

10. Bindungsenergie und Auswirkung von Atomkerzen

10.1 Bindungsenergie von Atomkerzen und Tröpfchenmodell

Bindungsenergie definiert als

$$B(N, Z) = \underbrace{2M_H c^2}_{\text{Masse Wasserstoffatom}} + \underbrace{N M_n c^2}_{\text{Masse Neutron}} - \underbrace{M_{N,Z} c^2}_{\text{Masse Atom mit } N \text{ Neutronen und } Z \text{ Protonen}}$$

? ausgedrückt üblicherweise in
Einheiten von $\frac{1}{12}$ der Masse eines ^{12}C -Atoms $\equiv 1 \text{ amu}$
 $1 \text{ amu} \approx 931.502 \text{ MeV/c}^2$

$$M_H = 1.0078 \text{ amu} \quad M_n = 1.0087 \text{ amu}$$

$${}^4\text{He} : B(2, 2) = 2 \cdot 1.0078 + 2 \cdot 1.0087 - 4.0026 = 0.0304 \text{ amu} \\ \approx 28.3 \text{ MeV}$$

$$13/A = 7.1 \text{ MeV} \leftarrow \text{Bindungsenergie pro Nukleon}$$

Systematik der
Bindungsenergien

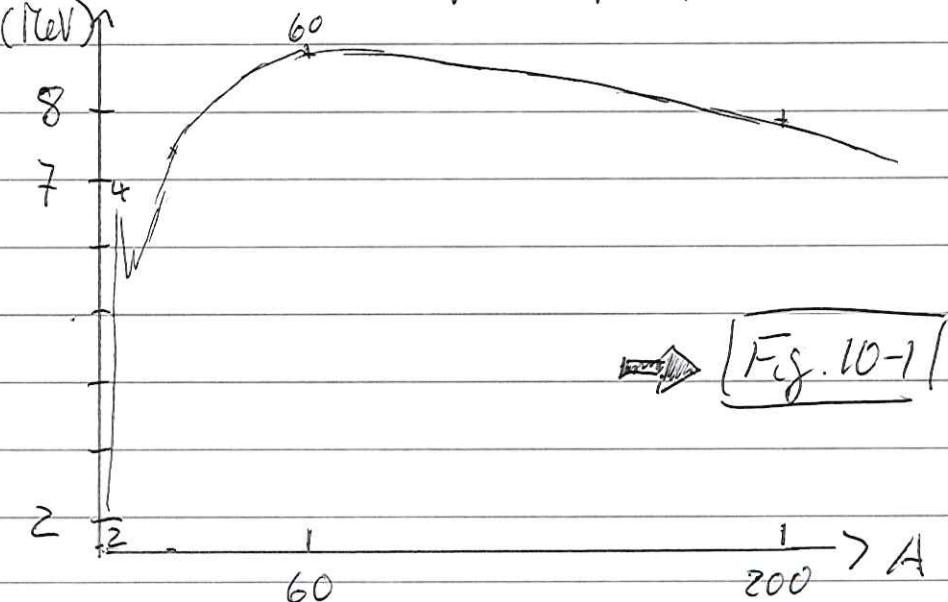


Fig. 10-1

Erste Beschreibung der Systematik durch C.F. von Weizsäcker 1935, N. Bohr 1936 basierend auf:

$$\text{Kernradius} \approx 1.2 \cdot A^{1/3} \text{ fm}$$

Kerne haben im Fürem etwa konst. Dichtz 0.17 Nukleonen / fm³, offensichtlich Reichweite der Kernkraft kurz \leftrightarrow Sättigungscharakter in Analogie zu Atomen / Molekülen in klassischer Mechanik. Kleiner einfache Parameterisierung der Bindungsenergien

$$B(ReV) = b_V \cdot A - b_S A^{2/3} - b_C Z^2 A^{-1/3} - b_{\text{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A} + b_P A^{-1/2}$$

"Weizsäcker-Formel"

\Rightarrow Fig 10-2

beschreibt phänomenologische Bindung durch eine stark abfallende kurzreichweite Kraft, die zwischen direkt benachbarten Nukleonen wirkt.

