frei.

Energiebilanz Q -Wert der Reaktion $\sim 204 \text{ MeV}$, $\sim 12 \text{ MeV}$ gehen als kinetische Energie von Neutronen verloren $\Rightarrow Q - E_{\text{kin}}(\nu) \approx 192 \text{ MeV}$
 als „therm. Energie“ nutzbar: $1 \text{ gU} \Leftrightarrow 2,55 \text{ MWh}$

Kettenreaktion

Die bei Spaltung ausgelösten ν Neutronen können durch verschiedene Reaktionen absorbiert werden und für weitere Reaktionen verloren gehen.

Für ^{238}U ist der WQ für inelastische Stoßprozesse $\sigma(n, n'\gamma)$ größer als der Spaltquerschnitt $\sigma(n, f) \rightarrow$ Kettenreaktion ist nicht möglich.

Kettenreaktion ist nur für therm. n und ^{235}U möglich. Das verlangt aber das Abbremsen = Moderation der Neutronen

(Bei Abbremsen in Natururan od. in angereichertem ^{235}U (3%) mit einem großen Anteil an ^{238}U durchläuft die Neutronen Energie zwischen 100... 1 eV für die der WQ $^{238}\text{U}(n, \gamma)$ sehr groß ist \Rightarrow starke Absorption)

\Rightarrow zum Abbremsen wird ein Moderator (\neq Uran) verwendet:

H_2O , D_2O , ^{12}C : D_2O bevorzugt da kurze Bremslänge aber groß Absorptions-
länge

Kritische Masse

In hochangereichertem ^{235}U oder ^{239}Pu ohne Fremdkerne die die Neutronen absorbieren kommt es bei genügend großer Masse (möglich kugelförmig) zu einer unkontrollierten Reaktion:

	kritische Masse (Kugel)	mit Reflexion durch Wasser
Uran-235	49 kg	23 kg
Pu-239	10 kg	5,4 kg

Reaktorbetrieb

effektive Vermehrungsfaktor k_{eff} für Neutronen

Zahl n in Generation $n+1$: $N_{n+1} = k_{\text{eff}} \cdot N_n$

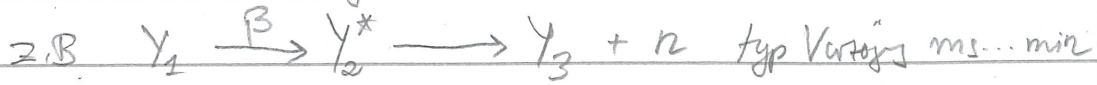
Mit typischer Zykluszeit $T \sim 1 \mu\text{s}$ zum Abbremsen = Zeit zw. Generationen

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k_{\text{eff}} - 1}{T} N \Rightarrow N(t) = N_0 \exp\left(\frac{k_{\text{eff}} - 1}{T} \cdot t\right)$$

Stationärer Betrieb eines Reaktors: $k_{\text{eff}} = 1$

Exponentielles Anwachs
 \rightarrow Bombe

k_{eff} bzw. Reaktivität $\rho = \frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}}$ kann mit Steuerstäben
 (Cd od B, mit großen Wk für n-Absorption) gesteuert werden.
 Hilfreich sind die verzögert entstehenden Neutronen.

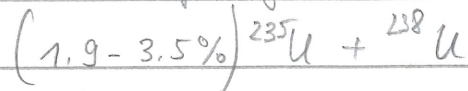


auch wenn der absolute Anteil nur $\sim 0,7\%$ ausmacht erlauben
 die verzögerten Neutronen eine Reaktorsteuerung

Reaktor aufbau

gängigster Typ ist D: Druckwasserreaktoren

Brennstoffmenge $\sim 100 \pm$ angeordnet U:



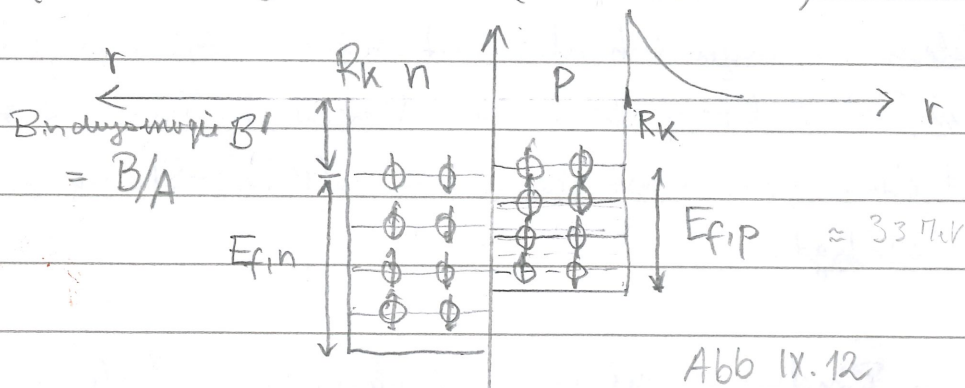
5. Fermi-Gas-Modell des Kerns

Tropfenmodell = Modell stark miteinander WW Nachbarn.

