

8. Symmetrien und Erhaltungssätze

Der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen wurde zuerst von Emmy Noether 1918 erkannt (Noether-Theorem)

"die Invarianz der Wirkung unter einer euklischen stetigen Transformationsgruppe hat die Existenz einer Erhaltunggröße zur Folge und umgekehrt hat jede Erhaltunggröße die Existenz einer Symmetrie (unidestius infinitesimal) in Wirkung zur Folge."

sowohl im Lagrangian wie im Hamilton formalismus mögl., also sowohl für klassische wie auch Quantensysteme, hier nur letzteres

8.1 Allgemeine Betrachtungen

Operator Q entspricht einer physikalischen Observable wenn $\langle Q \rangle$ reell, d.h. Operator Q auf \mathcal{H} hermitesch sein: Q^* adjungiert Operator gleich Q ($Q_{ki}^* = Q_{ik}$)

Observable erhalten wenn $\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = 0$

Zeitentwicklung des Erwartungswerts durch Erhaltungstheorem gegeben:

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [Q, H] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle (QH - HQ) \rangle$$

davon ist Observable Q erhalten wenn der entsprechende Operator mit dem Hamiltonoperator des Systems kommutiert. $[Q, H] = 0$

Gegenfunktionen von H können so gewählt werden, dass sie auch Gegenfunktionen von Q sind

Solche durch \hat{Q} ^{bzw.} generierten infinitesimalen Transformationsoperatoren definieren eine Symmetrie.

Z.B. Generator der Rotation: Drehimpuls

"

Translation: Impuls (siehe unten)

Eine Symmetrioperation sei definiert durch einen Operator U : $\psi'(\vec{r}, t) = U \psi(\vec{r}, t)$

Normalisierung der Wellenfunktion um β geschieht
sein, d.h. Operator U muss unitär sein

$$U^\dagger = U^{-1} \quad U^\dagger U = U U^\dagger = I \quad (\text{Einheitsmatrix})$$

U ist ein Symmetrioperator, wenn $U\psi$ dieselbe Schrödinger-Gleichung erfüllt wie ψ . Das ist der Fall, wenn U mit dem Hamiltonoperator des Systems kommutiert $[H, U] = (HU - UH) = 0$
- damit schließt sich der Kreis

2 Möglichkeiten

a) wenn U auch hermitesch, dann gibt es eine entsprechende erhaltene Observable

i) wenn U nicht hermitesch, kann es einen hermiteschten Operator (Generator) F geben, so daß $U = \exp(i\varepsilon F)$ für Transformation ε

für klein ε :

$$U\psi = \exp(i\varepsilon F)\psi = (1 + i\varepsilon F + \frac{(i\varepsilon F)^2}{2!} + \dots) \psi$$

dann ist Erwartungswert von F erhalten und F ist Generator der Sym. operation U .

(beweise: $U^\dagger U = \exp(i\varepsilon F^\dagger) \exp(i\varepsilon F) = \exp(i\varepsilon(F - F^\dagger)) = 1$
da F hermitesch)

die 2 Möglichkeiten entsprechen 2 Typen von Transformationsoperationen und Erhaltungssätzen

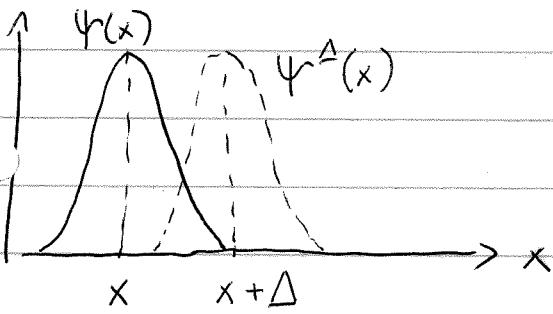
b) kontinuierliche Transformationen: U setzt kontinuierlich in Einheitsoperat. über
(Translation, Rotation, ...) → führen zu additiven Erhaltungssätzen

a) diskontinuierliche Transformationen: immer diskrete Zustände, z.B. Faltung von ψ mit U unitär und hermitesch $U^2 = UU^\dagger = UU^{-1} = I$
→ führen zu multiplikativen Erhaltungssätzen

- Wicklungsfreiheit: Addition im Exponenten \equiv Multiplikation, (Für Fall b)

• Translation als Beispiel kontinuierlich Transformation: U^Δ verschiebe Teilchen um Δ in x
 $U^\Delta \psi(x) = \psi^\Delta(x)$

