

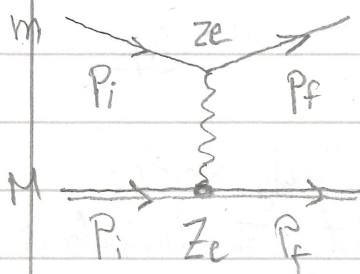
Streuexperimente und ihre Interpretation sind Schlüssel zu Struktur von Kernen und Nukleonen (Protonen).

1. "Rutherford-Streuung" an punktf. Ladungsverteilungen.

H. Geiger et al., 1909-1913 s. ABG VI. 1: $\alpha \rightarrow$ Goldfolie

Frage: Warum hat Rutherford aufgrund der Resultate geschlossen, daß Kerne punktf. sind? Was würde man für ausgehakte Kerne erwarten?

1.1 Theoretische Behandlung: elastische Streuung eines "leichten" spinlosen Teilchens mit Lad. ze am schwerem (ruhmndm) "spinlosen" Streuzentrum Ze.



Übergangsampl.: $A_{fi} = \frac{zeze}{q^2} \cdot \frac{(\hbar c)^3}{c^2}$ (s. III.5)

bzw $|A_{fi}|^2 = \left(\frac{zZ\alpha}{q^2}\right)^2 (4\pi)^2 \frac{(\hbar c)^6}{c^4}$ (hier keine spins!)

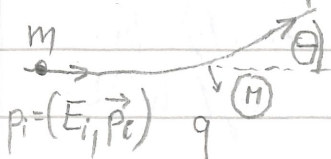
$e^2 = \alpha \cdot 4\pi$

M.1 der WD-Formel aus Kap. III.4:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\hbar c)^4} \frac{|\vec{p}_f|^2 c^2}{\beta_i \beta_f} \left\{ \left(\frac{zZ\alpha}{q^2}\right)^2 (4\pi)^2 \frac{(\hbar c)^6}{c^4} \right\} \sim \frac{1}{q^4}$$

\vec{p}_f bzw. $|\vec{p}_f|$

Kinematik: q^2 für elastische Streuung



$$q^2 = (p_i - p_f)^2 = (E_i - E_f)^2 - (\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2$$

$$= -(\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2 = -\vec{q}^2 < 0$$

$$= -4|\vec{p}_f|^2 \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

für $M \gg m$: Rückstoß vernachl. bar.

$E_i = E_f$ (elast.)

$|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$ bzw. $\beta_i = \beta_f$

bzw. $|\vec{q}| = 2|\vec{p}_f| \sin \frac{\theta}{2}$

(\rightarrow Übergangsaufgabe)

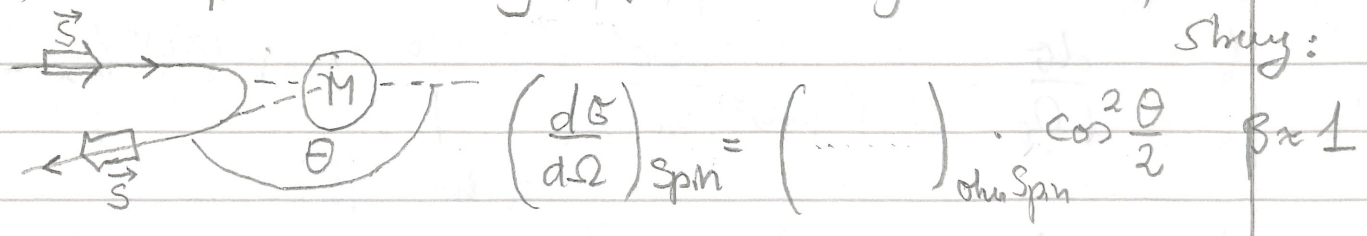
Mit $\beta_i = \beta_f$ folgt für $\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{q^4} \approx \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$ und mit

"Rutherford Streuformel"	$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{16 E_{kin}^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot (\hbar c)^2$	} Nicht relativistisch } $p\beta c = 2E_{kin}$
	$\frac{d\sigma}{d\Omega_{Rutherford}} = \frac{z^2 Z^2 \alpha^2}{4 E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot (\hbar c)^2$	

- Bem.:
- 1) endl. Wahrscheinlichkeit für Rückwärts-Streuung
 - 2) für kleine Streuwinkel $\theta \rightarrow 0$ ($q \rightarrow 0$): $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ steigt an.
Allerdings: in Realität max. Stoßparameter \rightarrow mindest $q!$
 - 3) Stoßpartner erscheint so lange phyt. wie $\lambda = \frac{\hbar}{|p|} > R_{Strahl}$.