- $b_V A$ Volumenterm: B/A ist etwa konstant, B wächst proportional von A , also auch Kernvolumen $b_V = 15.85 \text{ fm}^3$

- $b_S A^{2/3}$ Oberflächenterm: Nukleonen an der Kernoberfläche haben weniger Bindungspartner, sind also schwächer gebunden, \propto Oberfläche $R^2 \propto A^{2/3}$, $b_S = 18.34 \text{ fm}^3$, Term reduziert B , also $-$

- $b_C Z^2 A^{-1/3}$ Coulombterm: Coulombabstreuung der Z Protonen, für einheitlich geladene Kugel mit Radius R_0

$$B_C = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(r) \rho(r')}{|r-r'|} d^3 r d^3 r' = \frac{1}{2} g^2 \frac{8\pi^2}{3} \frac{4}{5} R_0^5$$

$$\text{mit } \rho = \frac{3 \pi e^2}{4 \pi R_0^3} \text{ und } R_0 = r_0 \cdot A^{1/3} \rightarrow B_C = \frac{3 \pi e^2}{5 r_0 A^{1/3}}$$

und mit $r_0 = 1.2 \text{ fm} \approx b_C = 0.717 \text{ fm}$, repulsiv \rightarrow rd. B

- $b_{\text{sym}} (N-Z)^2/A$ Symmetrium: Pauli-prinzip und diskrete Energieniveaus im Potentialtopf \rightarrow besonders günstig: gleiche Anzahl von Protonen z und Neutronen H, $b_{\text{sym}} = 23.2 \text{ fm}$, Asym. reduziert B, Verteilchen :-)
- $b_p A^{-1/2}$ Paarungsterm: gg-Kerne sind stärkst. stärker gebunden als ug- und su-Kerne und diese wieder stärker als un. Kopplung von Protonen zu Paaren, ebenso Neutronen, Cooperpaare ähnlich wie Elektronen in Supraleiter, $b_p = 11.5 \text{ fm}$ für gg, $b_p = -11.5 \text{ fm}$ für un und $b_p = 0$ für ug, su Fig. 10-3

In den größten Teil des Periodensystems mit $A \geq 20$ beschreibt Weizsäcker-Formel Bindungsenergien pro Nukleon besser als 0.1 MeV (1-2%).

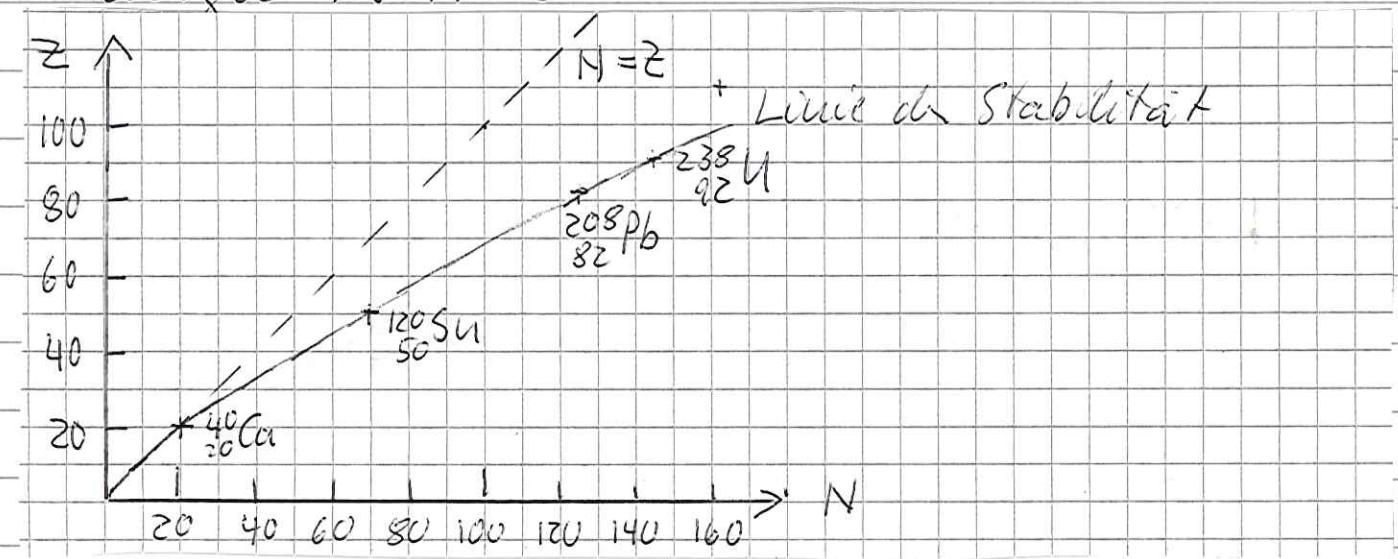
$B(M, Z)$ beinhaltet, um wieviel ein Atomkern gebunden ist gegenüber freien Nukleonen. Bindung im Vergleich zum ^{12}C ist im sogenannten "Massenüberschuss" enthalten