Translationsinvarianz: $\psi^\Delta(x + \Delta) = \psi(x)$



Δ kann sehr klein gemacht werden und $\psi^\Delta(x + \varepsilon)$ kann dann um x expandiert werden

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi^\Delta(x + \varepsilon) = \psi^\Delta(x) + \varepsilon \frac{d\psi^\Delta}{dx} + \dots \\ &\approx (1 + \varepsilon \frac{d}{dx}) \psi^\Delta(x) \\ &= (1 - \varepsilon P_x/i\hbar) \psi^\Delta(x)\end{aligned}$$

erstelles Δ durch n Schritte ε , $\Delta = n\varepsilon$

$$\psi^\Delta(x) = (1 + \Delta \frac{P_x}{i\hbar}) \psi(x) \quad (\text{welt von links mit } 1 - \frac{\Delta P_x}{i\hbar} \text{ und vernachlässigt } \Delta^2 \dots)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \varepsilon \frac{P_x}{i\hbar}\right)^n \psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \Delta \frac{P_x}{i\hbar} \cdot \frac{1}{n}\right)^n \psi(x)$$

$$= \underbrace{\exp\left(-\frac{i\Delta P_x}{\hbar}\right)}_{U^\Delta} \psi(x) \quad U^\Delta = \exp(i\Delta F) \quad \sim F = -\frac{P_x}{\hbar}$$

Translation ausw. berücksichtigt Impulsenergiie

8.2 Additive Erhaltungssätze

- elektrische Ladungserhaltung: wurde bereits 1941 von Pauli mit der Gleichverteilung der elektromagnetischen WW (keine absolute Skala für Potential) verknüpft, bei zugleich unendlicher Reichweite (Rev. Mod. Physics 13, 1941) 203)

$$\boxed{\sum q_i = \text{konstant}}$$

"experimentelle Tests": $e \rightarrow \nu \gamma$ wäre durch alle anderen Erhaltungssätze erlaubt. Zerfall im Atom würde doch in einer Schale untersetzen, dass die die eini wenige gebundenenes Elektron und ein Röntgenquant gefüllt wird $\gtrsim 4.6 \cdot 10^{26} \text{ y}$ (PDG)
neuer Limit Borexino Dez. 2015 $\gtrsim 6.6 \cdot 10^{28} \text{ y}$
Ladungserhaltender β -Zerfall des Neutrons

$$\frac{\Gamma(n \rightarrow p \bar{\nu}_e)}{\Gamma_{\text{tot}}} < 8 \cdot 10^{-27}$$

- Baryonenzahlserhaltung: weise jedem Teilchen analog zu elektrischen Ladung eine Baryonenzahl oder baryonische Ladung A zu.

Quarks haben $A = 1/3$ Antiquarks $A = -1/3$

$A=1$ für $p, n, \Delta, \Lambda, \dots$ alle Baryonen haben $A=1$

$A=-1$ $\bar{p}, \bar{n}, \bar{\Lambda}, \dots$ alle Anti " $A=-1$

fürde experimentell

$$\boxed{\sum A_i = \text{konstant}}$$

Suche nach Baryonzahl verleihender Zerfällen

$$\text{z.B. } \Gamma(\tilde{\chi}^- \rightarrow \Lambda\pi^-) / \Gamma_{\text{tot}} < 7.2 \cdot 10^{-8} \quad \text{oder}$$

Zerfall des Protons, Suche in groben neutrino-
schein superreichen Wassertanks mit vielen
Photowandripions, Nachweis von Cherenkov licht
der leichteren Zerfallsteilchen $\tilde{\nu} > 2.1 \cdot 10^{29} \text{ y}$
vgl. mit Alter des Universums $1.3 \cdot 10^{10} \text{ y}$

Kein zweifigende theoretischer Grund, kein Gegen-
rator einer entsprechenden Symmetrie bekannt.

