

9. Multiplikative Erhaltungssätze

Symmetrioperatoren ist unitäre Transformation, U. Transformationsoperator ist herwitsch, Eigenwerte erhalten wenn $[H, U] = 0$

$$U \Psi = u_\alpha \Psi \text{ mit Eigenwerten } u_\alpha$$

$$2\text{-Teilchensystem: } U \Psi_\alpha \Psi_\beta = U_\alpha U_\beta \Psi_\alpha \Psi_\beta = u_\alpha u_\beta \Psi$$

9.1 Parität

Paritätstransformation ist räumliche Transformation

$$P(x, y, z) = (-x, -y, -z) \text{ diskrete Transformation}$$

$$P \Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r})$$

Offensichtlich $P^2 = 1$ Einheitstransformation
also nur Eigenwerte ± 1 möglich

Wenn $\Psi(\vec{r})$ eine Eigenfunktion der Parität,

$$P \Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r}) = \pi \Psi(\vec{r}) \text{ mit } \pi = \pm 1$$

$\pi = +1$ Zustand hat "gerade" Parität

-1 " " "ungerade" "

Elementarteilchen, Hadronen, Atome, Austauschbosonen sind alle in Eigenzuständen des P-Operators, haben also eine Parität

• Observable verhalten sich unterschiedlich unter Paritätstransformation

- "echte" Vektoren wie $\vec{r}, \vec{p}, \vec{E}$ ändern Verrichten unter Paritätstransformation \leftrightarrow "polare Vektoren"

- andere wie $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \vec{S}, \vec{B}$ sind unverändert oder invariant \leftrightarrow "axiale Vektoren" $P L_x = (-y)(-p_z) - (-z)(-p_y) = L_x$

- Skalarprodukte von Vektoren:

polar · polar oder axial · axial sind invariant unter $P \leftrightarrow$ "echte Skalare"

polar · axial, wie $\vec{p} \cdot \vec{L}$ ändern ihr Vorzeichen unter $P \leftrightarrow$ "Pseudoskalare"

- Transformation des räumlichen Teiles einer Wellenfunktion in Kugelkoordinaten

$$\Psi(\vec{r}) = R(r) \sum Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \text{ mit } Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = P_e^m(\cos \vartheta) \exp(i m \varphi)$$

$$P(r, \vartheta, \varphi) = (r, \pi - \vartheta, \varphi + \pi)$$

$$P \exp(im\varphi) = \exp(i m(\varphi + \pi)) = (-1)^m \exp(im\varphi)$$

$$P P_e^m(\cos \vartheta) = P_e^m(\cos(\pi - \vartheta)) = (-1)^{l+m} P_e^m(\cos \vartheta)$$

$$P Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^{l+m} Y_{lm} = (-1)^l Y_{lm}$$

- Paritätsersatzung in einem Verteilchensystem:
da die Parität π eine multiplikative Quantenzahl \rightarrow bei Paritätsersatzung ist Produkt der (intrinsischen) Paritäten aller involvierten Teilchen und ihre Relativbewegung erhalten

z.B. 2-Teilchensystem mit Wellenfunktion

$$\Psi = \Psi_\alpha(\vec{r}_\alpha) \Psi_\beta(\vec{r}_\beta) \Phi(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)$$

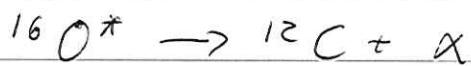
$$P\Psi = \pi_\alpha \pi_\beta \Psi_\alpha \Psi_\beta P\Phi = \pi_\alpha \pi_\beta (-1)^l \Psi \text{ wenn } \Phi \text{ durch Kugelfunktionen beschrieben}$$

- alle Messungen bisher bestätigen: em. und starke WW erhalten Parität

Beispiel: Zustände in Kerne können nach ihrer Parität klassifiziert werden, was kann nach

Paritätsverbote beim Zerfall suchen

α -Zerfall eines ausgesetzten Zustands in ${}^{16}\text{O}^*$ mit $E^* = 8.87 \text{ keV}$ und $J'' = 2^-$