$$\Delta(\text{MeV}) = M_{N,Z} C^2(\text{MeV}) - A \cdot \underbrace{931.502 \text{ MeV}}_{\text{amu} = 1/12 \text{ MeV } ^{12}\text{C-Atom}}$$

(tabelliert, Nuclear Data Center, Brookhaven Lab.
Nuclear Wallet Cards)

$\Delta > 0$ Kern schwächer gebunden als ^{12}C
 $\Delta < 0$ " stärker "

$B(N, Z) > 0$ drückt aus, daß ein Atomkern gebunden ist. Für jedes Element Z gibt es eine am stärksten gebundene Isotopie \leftarrow definiert Linie der Stabilität
 - für kleines Z ist $N = Z$ bevorzugt (Symmetrieenergie)
 - für großes Z dominiert zunehmend Coulombenergie $\sim N > Z$



- für jedes Element gibt es mehrere stabile Isotope sowie eine ganze Reihe von instabilen aber gebundenen Isotopen \leftarrow Radioaktivität
 z.B. Zinn-Isotope $Z=50$ $A=99-138$ bekannt
 stabilste Isotope $^{120}_{50}\text{Sn}^{70}$, 10 stabile Isotope, 30 radioaktive Isotope

Radioaktivität: hauptsächlich β -Zerfälle
 β^+ -Zerfälle oder Elektroneneinfang, wenn N zu klein
 β^- -Zerfälle, wenn N zu groß

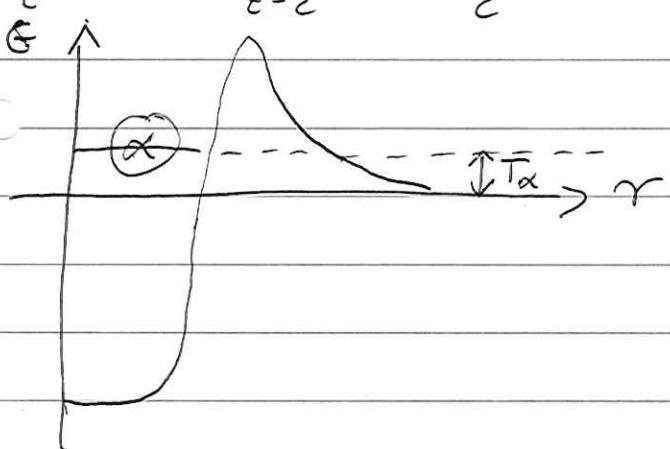
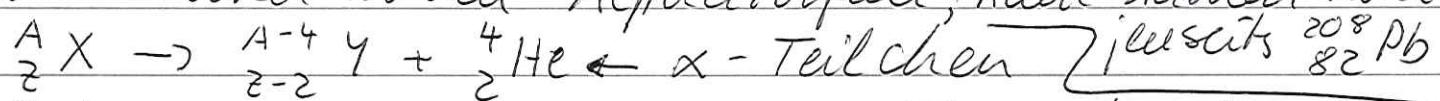
- Region der gebundenen Kerne limitiert durch

sogenannte Proton- bzw. Neutron-Drip-Linie; jenseits zerfallen Kerne stark in $< 10^{-18}$ s durch Proton- oder Neutron-Emission. Wegen Elementsynthese in Sternen wichtig der Verlauf zu kennen.