Suche nach einer 5. Kraft die an Baryonzahl
koppelt und unendliche Reichweite hat, zusätz-
lich zu Gravitation, die an Flasche koppelt

Kraft zwischen 2 Hukkonen oder Kerzen

$$\bar{F} = - \underbrace{G M_1 M_2 / r^2}_{\text{Gravitation } F_g} + \underbrace{\eta^2 A_1 A_2 / r^2}_{5. \text{ Kraft}}$$

Packungsichte van Atomen M/A varieert um
ca 10^{-3} , Suche nach Differenz zwischen träge
und gravitativer Flasche $\bar{F} = ma$ und \bar{F}_g mit
 $g = \frac{M_0 G}{R_e^2}$ $\Delta x = \frac{\Delta a}{g}$ gesucht

Experiment van Fötzös et al (Ann. Physik 68(1922)11)

gibt Grenzwert für Effekt $\Delta x < 10^{-8}$

Reanalyse 1986 zeigte Effekt, weitere Experimente
(Massen suspendiert in großem Wassertank in der
Nähe von Cliffs, z.B. Pallisades bei New York) bestätigen
dies nicht. In de Tat umgekehrtes Argument!
da keine entsprechende langreichweite WW

gefunden wird und es daher keine Theor. Basis für Baryonenzahl erhalten gibt, keiner Grund, daß A exakt erhalten, nur 'empirische Regel' in einigen Grand Unified Theories GUT zerfällt Proton je nach Unifizierungsmasse auf Zeitskala $10^{29} - 10^{30}$ y

• Leptonzahl erhalten

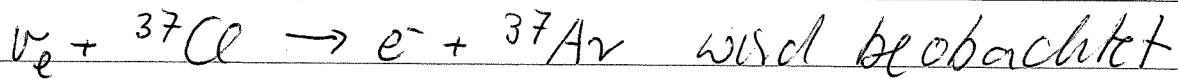
1953 als empirisches Gesetz von Kaupiaski & Nahmowich eingeführt um Abwesenheit bestimmter Prozesse zu erklären

z.B. $\gamma \rightarrow e^+e^-$ und $\gamma \rightarrow p\bar{p}$ im Feld eines 3. Teilchens abg. wie $\gamma \rightarrow e^+\mu^-$ oder $\mu \rightarrow e\gamma$

→ Zuordnung einer Leptonzahl zu jeder Generation von Leptonen, $L_e = 1$ für e^- und ν_e etc. empirisch ist die Leptonzahl für jede Generation erhalten

$$\left[\sum_i L_{e_i} = \text{konstant} \right] \quad \left[\sum_i L_{\mu_i} = \text{konst.} \right] \quad \left[\sum_i L_{\tau_i} = \text{konst.} \right]$$

- Sind Neutrino und Antineutrino identisch (Majorana Neutrino) oder nicht identisch (Dirac Neutr.)? erste Experimente (R. Davis 1955) an Reaktoren sagten 'nicht identisch'

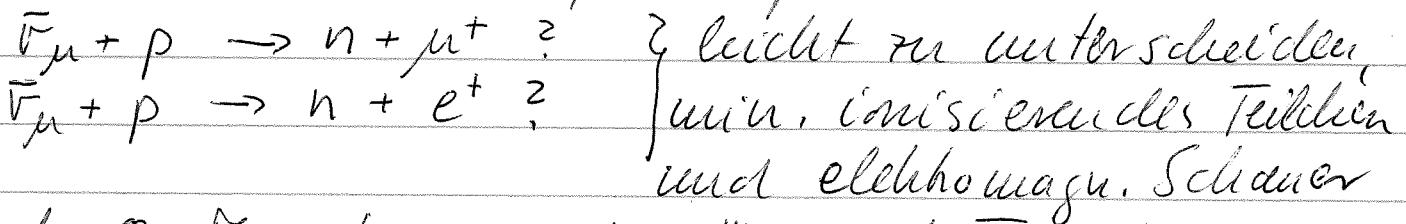


wird beobachtet
(Sonne neutrinos) ebenso wie ${}^{37}\text{Ar} + e^- \rightarrow {}^{37}\text{Cl} + \nu_e$ electron capture am Reaktor; aus Spaltung → neu hohenreiche Kerne, die durch β^- -Zerfall ν_e produziert werden
Suche nach $\bar{\nu}_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow e^- + {}^{37}\text{Ar}$ nicht beob-

achtet, Obergrenze für Wirkungsquerschnitt
 $\delta \leq 2 \cdot 10^{-42} \text{ cm}^2$

- Sind ν_e und $\bar{\nu}_e$ wirklich verschieden?

