

5.5 Zerfallsbreite

Zerfall eines instabilen Teilchens oder einer Resonanz
nach radioakt. Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \quad (\text{siehe oben})$$

Zustand einer festen Energie E_r beschrieben durch
Wellenfunktion $\Psi(t) = \Psi_0 \exp(-iE_r t/\hbar)$

ortsabhängiger Teil d. Wellenfunktion
zeitabhängiger Teil der WF aus Schrödinger-Gleichung

Wahrscheinlichkeit Teilchen zu finden

$$\Psi^* \Psi = \Psi_0^2 \quad \text{zeitlich konstant, kein Zerfall}$$

Ansatz für zerfallendes Teilchen: komplexe Energie
 $E_r - i\Gamma/2$ mit Γ reell

$$\Psi(t) = \Psi_0 \exp(-iE_r t/\hbar) \exp(-\Gamma t/2\hbar)$$

$$\Psi^* \Psi = \Psi_0^2 \exp(-\Gamma t/\hbar) \rightarrow \text{exponentieller Zerfall}$$

mit $\frac{\Gamma}{\hbar} = \lambda = \frac{1}{\tau}$ oder $\Gamma \tau = \hbar$

aus $\Psi(t)$ durch Fouriersummenformation $\Psi(\omega)$

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \Psi(t) \exp(i\omega t) dt \\ &= \frac{\Psi_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-t\left(\frac{i}{\hbar}(E_r - E) + \frac{\Gamma}{2\hbar}\right)\right) dt \\ &= \frac{\Psi_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\hbar}{(E - E_r) + i\Gamma/2} \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit $P(E) = A \Psi(\omega) \Psi^*(\omega)$

Normierung $A = \Gamma/\hbar^2 \Psi_0^2$ für $\int P(E) dE = 1$

5-14

$$P(E) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(E-E_r)^2 + \Gamma^2/4}$$

Lorentz- oder
Breit-Wigner Verteilung
Peak bei E_r , FWHM: Γ

Aufgrund seiner endlichen Lebensdauer besitzt Teilchen Energiebreite Γ

Γ bzw. τ werden durch freigesetzte Energie (Phasenraum) und Art d. WW bestimmt

stark	$\Delta(1232)$	$\tau = 10^{-23} \text{ s}$	$\Gamma = 100 \text{ MeV}$
em	π^0	10^{-18} s	1 keV
○ schwach	π^\pm	10^{-8} s	10^{-7} eV
	n	10^3 s	10^{-18} eV

C

6. Strukturinformation aus Streuexperimenten

Struktur: räumliche Verteilung von Masse und Ladung $\rho(x)$ und $\rho_e(x)$. Auch Verteilung der Magnetisierung \vec{m} ausgedehnte Objekte mit magn. Moment

Information aus Streuexperimenten: messe Wirkungsquerschnitt als Funktion von Streuwinkel oder Impulsübertrag. Ablenkung eines geladenen Teilchen im Coulombfeld e. geladenen Targets.

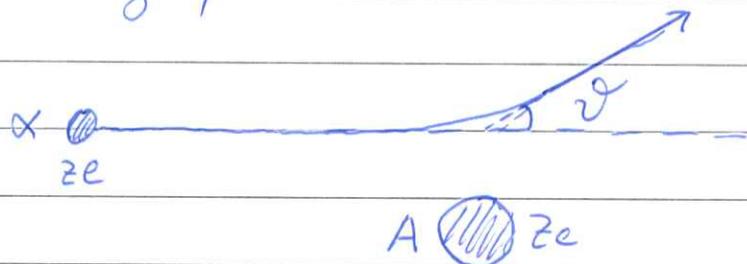
- Wahl der Energie: de Broglie Wellenlänge muß von der Größenordnung der aufzulösenden Struktur sein $\lambda = \frac{hc}{p}$

Atomkern $\Delta x \approx 10 \text{ fm} \approx 10^{-14} \text{ m} \approx 120 \text{ MeV}$

sonst sieht man nur Atomkern als Ganzes

6.1 Elastische Streuung

a) Rutherfordstreuung von α -Teilchen an Goldfolie und Entdeckung des Atomkerns (Rutherford, Geiger, Marsden 1908-1909)



Annahme: Streupartner punktförmig, geladen, kin. Energie \ll klein gegen Masse Goldkern