1.2 Streuung von Spin-1/2 Teilchen (z.B. e^-) (= Mott-Streuung)

(Bisher wurde Spin des Projektil nicht berücksichtigt.) Häufig werden Streuexperimente mit Elektronen ($s = \frac{1}{2}$) durchgeführt. Für hochrelativistische Teilchen ($\beta \rightarrow 1$) ist die Helizität = Projektion des Spins auf die Bewegungsrichtung des Teilchens eine Erhaltungsgröße ($H = \frac{\vec{S}}{\hbar} \cdot \vec{\beta}$)
 \rightarrow Drehimpuls erhalten + Helizität erhalten unterdrückt Rückwärts-Streuung:



Für den Fall $\beta < 1$ ist die Spinausrichtung (Helizität) keine erhaltene Observable. Man erhält dann für diff. WQ:

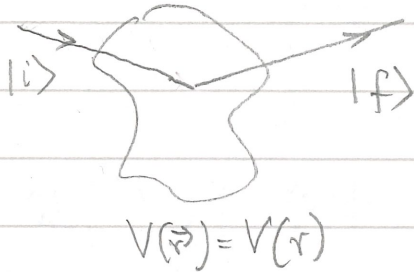
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Mott-Streuformel beschreibt Streuung phyt. Spin-1/2 Teilchen am punktf. Spin-0 Target.

1.3 Nachtrag: Feynman-Propagator $\frac{1}{q^2}$ und WW-Potential 95

Propagator $\frac{1}{q^2}$ wurde in der Vorlesung ad-hoc und ohne Bezug zum WW-Potential eingeführt. Man findet aber dass das $\frac{1}{q^2}$ Prop. die Fourier-Trf. eines $1/r$ Potentials im Impulsraum ist.

Streuung an stationärem sphärisch symmetr. Potential



Born'sche Näherung:

Ein- und Auslaufende Teilchen werden durch Wellenfkt. des freien Teilchens beschrieben

$$\psi_{i,f} = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_{i,f} \vec{r} - E_{i,f} t)\right)$$

Übergangsamplitude: $A_{fi} = \langle f | V(r) | i \rangle = \iint \psi_f^* V(r) \psi_i d^3r dt$

$$= \frac{1}{V} \int \int_V \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_f \vec{r} - E_f t)\right) V(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_i \vec{r} - E_i t)\right) dt d^3r$$

Zeitintegration liefert $\delta(E_f - E_i) = \text{Energieerhaltung}$

$$\Rightarrow A_{fi} \sim \int V(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_i - \vec{p}_f) \cdot \vec{r}\right) d^3r$$

$$\sim \int V(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}\right) d^3r$$

d.h. A_{fi} ist in der Tat die Fourier-Trf. von $V(r)$ im Impulsraum \vec{q} .

Für $V(r) = \frac{C}{r}$ findet man $A_{fi}(\vec{q}^2) \sim \frac{C}{|\vec{q}|^2} \Rightarrow \text{Propagator}$

$$\left(\text{Für } V(r) = \frac{C}{r} e^{-r/a} \Rightarrow A_{fi}(\vec{q}^2) \sim \frac{C}{\vec{q}^2 + (\hbar/a)^2} \right)$$

Potential mit Dämpfung!