Eine Reihe von Kerneigenschaften lassen sich besser durch Modell von ^{einzelner} unabhängigen Teilchen im "effektiven Potential" der anderen Teilchen beschreiben.

Einfachster Ansatz zur Beschreibung der Nukleonen:

- Kern = Fermi-Gas freier Nukleonen, die sich innerhalb einer Kugel mit Radius $R_K = R_0 \cdot A^{1/3}$ bewegen.
- Protonen und Neutronen unterliegen der Pauli-Regel
- Beschreibung durch je einen Potentialtopf für Neutronen (nur starke WW) und Proton (e.m. + starke WW):



Die Temperatur des Fermi-Gases wird so niedrig angenommen, daß alle Fermionen die niedrigsten Energiestände bis zur Fermi-Energie E_F besetzen = "entartetes Fermi-Gas".

Zur Berechnung der Fermi-Energie muß die Zustandsdichte und die Zahl der Nukleonen berücksichtigt werden. Die Zustandsdichte ergibt sich aus dem 6dim-Phasenraum:

→ Zahl der Zustände dn für Nukleonen mit $p \in [p, p+dp]$:

$$dn = \frac{V \cdot 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \quad \leftarrow \text{Vol.} \times \text{3-dim Impulskegel}^{\otimes}$$

$$\begin{aligned} \otimes \quad p^2 dp d\Omega &= p^2 dp d\varphi d\theta \sin\theta \\ &= 4\pi p^2 dp \end{aligned}$$

→ Gesamtzahl der Nucleonen mit $p < p_F = \sqrt{2mE_F}$

$$N_{\text{Nucleon}} N' = \frac{V \cdot 4\pi \int_0^{p_F} p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \times 2 \Rightarrow N, Z = \frac{V (p_F^{n,p})^3}{3\pi^2 \hbar^3}$$

↖ unterschiedl. Spino

Mit $R_K = R_0 A^{1/3}$ ergibt sich $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \cdot A$.

Für symmetrische Kerne $Z=N=\frac{A}{2}$ ergibt sich dann für $p_F^{n,p}$:

$$p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \approx 250 \text{ MeV/c}$$

bzw $E_F^{n,p} = \frac{(p_F^{n,p})^2}{2m_{n,p}} \approx 33 \text{ MeV}$ (Ermessung: Unschärfenrelation → $\sim 200 \text{ MeV/c}$ für $R_K \approx 1 \text{ fm}$)

Bem.: Nucleonen bewegen sich also mit relativ großem Impuls frei im Potentialtopf des Kerns: Berechnete Fermi-Impuls wird durch quasi-elastische e-Nucleon(Kern)-Streuung in der Tat bestätigt.

Mit der mittleren Bindungsenergie eines Nucleons von $\sim 8 \text{ MeV}$ ergibt sich für die Potentialtopf-Tiefe V_0 :

$$V_0 = E_F + B' \approx 33 \text{ MeV} + 8 \text{ MeV} = 41 \text{ MeV}$$

Mittlere kinetische Energie eines Nucleons: $\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_{\text{kin}} p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m} \approx 20 \text{ MeV}$

Gesamt kin. Energie $E_{\text{kin}}(N, Z) = N \langle E_{\text{kin}}^n \rangle + Z \langle E_{\text{kin}}^p \rangle = \frac{3}{10m} (N(p_F^n)^2 + Z(p_F^p)^2)$

Berücksichtigt man die obigen Ausdrücke für $p_F^{n,p}$: → E_{kin} minimum bei $N=Z$ (bei festem A, → Bindungsenergie max)

$$E_{\text{kin}}(A, Z) = \frac{3}{10m} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \left(A + \frac{5}{9} \frac{(N-Z)^2}{A} + \dots \right)$$

≙ Asymmetrie-Term der Massenformel aufgrund des Neutronenüberschusses

6. Schalenmodell der Kerne

{ M. Göppert-Mayer*¹ + H. J. W. + H. J. W. + H. J. W.*¹
+ O. Haxel, H. Suess, Nobelpreis 1963

Um Kerneigenschaften wie Spin und Parität sowie Energie angeregter Kernzustände zu verstehen muß man eine Schrödinger-Gl. für die einzelnen Nukleonen im effektiven Potential der anderen Nukleonen lösen.