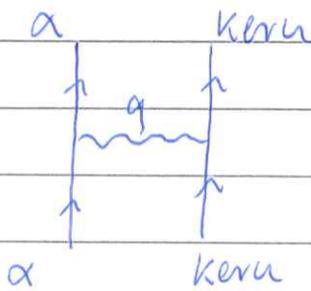
→ nichtrelativistisch, keine Rückstoß

$$\frac{d\sigma^R}{d\Omega} = \frac{(zZe^2)^2}{16T^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad \leftarrow \text{Rutherford Streuformel}$$

Messung des Wirkungsquerschnitts in α -Streuung mit $\frac{d\sigma^R}{d\Omega}$ zeigte: Atomkern kleiner als Annahme α -Teilchen am Kern

größte Annäherung bei Rückwärtsstreuung: kin. Energie
gleich Coulombimpulsion $T = \frac{e^2 z^2}{r}$

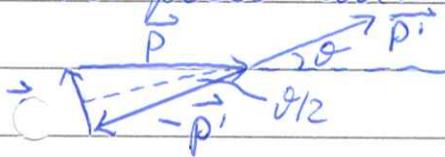
5 MeV α -Teilchen auf Gold $\rho \approx 19.3 \text{ g/cm}^3$ $D = 45 \text{ fm}$



elastische Streuung: Photon überträgt
4 eV Impuls q $q^2 = (E - E')^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2$
im cm-System für elastische Streuung

$$E = E' \quad |\vec{p}| = |\vec{p}'| \quad q^2 = -\vec{q}^2$$

Impuls ändert nur seine Richtung



$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$$

$$|\vec{q}|/2 = |\vec{p}| \sin(\theta/2)$$

quantenmechanisch wird der Wirkungsquerschnitt
durch eine Streuamplitude $f(\vec{q}^2)$ beschrieben

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{q}^2)|^2$$

geht Streuung eines geladenen Teilchens am
Coulombpotential eines Atomkerns, sphärisch-sym.,
ein- und auslaufende Teilchen ebene Wellen
(Born'sche Näherung), $\Psi_i = \exp(i\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar)$ $\Psi_f = \exp(i\vec{p}' \cdot \vec{r}/\hbar)$

$$f(\vec{q}^2) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(r) \exp\left(\frac{i\vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar}\right) d\vec{r}$$

$$= -\frac{2m}{i\hbar^2} \int r dr V(r) \sin\left(\frac{|\vec{q}|r}{\hbar}\right)$$

Coulombpotential abgeschwächt durch Elektronen

$$V(r) = \frac{zZe^2}{r} \exp(-r/a) \quad \text{mit } a \approx 10^5 \text{ fm} = 1 \text{ \AA}$$

$$\leadsto f(q^2) = - \frac{2mzZe^2}{|q|^2 + \hbar^2/a^2}$$

für Energien und Impulsüberträge q im MeV-Bereich kann $(\hbar c)^2/a^2$ vernachlässigt werden

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = f(q^2) = \frac{4m^2 z^2 Z^2 e^4}{q^4}$$

für relativistische Teilchen wird Masse m durch totale Energie $E \approx p$ ersetzt und mit $d\sigma/dq^2 = d\sigma/d\Omega \cdot d\Omega/dq^2$

$\frac{d\sigma}{dq^2} \frac{[fm^2]}{[MeV^2]} = \frac{4\pi (zZ)^2 e^4}{q^4} \frac{[MeV^2 fm^2]}{[MeV^4]}$	einfachster Punkt-ladungsquerschnitt im c.m. System
--	---

im Laborsystem muß Rückstoß berücksichtigt werden $\frac{d\sigma}{dq_L^2} = \frac{d\sigma}{dq_{cm}^2} \cdot \frac{E'}{E}$ mit $E' = E \frac{1}{1 + \frac{2E}{m} \sin^2(\theta/2)}$

b) Streuung relativistischer Spin 1/2 Teilchen an Punktladung Ze

elastische Elektronenstreuung, durch magnetische Moment Modifikation des Rutherford Querschnitts

$$\text{Mott-Querschnitt } \frac{d\sigma^M}{dq^2} = \frac{4\pi z^2 e^4}{q^4} \left(1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

WV von magnetischem Moment des Elektrons mit Strom durch bewegte Ladung des Kerns (Herleitung: relativistische Quantenwech.)

c) Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung

$$\text{starke wie oben } f(\vec{q}^2) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\vec{r} V(r) \exp\left(\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right)$$