$\pi^- - 1 \quad +1 \quad +1 \leftarrow$ alle gg-kerne haben im Grundzustand $J'' = 0^+$

dann ist Zerfall im Grundzustand möglich, wobei $(-1)^\ell$ negativ sein also ℓ ungerade. Da aber $A_f = 2$, $\rightarrow \ell = 2$ gerade

d.h. Zerfall nur möglich, wenn Kerenzustand entweder in ${}^{16}\text{O}^*$ oder ${}^{12}\text{C}$ eine Beimischung der entgegengesetzten Parität hat

Erwartete für erlaubten α -Zerfall $\Gamma_\alpha = 60 \text{ keV}$, messe $\Gamma_\alpha < 2 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$ also nur Obergrenze bedeutet Reduktion um Faktor $3 \cdot 10^{-12}$, d.h.

Beimischung der anderen Parität in Kernwellenfunktion $< 10^{-6}$

o Paritätszuordnung für Teilchen

man kann zeigen, daß relative Parität von Zuständen verschiedener Ladung grundsätzlich nicht abßbar ist. Gilt für elektrische Ladung, aber genauso für alle anderen Quantenzahlen.

\rightarrow Zuordnung aufgrund theor. Argumente d.h. für Hadronen mit Quantenzahlen (Q, A, S) (Ladung, Baryonzahl, Strangeness) werden 3 Paritäten definiert: $\pi_p = \pi_n = \pi_\Lambda = +1$

die Paritäten aller anderen Hadronen sind relativ dazu abßbar

z.B. Pion: beschriebe Reaktion $\pi^- + d \rightarrow n + n$

$$\overline{\Pi}_{\pi^-} \cdot \Pi_d (-1)^{l_i} = \underbrace{\Pi_n^2}_{+1} (-1)^{l_f} \quad \Pi_d = \Pi_p \cdot \Pi_n \text{ im Grundzust.}$$

mit Kenntnis einiger Eigenschaften des Deuterons ($L=0, S=1, J=1$) und der Gütauswahlregeln (Pion wird in atomaren S-Zustand eingesogen, $l_i=0$) kann man die Parität festlegen: $\Pi_{\pi^-} = -1$ ebenso Π^0 und Π^+ (Messung Π^0 : Pais et al. PRL 3 (1959) 525) alle Gleichbosonen haben negative Parität (γ, g, W^\pm, Z) Higgs $\gamma'' = 0^\dagger$ nach gegenw. Stand

Fermion-Antifermion (z.B. p und \bar{p}) haben entgegengesetzte Parität (auch aus Diractheorie erwartet)

Boson-Antiboson haben gleiche Parität

• Paritätsverletzung in der schwachen WW

ϑ - τ Puzzle: in frühen 1950er Jahren 2 Zerfälle beobachtet $\vartheta \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ und $\tau \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^-$ ϑ und τ haben Spin $S=0$ und identische Massen und Lebensdauern. dasselbe Teilchen? An das würde Parität verletzen, $S_\vartheta = S_\tau = S_{\pi^0} = 0 \approx l_f = 0$

$$\Pi_\vartheta = \Pi_{\pi^+} \cdot \Pi_{\pi^-} = +1 \quad \Pi_\tau = \Pi_{\pi^+} \cdot \Pi_{\pi^-} \cdot \Pi_{\pi^0} = -1$$

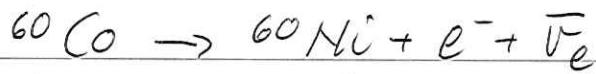
1956 Analyse aller Daten von T.D. Lee und C.N. Yang
→ keine Evidenz für Paritätsverletzung in der schwachen WW (Phys. Rev. 104 (1956) 254)

Vorschlag, wie man Paritätsverletzung feststellen kann.
Als erste führt Chien-Shiung Wu "Madame Wu",
B-Puzzlesexperten von Columbia Univ. zus. mit Tief-

Temperaturgruppe des National Bureau of Standards in Washington Weihnachten 1956 Experiment durch.