1962 Brookhaven Nat. Lab Alternierend Gradient Synchrotron AGS 15 GeV $p + \beta \rightarrow \pi^+ X$
Untersuchte Zerfallskanal $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$
Stoppe Myon in 13.5 m Stahl (Reichweite für μ bis 17 GeV ok)
richtige Verbünden aller Stahl, nur Neutrinos, auf flüssiges Wasserstofftarget und beobachtete mit 10 t Fackelkameras, was passiert



nach 8 Monaten und 10^{14} ν auf Target:

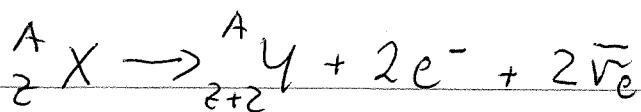
56 Ereignisse mit μ und Null mit e , später noch drastisch verbessert auf selben Ausgang

$$\rightarrow \nu_e \neq \bar{\nu}_\mu$$

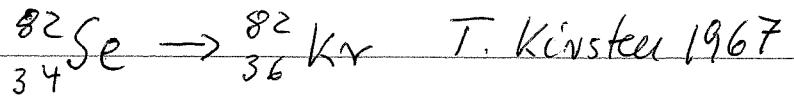
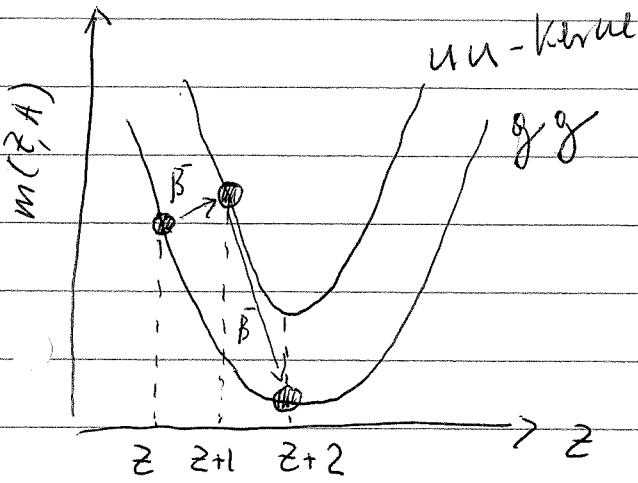
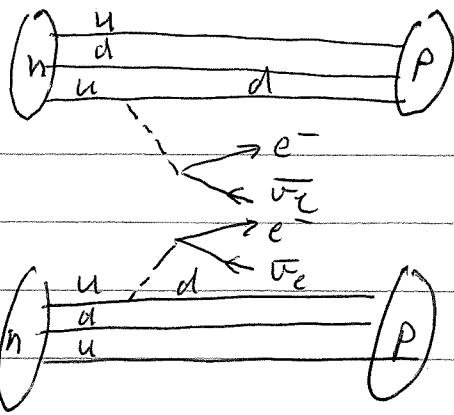
(Nobelpreis für diese Experimente 1988 an L. Lederman, M. Schwartz und J. Steinberger)

aber: inzwischen wissen wir dass Neutrinos wechseln, Neutrinooszillationen beobachtet (Nobelpreise 2015). Das ist nur möglich, wenn Neutrinos Rasse haben (Maki et al. 1962, Pontecorvo 1968), Rasseeigenschaften \leftrightarrow Flavoreigenschaften

Sind Majorana Neutrinos wirklich ausgeschlossen?
Sache nach neutrino lösen, doppelten β -Zerfall



passiert wenn einfacher β -Zerfall energetisch nicht möglich, aber doppelter Zerfall

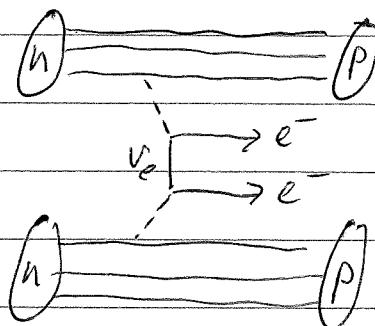
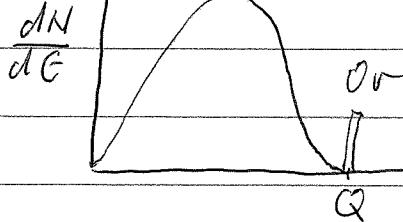


insgesamt sind 35 Nuklide Kandidaten. Zu doppelt β -Zerfall Prozess 2. Ordnung d. schwachen WW, beobachtet Halbwertszeiten $10^{19} - 10^{21}$ Jahre

sieht es auch folgender Prozess? Vorschlag

Furry 1939, seitdem Suche.