Laplace

$$\text{mit Poisson-Gleichung } \Delta V = 4\pi \rho(r) Ze^2$$

($\int \rho(r) d\vec{r} = 1$) und Green'schem Theorem

$$\int d\vec{r} \exp\left(\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) V(r) = -\frac{\hbar^2}{q^2} \int d\vec{r} \exp\left(\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) \Delta V(r)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{q}^2)|^2 = \frac{4m^2 Z^2 e^4}{q^4} \left| \int d\vec{r} \exp\left(\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) \rho(r) \right|^2$$

Formfaktor $F(\vec{q}^2)$

der Formfaktor ist die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung und enthält im Wirkungsquerschnitt die ganze Strukturinformation

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma^R}{d\Omega} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{el}}{d\Omega} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2}$$

spinloses Streuteilchen
 α, \dots

Elektroonenstrahlung

Beispiel: 400 MeV $e^- + {}^{40}\text{Ca}$

\Rightarrow Fig. 6-1

6.1.1 Ladungsverteilung von Atomkernen

messe differentiellen Wirkungsquerschnitt über möglichst großen Bereich von θ oder q^2 und extrahiere $\rho(r)$

Schwierigkeit: je größer die Ausdehnung, desto schneller fällt $F(\vec{q}^2)$, daher Inversion der Beziehung

$$\text{oben als } \rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\vec{q} F(\vec{q}^2) \exp(-i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar) \quad \text{Schwierig}$$

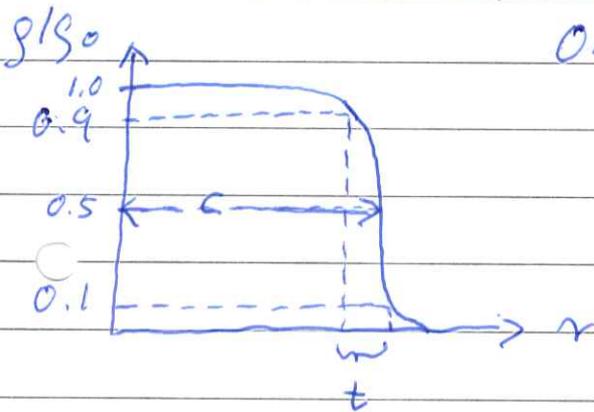
Beispiel [Fig. 6-1] q bis $3.5 \text{ fm}^{-1} \hat{=} 700 \text{ MeV}$ Wirkungsquerschnitt fällt über 12 Größenordnungen!
 \rightarrow syst. Fehler in $\rho(r)$ bei kleinem r

Ergebnis: Fermi-Verteilung $\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp((r-c)/a)}$

$c \equiv$ Halbdichtedicke $\approx (1.18 A^{1/3} - 0.48) \text{ fm}$

Oberflächendicke $t = (4 \ln 3) a$

$$= 4.4a \approx 2.4 \text{ fm}$$



$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 0.94 \cdot A^{1/3} \text{ fm}$$

Volumen $V \propto A$
 Kernmasse $\propto A$ } Dichte \approx konst

Vergleiche mit vereinfachtem Modell einer Kugel konstanter Dichte mit scharfem Radius R , gewählt so, daß rms Radius mit gemessenem übereinstimmt

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^R \frac{3r^4 dr}{4\pi R^3} = \frac{3}{5} R^2$$

☉ setze von oben ein $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.94 A^{1/3} \text{ fm}$

\leadsto $R = 1.2 \cdot A^{1/3} \text{ fm}$ "equivalent sharp sphere radius"

Ladungsverteilung verschiedener Kerne \rightarrow [Fig 6-2]

6.1.2 Struktur des Nukleons

2 Nukleonen: Proton und Neutron

$$m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2 \quad m_n = 939.6 \text{ MeV}/c^2$$

Proton, soweit bisherige Messungen zeigen, stabil
 $\tau > 2.1 \cdot 10^{29} \text{ y}$ SNO sehr große unterirdische Tauch
 mit ultrareinem Wasser

Neutron $\tau = 880.3 \pm 1.15$ $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
 beide Nukleonen haben Spin $1/2$ und "anomale"
 magnetische Momente (siehe Kapitel 5)

$$\langle \mu_s \rangle_p = \pm 2.79 \mu_N \leftrightarrow g_p = 5.58$$

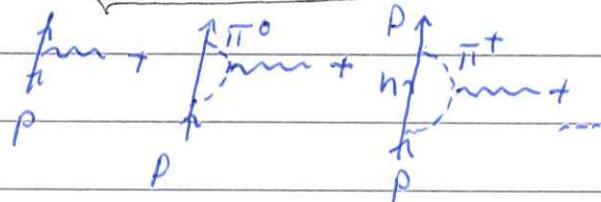
$$\langle \mu_s \rangle_n = \mp 1.91 \mu_N \quad g_n = -3.82$$