- Wie muß man Paritätsverletzung? finde Erwartungswert eines Pseudoskalars von Null verschließen. z.B. $\vec{v} \cdot \vec{s}$ P herauitsch., $P^+P^- = 1$
- $$\langle \psi | \vec{v} \cdot \vec{s} | \psi \rangle = \langle \psi | \vec{v} \cdot \vec{s} P^+ P^- | \psi \rangle$$
- $$= - \langle \psi | P^+ \vec{v} \cdot \vec{s} P^- | \psi \rangle \quad \text{da } P \text{ Verteilt Pseudo-} \\ \text{skalar verkehrt}$$
- $$= - \underbrace{\pi^2}_{\mp 1} \langle \psi | \vec{v} \cdot \vec{s} | \psi \rangle = 0$$

messe z.B. Dukkelverdeling van B -Zerfall v. polarscierende Atomeken



Kernspin polarisatior in Co-Salt durch starkes B -Feld bei sehr niedriger Temperatur

Bedingung: Zeeman-Aufspaltung $g\mu_B B \gg kT$, dann nur niedrigstes Niveau besetzt, Kernspin hat definierte Orientierung relativ zu \vec{B}

$$\text{ca } \mu_N = 3.15 \cdot 10^{-14} \text{ MeV/T} \sim kT \ll 3 \cdot 10^{-14} \text{ MeV}$$

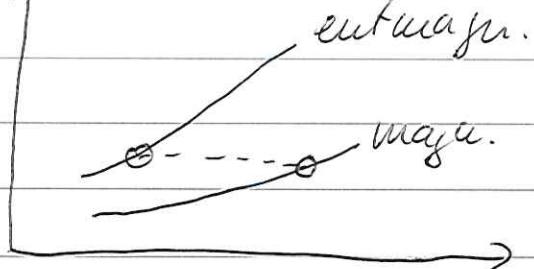
und $B \approx 1 \text{ T}$

$T \ll \text{mK}$ millikelvin

Ambler et al, Phil. Mag. 44 (1953) 216: am Ort der Kernes viel starker B -Feld

④ Kühlung durch adiabatische Demagnetisierung von Cov-Magnesium (Kobalt) Nitrat (Co saur dicke Oberflächenschicht auf $\text{CeO}_2 \text{NO}_3$ Kristall)

Eupropie S



maga. Zustand hat höhere Ordnung als entwagn. Zustand \Rightarrow Entzünden \rightarrow Entmagnetisierung kühl

(Rose-Gorter Periode)

Kühle auf ca 1K (gl. He), legt B -Feld an, Spin der paramagn. Atome (Cov) werden ausgerichtet. Abschalten B -Feld \rightarrow Kühlung

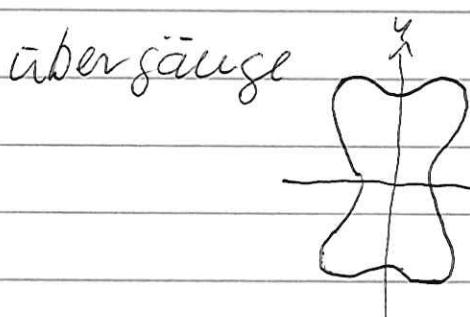
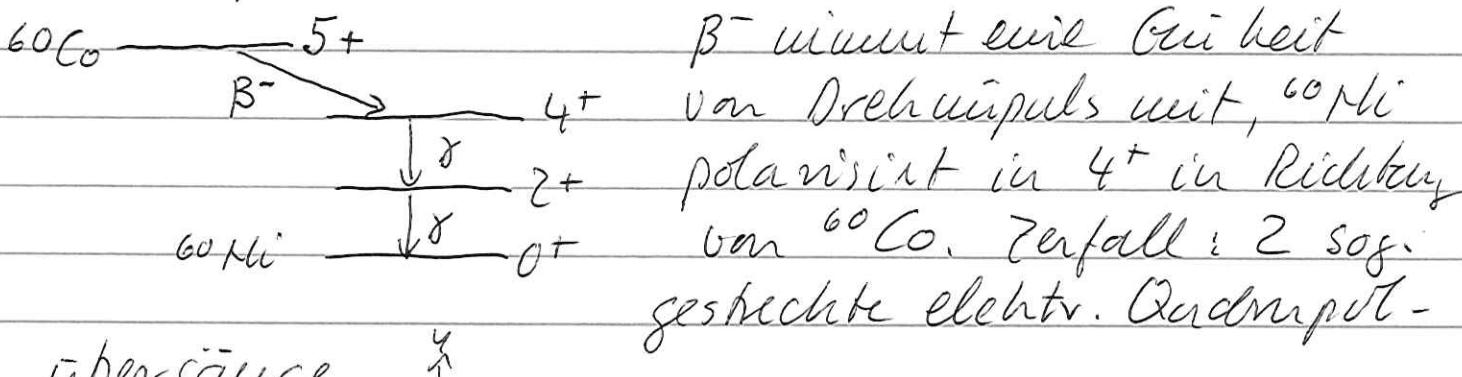
Während Kühlung wird Kernspin durch Sollwirdspule ausgenutzt \oplus und Elektroden in Richtung \vec{B} und entgegengesetzt gemessen \Rightarrow Fig. [9-1,2]