β -Spektrum



Peak bei Q-Wert

Trick: benutze zerfallendes Element als hochauflösendes Kalorimeter, in dem Zerfallsenergie (Rückstoß keru + Elektron) gemessen wird,

Klassiker: Heidelberg-Roskam Exp 11.5 kg ^{76}Ge

$\rightarrow ^{76}\text{Se} \quad \tau^{ov} = 1.9^{+16.8}_{-0.7} \cdot 10^{25} \text{ y}$ in 2001, Teil der Kollab

berichtet in 2004 Beobachtung 29 ± 7 ov Zerfälle

neues Exp mit mehr Ge, weniger Untergrund

GERDA, 2011-2013, 21.6 kg·y, kein Signal

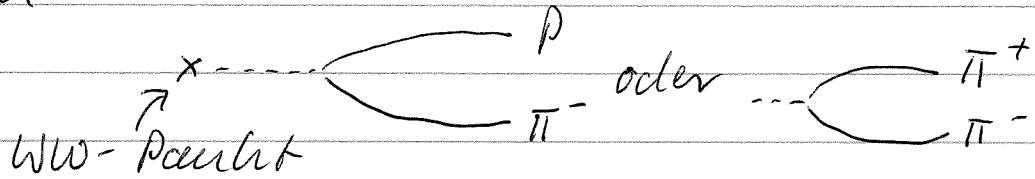
$t_{1/2}^{ov} > 2.1 \cdot 10^{25} \text{ y}$ Start größere Version Ende 2015

Eine Reihe anderer laufende und geplante
Experimente

Blister limit z.B. kann LAMP-Zen $t_{1/2}^{0\nu} > 1.07 \cdot 10^{26}$ y

- Strausness erhalten

seit Ende der 1940er Jahre beobachtetes Puzzle:
sogenannte V-Teilchen werden mit großer
Wahrscheinlichkeit produziert, aber zerfallen
langsam



Zerfall eines neutralen Teilchens in $\pi\bar{\pi}$ och $\pi^+\pi^-$

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \text{ bzw } K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

bei einigen GeV Stoßenergie ist Workzeug-
querschnitt für Reaktion $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$

$$\sigma_{\pi^- p \rightarrow \Lambda K} \approx 1 \text{ mb} \stackrel{!}{=} 10\% \text{ von } \sigma_{\pi^- p \rightarrow \Delta}$$

typisch für starke WW.

$$\text{Aber Zerfallsbreite } \Gamma_\Lambda = \frac{\hbar c}{2\epsilon} = \frac{197 \text{ MeV fm s}}{10^{-10} \text{ s} \cdot 3 \cdot 10^{23} \text{ fm}} = 6.6 \cdot 10^{-12} \text{ MeV}$$

also schwache WW

$$(\text{vgl. } \Gamma_\Delta \approx 100 \text{ MeV, starke WW})$$

Pais-Regel (1952): Kaonen und Lambdas verlieren in starker WW produziert, aber zerfallen schwach.

Grund: Erhaltung von Strangeness in assoziierte Produktion, d.h. Produktion in Paaren mit $S=1$ und $S=-1$

Strangeness 1953 von Gell-Mann und Nishijima eingeführt (11 Jahre vor Quarks!), um Pais-Regel zu erklären

$$\sum_i S_i = \text{konst für starke und ein. WW}$$

$$\sum_i S_i \neq \text{konst für schwache WW}$$

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0 \quad \text{Produktion starke WW}$$

$$S \quad 0 \quad +0 \quad -1 \quad +1 \quad \checkmark$$

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^- \quad \text{und } K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

$$S \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta S = 1 \quad +1 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta S = -1$$

in schwachen Zerfall $\Delta S = \pm 1$ möglich

Fsospicinaltarey

Heisenberg 1932: Neutron und Proton sind 2 Ladungszustände eines Teilchens, des Nukleons
 belegt 1937 durch H. Bethe: Analyse von pp- und pn-Stossdaten zeigt nach Abzug von Coulombeffekten, daß pp und pn gleich in Stärke und Reichweite. Ebenso Massen von ${}^3\text{H}$ und ${}^3\text{He}$ → führt zu Konzept des Isospins

- Nukleon ist ein 2-Zustandsystem (Dublett) charakterisiert durch eine Quantenzahl 'Fortsch' die in einem separaten Hilbertraum 2 mögl. Orientierungen ergibt, p und n Formalisimus analog zu Spin

$$I = \frac{1}{2} \quad I_3(p) = +\frac{1}{2} \quad I_3(u) = -\frac{1}{2}$$

Rotationen im Fösselnraum durch Spineoren
analog zu Paulispinoren

2-Hyperon-System: Symmetrisierung der Wellenfunktion, wie für 2-Elektronensystem möglich. Spin-Sym. Triplet $\frac{1}{\sqrt{2}}(pn+np)$ nn
 antisym. Singulett $\frac{1}{\sqrt{2}}(pn-np)$
 mit Wellenfunktion $\chi(I, I_3)$ wird
 Triplet $\chi(1, 1) \quad \chi(1, 0) \quad \chi(1, -1)$
 Singulett $\chi(0, 0)$.