→ zeigt, Nukleonen haben Struktur

Quarkstruktur + "Pionwolke"

(und bzw. odd) Valenz

+ Gluonen + $q\bar{q}$ - See



Photon-Proton WW

Aufklärung der Struktur: Streuung von Elek-
 tron an Nukleon, zusätzliche Komplikation:
 beide Streupartner haben Spin $s = 1/2$

→ 3 Beiträge zum Wirkungsquerschnitt

- ① WW Ladung Elektron - Ladung Nukleon (Rutherford)
 - ② " Strom Nukleon - magn. Moment Elektron
 - ③ " Strom Elektron - magn. Moment Nukleon
- } Dirac

Wirkungsquerschnitt für punktförmiges Dirac-Nukleon
 ($g=2$) mit Masse M und relativistisches Elektron

$$\frac{d\sigma^{\text{Dirac}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{\text{Ruth}}}{d\Omega} \left(\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) = \frac{d\sigma^{\text{Ruth}}}{d\Omega} \left(1 - \frac{q^2}{2M^2} \tan^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right)$$

Maxialelement $\propto \langle \mu_p \rangle \propto \frac{1}{M}$

" \propto zeitlich integriertes B-Feld am Ort des
 Nukleons \propto Ablenkung, d.h. $\propto q \Rightarrow \sigma \propto q^2/M^2$

Vorzeichen von (3) relativ zu (2) anpassen!
hängt von Metrik für 4er Vektoren ab, in unserer
Metrik $q = (\epsilon - \epsilon', \vec{p} - \vec{p}')$ ist für elastische Streuung
 q^2 immer negativ (bzw. bei Vernachlässigung
Rückstoß $q^2 = -\vec{q}^2$) und das gilt Vorzeichen
wie oben in $d\sigma^{Dirac}/d\Omega$,

In Minkowski-Metrik steht hier ein "+", manchmal
wird auch $Q^2 = -q^2$ verwendet, dann auch "+"

in ausgedehnte Nukleonen: Streuquerschnitt
wird (analog zu Atomkern) durch Formfaktoren
modifiziert. Aber: jetzt ein Formfaktor, um aus-
gedehnte Ladungsverteilung zu berücksichtigen
"elektrischer Formfaktor" $G_E(q^2)$ und ein Formfaktor
um ausgedehnte Magnetisierung zu berücksichtigen
"magnetischer Formfaktor" $G_M(q^2)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{Rott}}{d\Omega} \left[\frac{G_E^2 - \frac{q^2}{4M^2} G_M^2}{1 - \frac{q^2}{4M^2}} - \frac{q^2}{2M^2} G_M^2 \tan^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right] \Rightarrow \boxed{\text{Fig. 6-3}}$$

Elektron - Nukleon elastische Streuquerschnitt in
1 Photon Austauschnäherung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\frac{d\sigma^{Rott}}{d\Omega}} = A(q^2) + B(q^2) \tan^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{? messe für jedes} \\ q^2 \text{ bei verschiedenen} \\ \text{Winkeln (Variation} \\ \epsilon \text{ und } \vartheta) \end{array} \right\} \sim$$

"Rosenbluth Formel" (1950)

erste Messungen: Hofstadter et al
1956 in Stanford, 200 MeV Elektronen $G_E(q^2)$ und $G_M(q^2)$
Zufo über Neutron: Vergleich ep und ed $\Rightarrow \boxed{\text{Fig 6-4}}$
(Hofstadter 1961)

Ergebnis: bei moderaten $q^2 < 1 \text{ GeV}^2$

$$G_e^p(q^2) \approx \frac{G_{ri}^p(q^2)}{\langle \mu_p \rangle} \approx \frac{G_{ri}^n(q^2)}{\langle \mu_n \rangle}$$

funktionale Form $G(q^2) \approx \frac{1}{(1 + q^2/0.73)^2}$ "Dipol-Form"
 \hookrightarrow in GeV^2