9. Streuung an ausgedehnten Ladungsverteilungen und Kernstruktur 96

Kernstruktur

2.1 Ausgedehnte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = e f(\vec{r})$

$$V(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

Erinnerung: elektr. Potent. $\phi(\vec{r})$

$$V(r) = e \phi(\vec{r})$$

$$\Delta \phi = -\rho(\vec{r})$$

Mit elektr. Potential und Green'schem Theorem
 für skalare Felder u, v : $\int (u \Delta v - v \Delta u) d\vec{r} = 0$
 wenn $\Delta e^{i\vec{q}\vec{r}} = -\vec{q}^2 e^{i\vec{q}\vec{r}}$ folgt:

$$A_{\vec{r}} = \int V(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r}$$

$$= \int \phi(\vec{r}) (-\vec{q}^2 e^{i\vec{q}\vec{r}}) d\vec{r}$$

$$= \int \Delta \phi(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r}$$

$$= -\frac{e\hbar^2}{\vec{q}^2} \int \Delta \phi(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r}$$

$$= +\frac{e\hbar^2}{\vec{q}^2} \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r} = \frac{e^2 \hbar^2}{\vec{q}^2} \int f(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r}$$

$$= \frac{e^2 \hbar^2}{\vec{q}^2} F(\vec{q}) \quad \leftarrow \rho(\vec{r}) = e f(\vec{r}) \text{ mit } \int f(\vec{r}) d\vec{r} = 1$$

ursprüngliche
Amplitude

mit $F(\vec{q}) =$ Fourier Trf der Ladungsverteilung $f(\vec{r})$
 $=$ Formfaktor

für kugelsymmetr. Ladungsverteilung: $F(\vec{q}) = F(\vec{q}^2)$

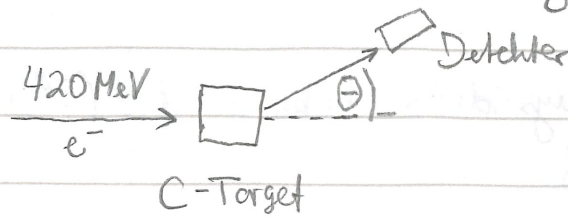
Für den WR der Streuung eines phtf. Teilchens an einer kugelsymmetr. Ladungsverteilung $\rho(r)$ erhält man:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{phtf.}} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2$$

Bem: (1) $|F(\vec{q}^2)|^2 < 1$, d.h. WR ist immer kleiner als phtf. WR

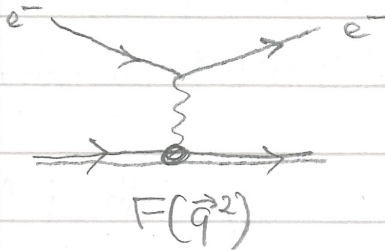
(2) für kleine $\vec{q}^2 \rightarrow$ ausgetauschtes Photon hat große Wellenlänge (Born Streuung nicht anwendbar): $|F(\vec{q}^2)|^2 \rightarrow 1$

2.2 Elektron-Kern-Streuung:

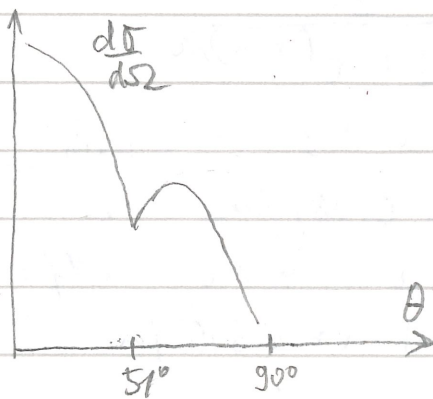


Hofstadter 1957

Stanford 500 MeV Linear beschl.
s. Abb. VI. 2a + 2a



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Moh} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2$$



Aus diff. Wkt lässt sich $|F(\vec{q}^2)|^2$ bestimmen.
Aber, eine einfache Rücktransformation zur Ermittlung der Ladungsverteilung ist nicht möglich:

- (1) $|F(\vec{q}^2)|^2$ wird nicht für alle \vec{q}^2 gemessen (fällt für ausgehende Kerne für groß \vec{q}^2 stark ab)
- (2) Man braucht auch die Phase (für Kugelsymmetrie ist $F(\vec{q}^2)$ reell!)