Atomkerne: Z Protonen und N Neutronen $A = N + Z$

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^A \vec{I}_i \quad I_3 = \sum_i I_{3i}$$

$$\text{el. Ladung } Q = Ze = \sum_{i=1}^A q_i = e \sum_{i=1}^A (I_{3i} + 1/2) = e (I_3 + A/2)$$

$\approx I_3 = Z - A/2 = \frac{1}{2}(Z - N)$ fest für jeden Atomkern
aber für jeden Atomkern gibt es A Fespinvektoren
je von Länge $1/2$, die vertikal zu I koppeln

$$I_{\max} = A/2 = \frac{1}{2}(N + Z) \text{ und wegen } I_3 = \frac{1}{2}(Z - N)$$

$$\approx I_{\min} = \frac{1}{2}|Z - N|$$

d.h. in jedem Kern sind die Zustände durch eine Quantenzahl I , zusätzlich zu J^π , charakterisiert mit $\frac{1}{2}|Z - N| \leq I \leq \frac{1}{2}(Z + N)$

Vergleiche Niveauschemata von brauchbaren Kernen mit gleichem A , sogenannte Fesbarre.

Zustände mit gleichen I, J^π formen Multipletts.

Da I_3 unterschiedlich, wird die Fespinsequenz der starken WW etwas durch die em. WW (verschiedene Coulombabstoßung) gebrochen.

Skala $\alpha \leftrightarrow \alpha_s$

Beispiel: $^7_3\text{Li}^4$ und $^7_4\text{Be}^3$? für beide

$$I_3 \quad \frac{1}{2}(3-4) = -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}(4-3) = \frac{1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} I_{\min} = 1/2 \\ I_{\max} = 7/2 \end{array} \right.$$

sehr ähnliche Niveauschemata, nur Verschiebung um ca. 0.9 MeV Fig. 8-2

alle niedrigen Zustände sind $I = 1/2$

Energiedifferenz der Fesbarren:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(A, Z+1) - E(A, Z) = \frac{\partial E}{\partial Z} (\Delta Z = 1) \\ &= \frac{\partial E_{cb}}{\partial Z} - \underbrace{(m_n - m_p)c^2}_{1.29 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

für gleichförmig glatte Kugel $E_{cb} = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R}$

$$\frac{\partial E_{cb}}{\partial Z} = \frac{6}{5} \frac{Ze^2}{R} \approx \frac{6}{5} \frac{Ze^2}{1.2 \text{ fm} \cdot A^{1/3}}$$

für $Z=3$ und $A=7$ $\frac{dE_{cb}}{dZ} = 2.26 \text{ MeV}$

$\sim \Delta E = 2.26 - 1.29 = 0.97 \text{ MeV}$ gut im Vergleich zu Daten mit $\Delta E = 0.86 \text{ MeV} \leftrightarrow 7\text{-Sospin}$
gute Symmetrie in Kernen

Es gibt auch Multiplets mit mehr als 2 Kerne

\rightarrow Fig 8-3

andere Hadronen: I_3 wird über die Valenzquarks zugewandt und $I \geq |I_3|$, Wert steht fest, wenn ganzes Multiplett bekannt

z.B. Pion $\pi^+ = (\bar{u}\bar{d})$ $I_3 = 1$ } 7-Sospinmultiplett mit
 $\pi^- = (\bar{u}d)$ -1 } $I=1$
 $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\bar{u} - d\bar{d})$ 0

Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ $I=1 \rightarrow I=0$ ein WW bricht
I-Symmetrie, aber erhält I_3

Lambda $\Lambda = (\bar{u}\bar{d}s)$, keine geladenen Partikel
also $I_3 = 0$, $I=0$ 7-Sospinsingulett

Zerfall $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$

uds und $\bar{u}\bar{d}$

I_3	0	$1/2$	-1	$\Delta I_3 = -1/2$	schwache WW verletzt Erhaltung von I, I_3, S
I	0	$1/2$	1	$\Delta I = 1/2$	
S	-1	0	0	$\Delta S = 1$	