Spins

$$\uparrow \text{Spins} \quad \langle \cos \vartheta_e \rangle = \langle \psi | \frac{\vec{s} \cdot \vec{v}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{v}|} | \psi \rangle < 0 \text{ gefunden}$$

Elektroden präferenell in Richtung entgegen Kernspin auswertet, d.h. Erwartungswert des Pseudoskalars $\vec{s} \cdot \vec{v} \neq 0$ Paritätsverletzung

* Grad der Polarisierung wird gemessen durch Anisotropie der Gammastrahlen in ^{60}Ni



Polarisationsdiagramm der Gammaintensität, wenn Spindrehung in x Diff $90^\circ - 0^\circ$ ca 35%

9.2. Ladungskonjugation

Symmetrioperatoren der Ladungskonjugation C kehrt Vorzeichen aller Ladungskonjugierten Quantenzahlen um

Es sei $|N\rangle = |A, Q, S, L, \dots\rangle$ dann ergibt

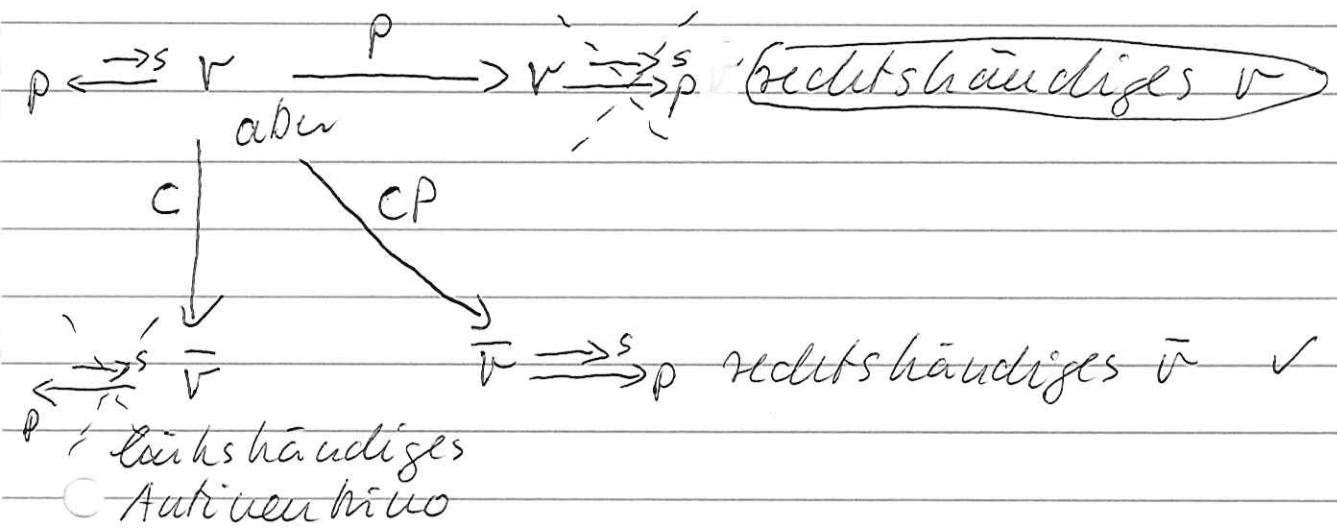
$C|N\rangle = |-N\rangle$ will für Parität $C^2 = 1$