Stattdessen benutzt man Modellansätze zur Beschreibung von $\rho(r)$. Die Fourier-Trf des Modells wird dann an die Daten angepasst.

Beispiele (s. a. Abb 3a und 3b)

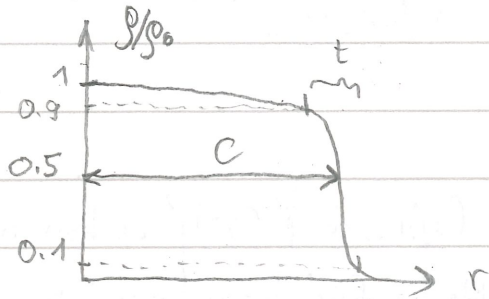
Ladungsverteilung $\rho(r)$	Formfaktor $F(\vec{q}^2)$
$\frac{\rho(r)}{4\pi}$	konst = 1
$\left(\frac{a^3}{8\pi}\right) \cdot \exp(-ar)$	Dipolform $\left(1 + \frac{\vec{q}^2}{a^2 \hbar^2}\right)^{-2}$
$\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{a^2 r^2}{2}\right)$	Gauß $\sim \exp\left(-\frac{\vec{q}^2}{2a^2 \hbar^2}\right)$
Harte Kugel $\begin{cases} C & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$	oszillierend $\alpha = \frac{ \vec{q} R}{\hbar}$ $3\alpha^{-3}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$

2.3 Ladungsverteilung von Kernen:

98

[Exp. Schwierigkeit: Je größer Modellierung desto stärker fällt $|F(\vec{q}^2)|^2$ für große Winkel (große \vec{q}^2) ab.]

Für eine Vielzahl von Kernen wurde Ladungsverteilung bestimmt: Ausgedehnte Kerne werden gut durch "Fermi-Verteilung" beschrieben



Radiale Ladungsverteilung: Abb. VI.4

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-c)/a}}$$

(weicher Rand)

im Poise

$$c = \text{Halbdichte Radius} \approx (1.18 A^{1/3} - 0.48) \text{ fm} \approx 1.07 A^{1/3} \text{ fm}$$

$$t = \text{Oberflächendicke (10\%-90\%)}: 4 \ln 3 \cdot a = 4.4 a \approx 2.4 \text{ fm}$$

(bei großen Kernen etwa gleich dick) mit $a \approx 0.545 \text{ fm}$

Für mittlere und große A findet man näherungsweise für mittlere quadratischen Radius der Ladungsverteilung:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 0.94 \cdot A^{1/3} \text{ fm} \quad (\text{siehe Kap II.4})$$

Oft werden Kerne auch näherungsweise durch Kugel mit "hartem Rand" beschrieben, für die $\langle r^2 \rangle$ gegeben ist durch:

$$\langle r^2 \rangle_{\text{hart}} = \int_0^R r^2 \rho(r) dr = 4\pi \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5} R^2$$

Bem.: $\rho(r)$ auf 1 normiert $\frac{1}{V_{\text{Kugel}}}$ Dichte homogener Kugel

$$\text{für } \langle r^2 \rangle_{\text{hart}} = (0.94 A^{1/3} \text{ fm})^2 \Rightarrow R_{\text{hart}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot 0.94 A^{1/3} \text{ fm} = 1.2 A^{1/3} \text{ fm} \quad (\text{S. II.1})$$

Bewertungswert des harten Kugel soll gerade $\langle r^2 \rangle$ für reale Kerne sein.

Bem.: Für Nukleondichte von Kernen findet man durch:

$$\rho_N = 0.17 \text{ Nukleon/fm}^3$$

(Nukleondichte erhält man aus ρ_0 durch Multiplikation mit $A/2$)

3. Struktur der Nukleonen (Proton und Neutron)

99

In diesem Abschnitt nur elastische Elektron-Nukleon-Streuung.