Fig. 10-4

- in schwereren Kernen Alphazerfall, kein stabiler Kern



wegen Tunneln durch Coulombbarriere typ. lange Halbwertszeiten

- die schwersten Atomkerne können auch durch spontane Kernspaltung zerfallen, z.B. ${}_{102}^{260} \text{No}$
100% SF, $t_{1/2} = 106 \text{ ms}$



10.2 Fermigas-Modell

Kern hat auch viele Eigenschaften, die leichter durch ein Modell unabhängiger Teilchen in einem Potentialtopf beschrieben werden als durch einen stark wechselwirkenden Flüssigkeitstopf.

Einfachstes Modell, das Quantennatur berücksichtigt: betrachtet Atomkerne als Fermigas von ($N+7$) Nukleonen, die sich frei und unab-

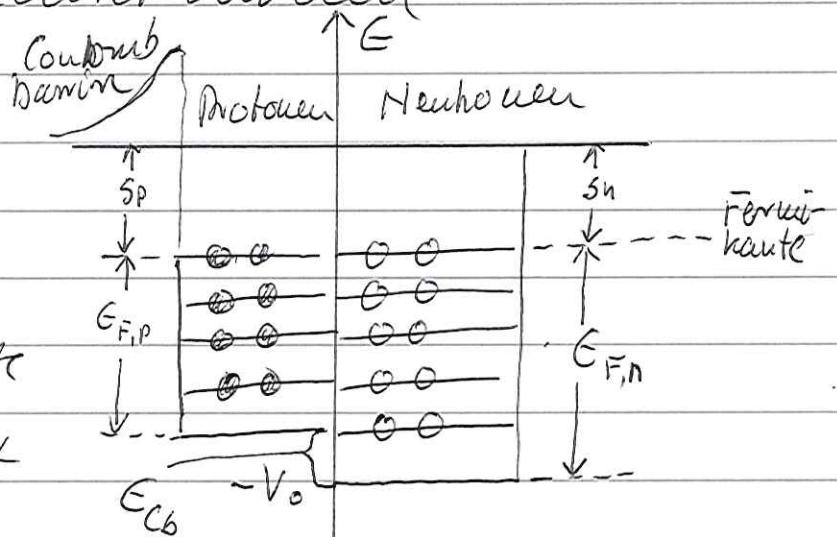
häufig voneinander in einer Kugel mit Radius $R = r_0 A^{1/3} \approx 1.2$ für $A^{1/3}$ bewegen. Nur Pauli-Prinzip muss beachtet werden

wegen Coulomb-WW

2 unterschiedlich

Potentialtopfe für Protonen und Neutronen

jeder enthält n Teilchenzustände, jedes besetzt mit 2 Teilchen (Spin nach oben/unten). $T=0$, alle



Nukleonen sind in den niedrigsten möglichen Zuständen. Zustände bis zu einer bestimmten maximalen Nukleonen-Energie, der Fermienergie, sind besetzt. Anzahl von Zuständen mit Impulsen zwischen 0 und max. Impuls p_F folgt aus Integration

komplexe

$$n = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} d^3l \times d^3p = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} \quad \text{mit } V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A$$

jeder Zustand mit 2 Neutronen besetzt, also

$$n = N/2 = \frac{4\pi r_0^3 A p_{Fn}^3}{3 \cdot 6\pi^2 \hbar^3} \quad \sim p_{Fn} = \frac{\hbar}{r_0} \sqrt[3]{\frac{9\pi N}{4A}}$$