Fouriertransformierte ergibt exponentielle Verteilung von Ladung und Magnetisierung $\rho = \rho_0 \exp(-\sqrt{0.73} r/\hbar c)$

rms-Radius des Protons: $G_e(q^2) = \int d\vec{r} \exp(\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}) \rho(r)$
 $\overline{G_e(q^2)} = 4\pi \int r^2 dr \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} \rho(r)$ (hier $q = |\vec{q}|$)

entwickle für $\frac{qr}{\hbar} \ll 1$ $\sin(qr/\hbar) = \frac{qr}{\hbar} - \frac{(\frac{qr}{\hbar})^3}{3!} + \frac{(\frac{qr}{\hbar})^5}{5!} - \dots$
 (für $q \ll \frac{\hbar c}{r} = \frac{197 \text{ MeV fm}}{1 \text{ fm}}$)

$$\rightarrow G_e^p(q^2) = 1 - \frac{1}{6} \frac{q^2}{\hbar^2} \langle r_{Ep}^2 \rangle + \frac{1}{120} \frac{q^4}{\hbar^4} \langle r_{Ep}^4 \rangle - \dots$$

mit $\langle r_{Ep}^2 \rangle = \int \rho(r) r^2 dr$ mittlerer quadratischer Ladungsradius

d.h. für kleine Abstände im Nukleon

$$\frac{dG_e}{dq^2} = -\frac{1}{6\hbar^2} \langle r_{Ep}^2 \rangle \text{ bei } q^2 = 0$$

Stützung d. Formfaktors als Funktion von q^2 bei sehr kleinen q^2

$$r_{Ep}^{\text{rms}} = 0.879 \pm 0.008 \text{ fm}$$

Zukunft: aus Messungen MAMI $q^2 = (0.0038 - 0.98) \text{ GeV}^2$
 benötigte $\Delta\theta = 0.2\%$ Schwierigkeit: extrem genaue Winkelmessung, bei niedrigstem q^2 $\vartheta = 10 \text{ mrad}$, benötigte $\Delta\vartheta = 10 \text{ mrad}$ wegen \neq Abh. Breit

- Feld wurde 20 Jahre als vollständig verstanden betrachtet, in letzten 10 Jahren durch neuere Messungen 2 Krisen was Nukleonformfaktor angeht

- alternative sehr genaue Messung des rms-Radius

des Protons ergibt 4% geringeren Wert als Mittel aller bisherigen Messungen. Sehr genaue Messung der Lamb-shift myonischer Atome (Pohl et al., Nature 446 (2010) 213) wegen 200 mal größerer Masse \sim Bohrradius 200 mal kleiner, größerer Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Myons am Ort des Protons \sim stark erhöhte Sensitivität auf Proton-Ladungsverteilung.

präzise Messung Energieunterschied $2S_{1/2}^{F=1}$ u. $2P_{3/2}^{F=2}$ mit Laserspektroskopie (gepulst) größtes Signal der 6er am PSI 5keV Myonstrahl in H_2 -Zelle lautster opt. $\bar{\nu}$ $2S-2P$ abgestoppt, Einfang \sim in hohe Rydbergzustände, zerfallen schnell nach 15, 1% bleibt in $2S$, Lebensdauer: 2.2 μs Myon, aber durch Kollisionen im Gas $\tau \approx 1 \mu s$, in dieser Zeit Spektroskopie $\rightarrow r_{Ep}^{rms} = 0.84087(39) \hat{=} 58$ kleiner \Rightarrow Fig. 6-4a

Diskrepanz ungelöst, neue Experimente in Gang

• Messungen mit Rückstoßpolarisation

(Trenne G_E, G_M Streuung lang pol. Elektron) $\leftarrow \bar{e} + p \rightarrow e + \bar{p}$ nicht konsistent mit Messung Wirkungsquerschnitt und Rosenbluth Separation, insbesondere $Q^2 \Rightarrow$ Fig 6-5 wo ist das Problem? nichtrelativistische Behandlung mit $|\vec{q}|^2$ als einziger freier Parameter und 1-Photon austausch funktionieren nicht. τ -Photon austausch gerade bei Rosenbluthsep. besonders schliessen.

höhere Ordnung sehr kompliziert, 3 komplexe Amplituden, genaue Messung Polarisationstransp. amplituden

$\rightarrow G_E$ und G_M für Q^2 bis $\approx 10 \text{ GeV}^2$ für Proton und Neutron

- genaue Kenntnis Ladungsverteilung Neutron \Rightarrow Fig 6-6

- Vergleich mit Berechnungen im Rahmen verschiedener Modelle gute Tests für Struktur des Nukleons

\Rightarrow Fig 6-7