3.1 Nukleon Spin und magnetisches Moment.

p und n haben Spin $\frac{1}{2}$ und "anomale" magnetische Momente die vom magnetischen punktf. Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen: $g = 2 + \mathcal{O}(\alpha)$ abweichen \rightarrow "innere Struktur" der Nukleonen. $\mathcal{O}(\alpha)$

Magnet. Moment von Nukleon N: $\vec{\mu}_{p,n} = g_{p,n} \mu_N \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar}$ mit $m_s = \pm \frac{1}{2}$
wobei μ_N (häufig auch μ_K) als Nukleon od. Kern-Magneton bezeichnet wird:

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_N} \approx 3.15 \cdot 10^{-14} \frac{\text{MeV}}{\text{T}} \approx 1/2000$$

(Vergleich Bohrmag. $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 5.79 \cdot 10^{-11} \frac{\text{MeV}}{\text{T}}$ für Elektronen)

$$\mu_p = g_p \cdot \mu_N \cdot m_s^p = \pm \frac{g_p}{2} \mu_N = \pm 2.79 \mu_N \text{ mit } g_p = 5.58$$

$$\mu_n = g_n \cdot \mu_N \cdot m_s^n = \pm \frac{g_n}{2} \mu_N = \mp 1.91 \mu_N \text{ mit } g_n = -3.82$$

3.2 Elektronstreuung am "punktf." Spin $\frac{1}{2}$ Protonen

\rightarrow Hypothetisch: punktf. $\Rightarrow g_p = 2 + \mathcal{O}(\alpha)$

Neben der elektr. WW sowie des Effektes der Unterdrückung der Rückwärtsstreuung aufgrund der Helizitätserhaltung bei relativistischen Teilchen kommt es aufgrund des magn. Moments zu einer Spin-Spin WW

Für hochrelativistische Elektronen: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{Mott}}} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Spin-Spin}}$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dipol-WQ}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2M_p^2 c^2} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Helizitätserhaltung Spin-Spin WW \rightarrow Spin-Flip
 \rightarrow erhöht Rückwärtsstreuung

(mit $Q^2 = -q^2$)

1) Tw Streuung ist $q^2 = (p_e - p_e')^2 < 0$ deshalb führt man die Variable $Q^2 = -q^2 > 0$ ein.

2) Spin-Spin WW:

$$\bullet \sim \frac{1}{M^2} \text{ wg. } \sigma \sim |\mathbf{A}_H|^2 \sim N_{Maj}^2 \sim \frac{1}{M^2}$$

$\bullet \sim Q^2 \rightarrow$ Spin-Spin^{WW} fällt stark mit Abstand (Stoßparameter) ab
 \rightarrow kleiner Stoßparameter \rightarrow hohes $Q^2 \rightarrow$ großer Effekt

benutzt man den Mott-WQ (Spin $\frac{1}{2}$ e^- am spinlosen pfl. Proton)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Dirac} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left(1 + 2\tau \cdot \tan^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

mit $\tau = \frac{Q^2}{4M_p^2 c^2}$

Der Dirac-WQ ist größer als Mott-WQ (zusätzlicher Effekt)!

Bisher wurde der Rückstoß nicht berücksichtigt. Bei der Elektron-Proton-Streuung spielt Rückstoß aber eine wichtige Rolle und kann nicht mehr vernachlässigt werden:
 $E = E_{yini} e^-$ vor Stoß $\neq E' = E_{yfin} e^-$ nach Stoß.

WQ mit Rückstoßkorrektur (gilt auch schon für Rutherford-Formel):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rückstoß}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott ohne Rückst.}} \cdot \left(\frac{E'}{E}\right) \cdot \left(1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

~
Rückstoß
Korrektur

3.3 Elektron-Proton-Streuung für „ausgedehnte“ Protonen ($g_p \neq 2$)

Es müssen 2 Formfaktoren $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ eingeführt werden, die die elektr. und magnet. Ausdehnung beschreiben.