ebenso für die Protonen

$$n = Z/2 = \frac{4\pi r_0^3 A p_{FP}^3}{3 \cdot 6\pi^2 \hbar^3} \quad \sim p_{FP} = \frac{\hbar}{r_0} \sqrt[3]{\frac{9\pi Z}{4A}}$$

für z.B. $N=7 \rightarrow p_{FN}=p_{FZ} \approx 250 \text{ MeV/c}$
 $= A/2$

$T_{\max} = E_F \approx 33 \text{ MeV}$ nicht relativistisch

$$\text{mittlere kinetische Energie } \langle T \rangle = \frac{\int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} d^3p}{\int_0^{p_F} d^3p} = \frac{3}{5} E_F \\ \approx 20 \text{ MeV}$$

⊕ Was passiert mit zunehmendem / abnehmendem Zählpaar von Protonen und Neutronen?

- Fermienergie bleibt konstant, ebenso ist Tiefe des Potentialtopfes $V_0 \approx 41 \text{ MeV}$

- Energie ein Neutron oder ein Proton zu entfernen $S_n, S_p: 7-8 \text{ MeV}$

- Volumen wächst $\propto A$, ebenso die Anzahl der Zustände \rightarrow mit wachsendem N, Z werden mehr Zustände in selbigem Energieniveau gepackt, Zustände wieder näher zusammen

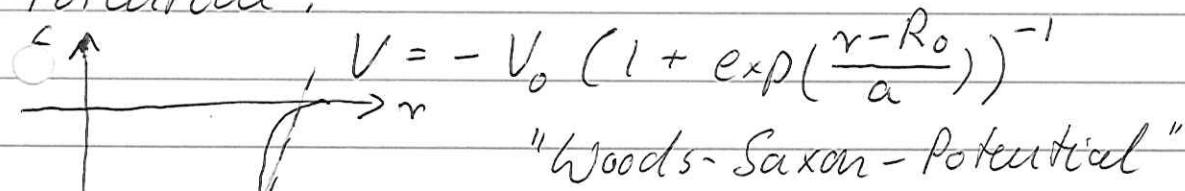
7.3 Schalenmodell

Um kennzeichnende wie Energien und Quantenzahlen diskret gebundene Zustände zu verstehen, z.B. aus Schrödingergl. für geeignetes Potential lösen \Rightarrow Schalenmodell

Evidenz für Schalenstruktur im Atomkern:
 Diskontinuitäten in Bindungsenergie (Abweichungen von Weizsäcker-Formel), Proton und Neutronenseparationsenergien (äquivalente Ionisierungsspannungen in Atomen, Fig. 1-9), Anregungsenergie von 1. angeregtem Fer-

Stand in gg-Kernen \Rightarrow bei Zoch $N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ ändern sich Eigenschaften relativ stark "magische Zahlen" deuten auf Schalenabschluß hin $\rightarrow \text{Figs 10.5-7}$

wegen kurzer Reichweite der Kernkraft u.a. Form des Potentials der (ladungs-) Dichteverteilung folgen; der Fermi-verteilung entsprechendes Potential:



Schrödingerl. schwierig zu lösen, daher zunächst Approximation durch harmonisches Potential \approx 3dim kern. Oszillat.

$$V(r) = -V_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (r^2 - R_0^2)$$

$$\text{mit } \hbar \omega_0 \approx 41 \text{ keV} \cdot A^{-1/3} \quad (\text{für } A=40 \quad \hbar \omega_0 = 12 \text{ keV})$$

$$\text{Eigenzustände } E_N = \hbar \omega_0 (N + 3/2) - V_0$$

mit $N = 2(n-1) + l \rightarrow$ Bahndrehimpalsquadratanzahl

$$\begin{cases} \text{Anzahl} \\ \text{radialer Knoten} \end{cases} \quad l = N, N-2, \dots 0 \text{ oder } 1$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Entartung } g(N) = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$$

jeweils mit Spin up & down

	4	1, 2, 3	4, 2, 0	30	70	+
	3	1, 2	3, 1	20	40	-
	2	1, 2	2, 0	12	20	+
	1	1	1	6	8	-
	0	1	0	2	2	+