→ Empirische Evidenz für eine Schalenstruktur ähnlich wie bei Atomen

- (i) Kernspektroskopie zeigt Anregungszustände der Kerne, die unter Aussenden von γ -Quanten zerfallen
- (ii) Nuklide mit magischen Zahl (2, 8, 20, 28, 50, 82) von Protonen und Neutronen sind besonders stabil \rightarrow deutet auf eine „stabile“ abgeschlossene Schale hin (wie bei Edelgasen): große Energie Nukleon aus Kern zu lösen, für $A+1$ -Kerne hingegen wird nur wenig Energi gebraucht.

Abb. : Magische Zahlen: ${}^4_2\text{He}_2$, ${}^{16}_8\text{O}_8$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$, ${}^{48}_{20}\text{Ca}_{28}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$

Um die Schalenstruktur zu verstehen, muß die Schrödinger-Gl. gelöst werden, wobei man verschiedene Ansätze für das radial-symmetrische Potential eines einzelnen Nukleons im effektiven Potential der Rest-Nukleonen machen kann.

↳ Für radial symmetr. Potentialansatz kann man die Nukleonwellenf. in Radialteil $R_{nl}(r)$ und in Winkelanteil $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ zerlegen \rightarrow Energieeigenwerte E_{nl} , Parität $= (-1)^l$

6.1 Potentialansätze und magische Zahlen

Aufgrund der kurzreichweitigen Kernkräfte sollte Potential in etwa der Dichteverteilung der Nukleonenverteilung folgen

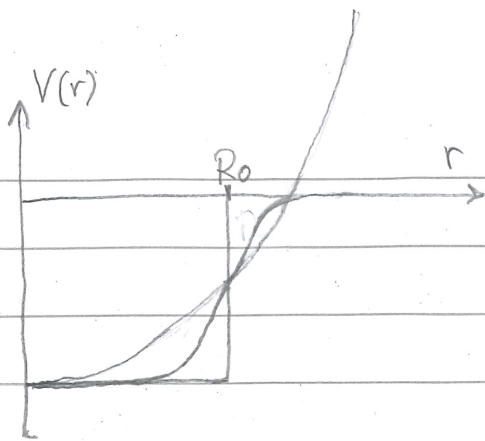


Abb IX.13

- Kastenpotential
- Woods-Saxon-Potential

$$V(r) = -V_0 \left(1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right) \right)^{-1}$$

- harmonisches Potential (Parabel):
gute Näherung für „gaußförmige“ leichte Kerne

Harmonisches Potential:

Am einfachsten zu berechnen ist der 3dim. Oszillator:

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \quad (\text{mit } \hbar \omega_0 \approx 41 \text{ MeV}^{-1/3})$$

↳ Energieeigenwerte: $E_N = (N + \frac{3}{2}) \hbar \omega_0 = (N_x + \frac{1}{2} + N_y + \frac{1}{2} + N_z + \frac{1}{2}) \hbar \omega_0$ Kartesisch

mit $N, N_x, N_y, N_z = 0, 1, 2, \dots$

$= E_{nl} = (2(n-1) + l + \frac{3}{2}) \hbar \omega_0$ mit $\begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots \\ l = 0, 1, 2 \end{cases}$ Radiale
Wellenzahl

nl -Entartung: $(2,0); (1,2)$

⇒ Schalenstruktur unter Berücksichtigung der Entartung

N	n	l	Orbitale	P	# Nukleonen n_{nl}	$\sum E \leq E_{nl}$	$\sum \text{ohne } (n,l)$	Entartung
0	1	0	1s	+	2	2	2	
1	1	1	1p	-	6	8	8	
2	1	2	1d	+	10	20	18	
		0	2s	+	2		20	
3	1	3	1f	-	14	40	34	
		1	2p	-	6		40	

Abb IX.14

Man erhält eine Schalenstruktur, die aber nicht den beobachteten magischen Zahlen $(2, 8, 20, 28, 50, 82, 126)$ entspricht.

Die hier beobachtete „dynamische“ ^{nl}Entartung des 3Dim. harmon.

Oszillators (z.B. 2s und 1d) ist eine spezielle Eigenschaft dieses

Potentials. In realistischeren Potentialen → Aufhebung der (n,l) Entartung.

Woods-Saxon Potential, Kastenpotential

(n, l) Entartung wird aufgehoben:

Aber auch mit diesen Potentialansätzen können die magischen Zahlen nicht erklärt werden \rightarrow s. Tabelle (Abb IX. 14)

siehe auch: [unreadable] : Vergleich mit [unreadable]

6.2 Spin-Bahn-Kopplung:

Bei Streu-Experimenten findet man, daß der Nukleon-Spin eine wichtige Rolle spielt. Konsequente Weise sollte man den Nukleon-Spin auch bei der Beschreibung des Kerne berücksichtigen. Hierzu führt man wie bei Atomen eine Spin-Bahndrehimpuls-Kopplung mit einem zusätzlichen $\vec{l}\vec{s}$ -Term im Potential ein:

$$V(r) = V_{\text{zentr}}(r) + V_{\text{es}}(r) \cdot \frac{\langle \vec{l}\vec{s} \rangle}{\hbar^2}$$