(naiv würde man die Formfaktoren vor den beiden Termen erwarten \rightarrow nur für klein Q^2)

Rosenbluth-Formel für WQ :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot \left[\underbrace{\frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau}}_{A(Q^2)} + 2\tau \underbrace{G_M^2(Q^2)}_{B(Q^2)} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

Zur Interpretation von G_E und G_M betrachtet man kleine $Q^2 \approx -|\vec{q}|^2$

$$G_E(Q^2) \approx G_E(\vec{q}^2) = \int e^{i\vec{q}\vec{r}} \rho(\vec{r}) d\vec{r} \quad \text{mit} \quad \int \rho(\vec{r}) d\vec{r} = 1$$

$$G_M(Q^2) \approx G_M(\vec{q}^2) = \int e^{i\vec{q}\vec{r}} \frac{\mu(\vec{r})}{\mu_N} d\vec{r} \quad \text{mit} \quad \int \frac{\mu(\vec{r})}{\mu_N} d\vec{r} = +2,79$$

Für $Q^2 \rightarrow 0$: $G_E^p(0) = 1$ $G_M^p(0) = +2,79 = g_p/2$ (Proton)
 $G_E^n(0) = 0$ $G_M^n(0) = -1,91 = g_n/2$ (Neutron)

\cong „Punktf.“ Proton (Neutron) mit anomalem magnet. Moment, $g_p \neq 2$

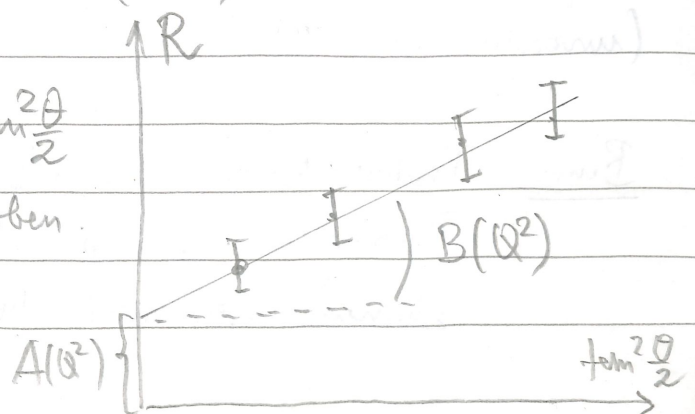
\rightarrow Bei hohem (niedrigem) Q^2 ist G_M^2 ($G_E^2 \cong |F(\vec{q}^2)|^2$) relevant.

(Abb VI.5 Rosenbluth Streuung)

Um $G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ separat zu bestimmen, wird der WQ für feste Werte von Q^2 aber bei verschiedenen Streuwinkeln, d.h. für verschiedenen Elektronenenergien E' , gemessen; Abb (VI.6)

$$R = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}} = A(Q^2) + B(Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

A und B = s. oben.



Messungen wurden erstmalig von Hofstadter und McAlister 1956 in Stanford mit 180 MeV Elektronenstrahl durchgeführt.

Resultate: s. Abb. VI. 5, 6, und 7

(1) Formfaktoren gehorchen der Skalierung

$$G_E^p(Q^2) = \frac{G_M^p(Q^2)}{+2,79} = \frac{G_M^n(Q^2)}{+1,91} \quad G_E^n(Q^2) \approx 0$$

d.h. „elektrische“ und „magnet.“ Ausdehnung von Proton und Neutron sind gleich.

(2) Formfaktoren lassen sich durch Dipolform beschreiben:

$$G(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0,71^2 (6 \text{ eV}/c)^2} \right)^{-2}$$

↔ entspricht der Fourier-Trf. einer exponentiellen Dichteverteilung.

$$\hat{\rho}(r) = \rho \cdot e^{-ar} \quad \text{mit } a = 4,27 \text{ fm}^{-1}$$

(3) → Mittlerer quadratischer Radius des Protons/Neutrons:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{12}{a^2} = 0,66 \text{ fm}^2$$

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 0,81 \text{ fm} \quad \text{für die Stanford Exp.}$$

$$\approx 0,88 \text{ fm} \quad \text{Nachfolge Experimente}$$

Neueste Resultate zeigen daß (1.) Formfaktoren von exakter Dipolform abweichen und (2.) bei hohen Q^2 auch magnet. und elektr. Formfaktoren voneinander abweichen. (unverstanden)

Bem.: Proton - Radius Paradox

Protonradius aus ep Streuung und R_p aus Myonum Spektroskopie stimmen derzeit nicht überein.