$n \quad n \quad l \quad 2g(N) \quad \text{Kumulativ Parität}$

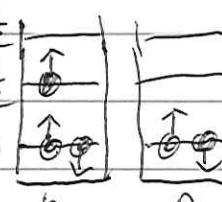
→ magische Zahlen 2, 8, 20, 40, 70, 112 Problem!
 Kästchenpotential oder Korrektes Woods-Saxon Pot.
 lösen Problem nicht  Fig. 10-8

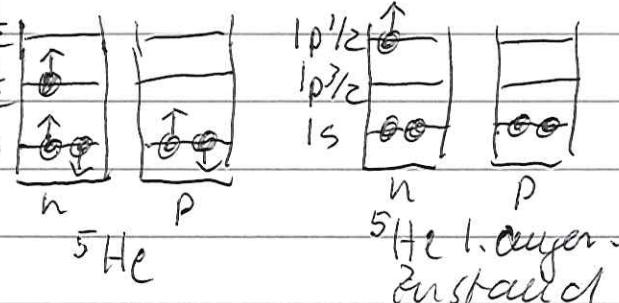
aber bisher Kopplung Nukleonspin - Bahndrehimpuls vernachlässigt

Term $f(r) \ell = \frac{1}{2}$ führt zu Aufspaltung der sonst entarteten Zustände mit $j = \ell \pm \frac{1}{2}$

1949 wurde etwa gleichzeitig von Haxel, Jeusen, Suess und Maria-Goeppert-Mayer realisiert^⑧, ein Schalenmodell mit starker Spin-Bahn-Kopplung ergibt korrekte magischen Zahlen und erklärt eine große Anzahl exp. Daten, Drehimpulse, Energien, mag. Moment von Zuständen in Kernen  Fig. 10-9
 ⑧ Phys. Rev 75(1949) 1766 und 1969  10-10

experimentelle Bestimmung der Spin-Bahn-Kopplung:
 Streuung von polarisierten Protonen oder Neutronen
 an ${}^4\text{He}$ populiert (angebandelt) Grundzustand
 von ${}^5\text{Li}$ bzw. ${}^5\text{He}$ und angeregte Zustände

${}^4\text{He}$: 1s für Protonen und $1p_{\frac{1}{2}}$ für Neutronen gefüllt, gestaut; $1p_{\frac{3}{2}}$
 p oder n populiert 1p-Zust. 1s 
 mit $j = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$



Drehimpuls wird aus der Winkelverteilung des gestreuten p oder n bestimmt. Man findet in beiden Fällen: Grundzustand mit $J^\pi = \frac{3}{2}^-$ und 1. angeregter Zustand mit $J^\pi = \frac{1}{2}^-$

4.6 bzw 7 MeV über Grundzustand

→ sehr stark attraktive Spurbahenkopplung!

vgl. Wasserstoffatom Feinstruktur 10^{-5} eV/Heit und anderes Vorzeichen (Na^- : 10^{-3} eV/Heit)

grundsätzliche Frage: warum haben wir noch die starke Kernkraft und hoher Dichte (ca $\frac{1}{4}$ des Volumens eines Kernes ist mit Nukleonen gefüllt) annehmen, daß Nukleonen sich auswärts und innen in Potential bewegen? Pauli-prinzip spielt entscheidende Rolle - energetisch brauchbarer Zustand für ein Nukleon wird durch andere Nukleonen besetzt, "Pauli-blockiert" keine Platz für Störung stehen zur Verfügung

10.4 Angeregte Zustände im Atomkern

Nahel den magischen Partikeln (Schalenabschlüssen) sind Anregungsenergien gut durch Schalenmodell reproduziert. Typ. Energieskala im 1MeV-Bereich zwischen Schalenabschlüssen werden Anregungsenergien viel kleiner (Fig 10-6) bis zu 100 keV und Spektren mit äquidistanten Linien erscheinen, wie aus Rotation z-atomare Moleküle bekannt.