Ladungskonjugationssymmetrie in der klassischen

Physik: Invarianz der Maxwellgl. unter Vorzeichen
wechselt der elektrischen Ladung u. Stromdichte
 $\vec{E} \xrightarrow{C} -\vec{E}$ $\vec{B} \xrightarrow{C} -\vec{B}$ $\vec{\mu} \xrightarrow{C} -\vec{\mu}$
aber $\vec{s} \xrightarrow{C} \vec{s}$ Spin unverändert

- mögliche Eigenzustände: $C|\Psi\rangle = \eta_C |\Psi\rangle$ mit
Eigenwerten $\eta_C = \pm 1$
- allerdings sind die meisten Teilchen nicht
Eigenzustände von C: $C|\pi^-\rangle = |\pi^+\rangle \neq \pm |\pi^-\rangle$
nur völlig ungeladene Teilchen können Eigen-
zustände von C sein, wenige Fälle
- Photon $C|\gamma\rangle = \eta_C |\gamma\rangle$
da E-Feld einer bewegten Ladung Vorzeichen
ändert unter C-Transformation, ordnet man zu:
 $\eta_C^\gamma = -1$ für Photon
 $\rightarrow n$ -Photon Zustände haben $\eta_C = (-1)^n$
 - π^0 zerfällt $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, also $C|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle$
Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ würde Ladungs-
Symmetrie C verletzen. feste Obergrenze
 $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma} / \Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma} < 3 \cdot 10^{-8}$
 - andre Eigenzust. e^+e^- , $\pi^+\pi^-$, $\bar{p}p$, $\bar{n}n$ {hängt von η_C Lu und Sab}
 - starke und em. WW sind invariant unter C
z.B. Reaktion $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ \pi^0 \pi^-$
Winkelverteilung und Spektren von π^+ und π^- identisch.
 - schwache WW verletzt C-Invarianz
feste experimentell: Neutrinos aus β -Zerfall
sind immer links händig, d.h. $\xrightarrow[p]{s}$

und Antineutrinos sind immer rechtshäufig
 $\rightarrow \xi_p$



Händigkeit der Neutrinos (Heliitität) im β -Zerfall erklärt Verletzung der Parität und Ladungskonjugations-Symmetrie, Hweak verhält entsprechend Konstanz + werden

- während Muadit ausgezogene Wurzel, daß schwache WW CP symmetrisch, konnte am K^0, \bar{K}^0 - System gezeigt werden: schwache WW verletzt durch CP auf 10^{-6} Niveau (CERN Exp. NA31 und NA48 am SPS, KTeV am Tevatron) \rightarrow siehe Teilchenphysikvorlesung und Skript

9.3 Zeitumkehrinvarianz?

Transformation der Zeitumkehr durch Operator T . T ist nicht unitär, also gibt es keine damit verknüpfte Observable, Zeit t ist ein Parameter (T ist antiunitär). Dennoch ist Zeitumkehrinvarianz eine nützliche Symmetrie in der Physik.

Verhalten phys. Größen unter Zeitumkehr

$$\vec{r} \xrightarrow{T} \vec{r}$$

$$\vec{p} \xrightarrow{T} -\vec{p}$$

$$\vec{s} \xrightarrow{T} -\vec{s} \quad \text{axialer Vektor wie } \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{E} \xrightarrow{T} \vec{E}$$

$$\vec{B} \xrightarrow{T} -\vec{B} \quad \text{ax. Vektor}$$

- Newton'sche Gesetze und Maxwell-Gleichungen invariant unter T , da 2. Ableitungen

- Schrödinger Gl. ist $i\hbar d\psi/dt = H\psi$

T gilt Symmetrie, wenn $[H, T] = 0$.