Die Kopplung von Spin \vec{s} und Bahndrehimpuls \vec{l} eines Nukleons führt zu Gesamtdrehimpuls \vec{j} mit $j = l \pm \frac{1}{2}$ und Erwartungswert

$$\frac{\langle \vec{l}\vec{s} \rangle}{\hbar^2} = \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{(l+1)}{2} & \text{für } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

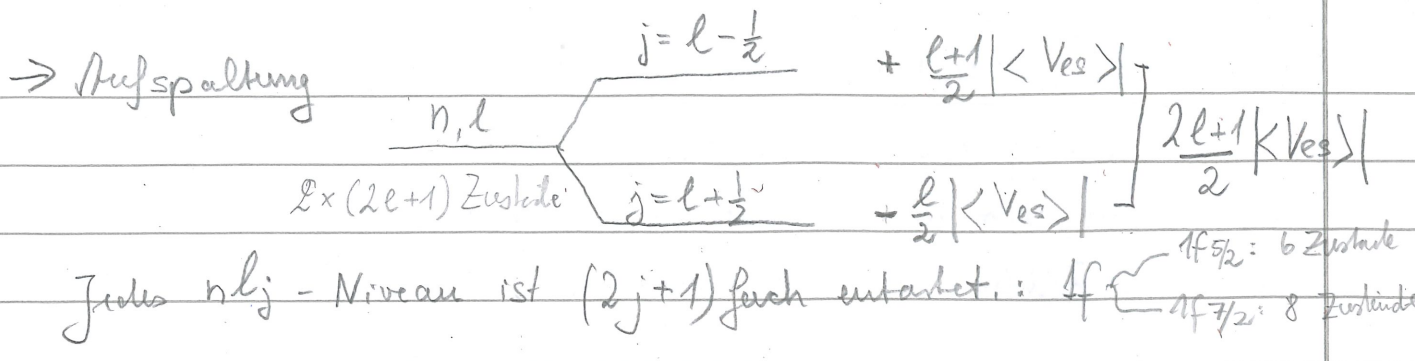
(siehe Kap 1)

Der zusätzliche Potentialterm führt zu einem Energieaufspalt ΔE_{es} abhängig vom Drehimpuls l : $\Delta E_{\text{es}} = \frac{2l+1}{2} \langle V_{\text{es}}(r) \rangle$

(V_{es} muß separat für jede n, l bestimmt werden)

Eine Analyse der beobachteten Kernstruktur ergibt:

- 1) Term $V_{\text{es}}(r)$ ist von ähnlicher Größe wie E_{ne}
- 2) $\langle V_{\text{es}}(r) \rangle$ ist negativ



Die mit diesem zusätzlichen V_{so} -Term berechneten Energieniveaus sind in Abb. IX.15 gezeigt. Man findet, dass sich die magischen Zahlen durch die so berechneten Energieniveaus ergeben.

Während die ls -Kopplung in Atomen eine kleine Korrektur verursacht (Feinstruktur, $\propto \alpha^2$), bewirkt der entsprechende Spin-Bahn-Term des Kernpotentials eine große Energienspaltung, was historisch eine Überraschung war → Abb IX.15+16.

Besetzungsregeln: (1) niedrigste freie Niveaus (2) seltige Spins ab (Paarungssystem)

6.3 γ -Strahlung → Abb. IX.17

Angeregte Kernzustände (= 1 Nukleon in einem angeregten Zustand) zerfallen unter Emission von e.m. Strahlung. Hierbei sind verschiedene Multipolübergänge mit sehr verschiedenen Winkelverteilungen möglich, wobei sich der Gesamtspin und die Parität des Kerns entsprechend ändert:

Multipol	elektromagnetische		magnetische			
	E_l	$ \Delta J $	ΔP	M_l	$ \Delta J $	ΔP
Dipol	E_1	1	-	M_1	1	+
Quadrupol	E_2	2	+	M_2	2	-

$\Delta P = (-1)^l$ $\Delta P = (-1)^{(l+1)}$

[Bem: Stärke von M_l Übergängen \propto Stärke von E_{l+1}]

Kontinuierliche Zustände → Abb. IX.18

Bei γ -Absorption mit $E_\gamma > 8 \text{ MeV}$ (typ. Bindungsenergie $\sim 8 \text{ MeV}$) können Nukleonen aus dem Kern entfernt werden (vornehmlich Neutronen, keine Coulomb-Barriere).
 Im Bereich oberhalb dieser Schwelle gibt es aber noch immer quasi-gebundene Zustände: Lebensdauer sehr kurz → sehr große Energiebreite → Überlappung der Zustände = Kontinuum quasi-gebundener Zust.