Übergang 1-Teilchenanregung → kollektive Anregung Rotations- und Vibrationsanregung des ganzen Kernes

Kerne mit abgeschlossenen Schalen sind kugelförmig. Generell kann Kernform als Ellipsoid beschrieben

$$\text{werden } R_k = R_0 \left(1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{2\pi k}{3}\right) \right)$$

Halbachsen R_k mit $K=1,2,3$

Spezialfall: Rotationsellipsoide, 2 Halbachsen gleich

prolat $\gamma = 0^\circ R_1 = R_2 \leq R_3 \rightarrow \text{((((())))} R_{1,2} = R_0(1-0.32\beta)$

oblat $\gamma = 60^\circ R_1 = R_2 \geq R_3$

triaxial $\gamma = 0-60^\circ R_1 \neq R_2 \neq R_3$

- niedrigste Anzahl definierte Kerne: Rotation um Achse \perp Symmetrieachse

Energiezustände: Eigenwerte des Drehimpulsoperators

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2\Theta} J(J+1) \text{ mit Drehimpulsquantenzahl } J = 0, 1, 2, 3, \dots$$

und Trägheitsmoment Θ (behadit gg- Kerne, kein Spin). Wegen ^{Spiegel-}symmetrie um Achse senkrecht zu Sym. Achse nur gerade J .

$$A = \hbar^2 / 2\Theta$$

$$\Delta E = E_J - E_{J-2} = 4A J - 2A$$

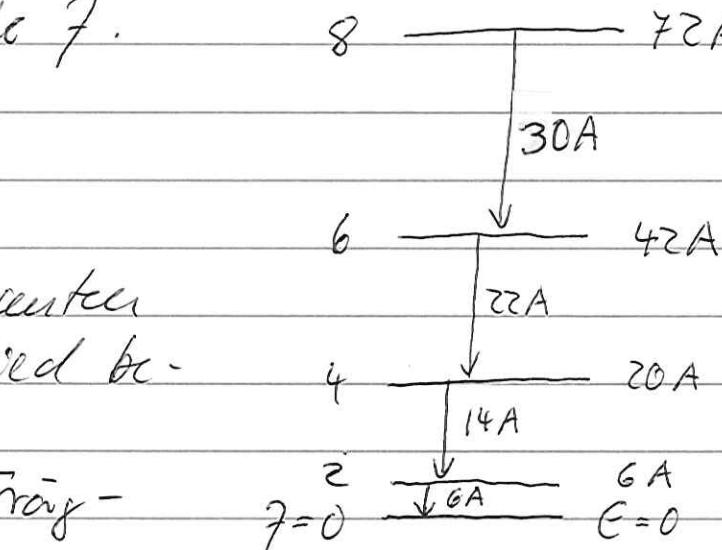
$$\Delta(\Delta E) = 8A$$

Spektren mit äquidistanten

Linien, Energienursprung bei nachbarer Linie

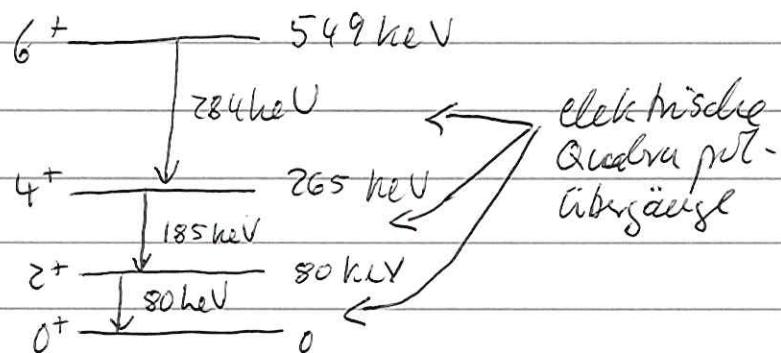
daraus berechnet man Trägheitsmoment Θ

Beispiel: ^{168}Er



$$\Delta(\Delta E) \approx 100 \text{ keV}$$

$$\rightarrow \Theta = 1.5 \cdot 10^6 \text{ MeV fm}^2 = \langle \Omega r^2 \rangle$$



für ein gutes Beispiel siehe \Rightarrow [Fg 10-11]