Erfüllt, wenn $T\psi(t)$ und $\psi(-t)$ dieselbe Schrödinger Gl. erfüllen $i\hbar dT\psi(t)/dt = HT\psi(t)$

der einfachste Versuch $T\psi(t) = \psi(-t)$ schlägt fehl, Gesche $-t = t'$ und erhält

$$-i\hbar d\psi(t')/dt' = H\psi(t')$$

Korrektur Ansatz Wigner $T\psi(t) = \psi^*(-t)$

betrachte freies Teilchen mit Impuls \vec{p}

$$\psi(\vec{r}, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)\right)$$

zeitumgekehrte Wellenfunktion

$$T\psi(\vec{r}, t) = \psi^*(\vec{r}, -t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} + Et)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{i}{\hbar}(-\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)\right)$$

\Rightarrow beschreibt Teilchen mit Impuls $-\vec{p}$. d.h. man kann $\psi(\vec{r}, t)$ nicht als Teilchen, das in der Zeit nachwärts läuft, interpretieren. Physikalische Interpretation von T ist Umkehr der Bewegung

$$T|\vec{p}, \vec{\tau}\rangle = |\vec{p}, -\vec{\tau}\rangle$$

- Tests von T -Symmetrie? Keine observablen Ergebnisse

werte. Aber T -Invarianz impliziert Symmetrie von Reaktionsraten in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung nach Konzeption für Phasenraum
"detailed balance"  Fig. 9-3)

guter Test in starker WW

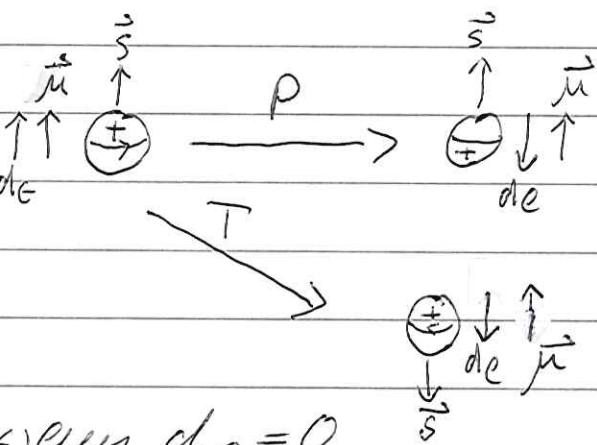
em WW: Elementarteilchen mit Spin \vec{s} dürfen kein elektrisches Dipolmoment haben. Würde sowohl P als auch T verletzen*

Vorstellung Teilchen als Kugel mit räumlich asym. Ladungsverd., Richtung von \vec{s} fest. Vorwärtsrichtung fest und Richtung magnet. Dipolmoment $\vec{\mu}$

T und P nur gute Symm., wenn $d_C = 0$

Neutron: $d_C < 2.9 \cdot 10^{-26} \text{ e} \cdot \text{cm}$

Elektron: $d_C = (0.07 \pm 0.07) 10^{-26} \text{ e} \cdot \text{cm}$



- CPT-Theorem: unabhängig von Schrödinger 1951 und Lüders 1954 postuliert für praktisch jeden vorstellbaren Hamiltonoperator gilt $[CPT, H] = 0$ generalisiert durch Pauli 1955: jede lorentzinvariante, relativistische Feldtheorie, die kausal ist, ist CPT invariant

eigige Streittheorien und Theorien der Quantenphys.
verletzter CPT (und damit Lorentzianomie)

Konsequenz von CPT Anomalie: unsere Welt
und eine zeitumgekehrte, paritätsumgekehrte Ante-
welt müssen sich identisch verhalten.

Lebensdauern und Massen von Teilchen und
Antiteilchen müssen identisch sein

$$|m_p - m_{\bar{p}}| / m_p < 2 \cdot 10^{-9}$$

$$|\tau_{\mu^+} - \tau_{\mu^-}| / \tau_{\text{ave}} < (2 \pm 8) \cdot 10^{-5}$$

Zukunft: Messung von Eigenschaften von
Antihelium, z.B. 1s-2s Übergang auf 10^{-15}
Kürzlich gemessen: ACIS am CTC

rel. Differenz des Rastes für Ladungsverhältnisse
Antideuterium - Deutrium ($0.9 \pm 0.5 \text{ (stat)} \pm 1.4 \text{ (syst.)} \cdot 10^{-4}$)

Antihelium 3 - Helium 3 ($-1.2 \pm 0.9 \text{ (stat)} \pm 1.0 \text{ (syst.)} \cdot 10^{-3}$)

mit Info über Proton und Neutron \rightarrow

rel. Unterschied in Bindungsenergien

$$\Delta E_{\text{dd}} / E_d = -0.04 \pm 0.05 \text{ (stat)} \pm 0.12 \text{ (syst.)}$$