Fuformation über Deformation β aus Quadrupolmoment \hat{Q}_{2m} $\hat{Q}_{2m} = e \int_V r^l Y_{lm}^* \rho d^3x$

(siehe Skript Physik 5 ch13)

$$Q_{2m}^i = e \int_V r^2 Y_{2m}^* \psi_i^* \psi_i d^3x \leftarrow \text{diagonales Matrixelement}$$

und ebenso für Quadrupolübergänge

$$Q_{2m}^{ij} = e \int_V r^2 Y_{2m}^* \psi_j^* \psi_i d^3x \leftarrow \text{Übergangsmatrixelement}$$

Wenn keine Polarisierung, ergibt Winkelintegrationsintegral über Produkt von 3 Kugelflächenfunktionen eine Konstante und es bleibt für el. Quadrupolübergangs wahrscheinlichkeit

$$\mathcal{B}(E2) = \left(e \int R^*(r) r^2 R(r) r^2 dr \right)^2 \cdot \frac{1}{4\pi}$$

für Rotationsellipsoid wie oben kann aus el. Quadrupolübergangstärke $\mathcal{B}(E2)$ direkt β ausgerechnet werden z.B. für Übergang $2^+ \rightarrow 0^+$

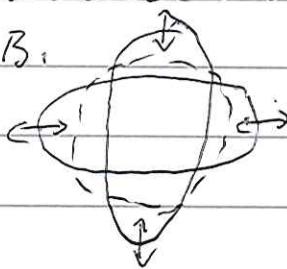
$$\mathcal{B}(E2) = \left(\frac{3}{4\pi} Ze \right)^2 R_0^4 \beta^2 \frac{1}{5}$$

$(R_3; R_{1,2} = 1.35)$

erhalte für ${}^{168}\text{Er}$ $\beta = 0.33$ Kern ist stark deformiert.
 → daraus erhält man $\Theta = 3 \cdot 10^6 \text{ MeV fm}^2$ vgl. oben →
 Systematisch said exp. Werte aus Spektren fächer
 2 klein als bei starrer Rotation des ganzen defor-
 mierten Kerns berechnet. Verständen: Fürse des
 Kern superflüssig durch Cooperpaare von Protonen
 und Neutronen, nimmt nicht die Rotation teil.

Vibrationsdauzeiten: ähnlich wie Flüssigkeitszopf
können Kerne zu Schwingungen angeregt werden

Z.B.



Oberfläche parametrisiert durch

$$R(\vartheta, \varphi, t) = R_0(1 + \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi))$$

mit Schwingungsamplituden a_{lm}

$l=0$ radiale Kompressionsschwingung, Raman, weib Kompressibilität von Kernmaterial, hohe Energien Bereich 15-20 MeV

$l=1$ Translation, allerdings Dipolschwingung von Protonen gegen Neutronen möglich "Dipolresonanz", je nach A 10-20 MeV Auftreffgeschwindigkeit

$l=2$ Quadrupolschwingungen, für Rotationenellipsoide durch 2 Parameter beschrieben $\beta(t)$ und $\gamma(t)$
(siehe oben) $R(\vartheta, \varphi, t) = R_0(1 + \beta(t) \cos \varphi Y_{20}(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta(t) \sin \varphi Y_{21}(\vartheta, \varphi))$

sequentielle β und γ -Vibratoren (Bild oben ist ein β -Vibrator)

bei kleineren Amplituden harmonisch mit Spektren

$$E_{vib}^{lm} = \hbar \omega_{lm} (n + \frac{1}{2}) \quad 0^+, 2^+, 0^+ 2^+, 4^+ \text{ etc.}$$

typische Energien im 0,5 bis 2 MeV Bereich.

Auf Vibrationsmustern sind in deformierten Kernen Rotationsbanden aufgebaut (Fig. 10-11)