Relativistische Kinematik

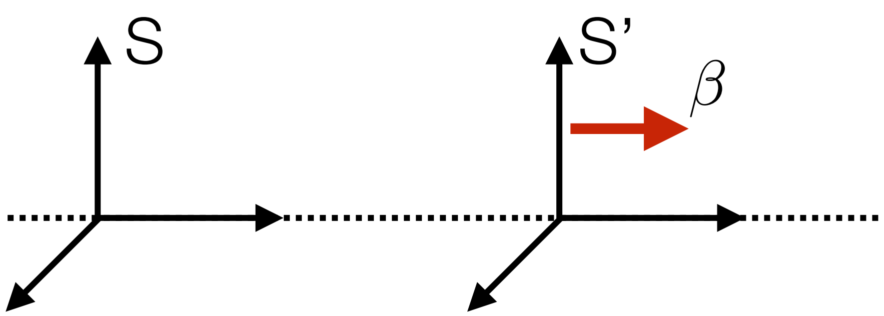
15.4.2016

Klaus Reygers
Physikalisches Institut
Heidelberg University

$$\beta = v/c \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Orts-Zeit-Vierervektor: $s = (ct, x, y, z)$ häufig $c = 1$: $s = (t, x, y, z)$

Lorentz-Transformation:



$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Lorentz-Kontraktion:
Bewegtes Objekt (ruhend in S') erscheint in S verkürzt $L = \frac{L'}{\gamma}$

Beispiel: Pb-Pb-Kollision am LHC ("Kollision zweier Pfannkuchen")

Zeit-Dilatation:
Bewegte Uhr (ruhend in S') geht in S langsamer $t = \gamma t'$

Beispiel: Myonen der kosmischen Strahlung kommen am Erdboden an

Vierer-Vektor: verhält sich unter Lorentz-Transformation so wie Orts-Zeit-Vierervektor

Skalarprodukt zweier Vierervektoren: $a \cdot b = a_0 b_0 - \vec{a}\vec{b}$

$a = (a_0, \vec{a}), \quad b = (b_0, \vec{b})$

Skalarprodukt von 4-er-Vektoren ist invariant unter Lorentz-Tanzformation

Energie-Impuls-Vierervektoren:

Eigenzeit: $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$

Geschw. im Laborsystem: $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

Def. Eigengeschwindigkeit: $\vec{\eta} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \gamma \cdot \vec{v}$

Relativistischer Impuls: $\vec{p} = m \cdot \vec{\eta} = \gamma \cdot m \cdot \vec{v}$

Def. relativistische Energie: $E = \gamma \cdot m \cdot c^2$

Energie-Impuls-Vierervektor: $p = (E, p_x, p_y, p_z)$

Skalarprodukt: $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = \gamma^2 m^2 - \gamma^2 m^2 \beta^2 = \gamma^2 m^2 (1 - \beta^2) = m^2$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2 + p^2$

Beispiel:
Mittlere Flugstrecke eine Pions mit einem Impuls von p = 1 GeV/c
(mittlere Lebensdauer: τ = 2,6·10^{-8} s, m = 0.14 GeV/c^2)

$$\begin{aligned}
\langle L \rangle &= \gamma \tau v = \gamma \tau \frac{p}{\gamma m} = \tau \frac{p}{m} \\
&= 2{,}6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s} \cdot \frac{1\,\mathrm{GeV}/c}{0{,}14\,\mathrm{GeV}/c^2} = 2{,}6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s} \cdot 7{,}14 \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}/\mathrm{s} \\
&= 56\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Wie viele Pionen sind nach einer Flugstrecke von 3 m noch nicht zerfallen?

$$n = n_0 \exp(-\frac{t}{\gamma\tau}) = n_0 \exp(-\frac{L}{\gamma\tau\beta c}) = n_0 \exp(-\frac{L}{\langle L \rangle})$$

$$\Rightarrow n/n_0 \approx 95\%$$

Schwerpunktsystem: System, in dem die Summe der 3er-Impulse verschwindet

Beispiel: Kollision zweier Teilchen

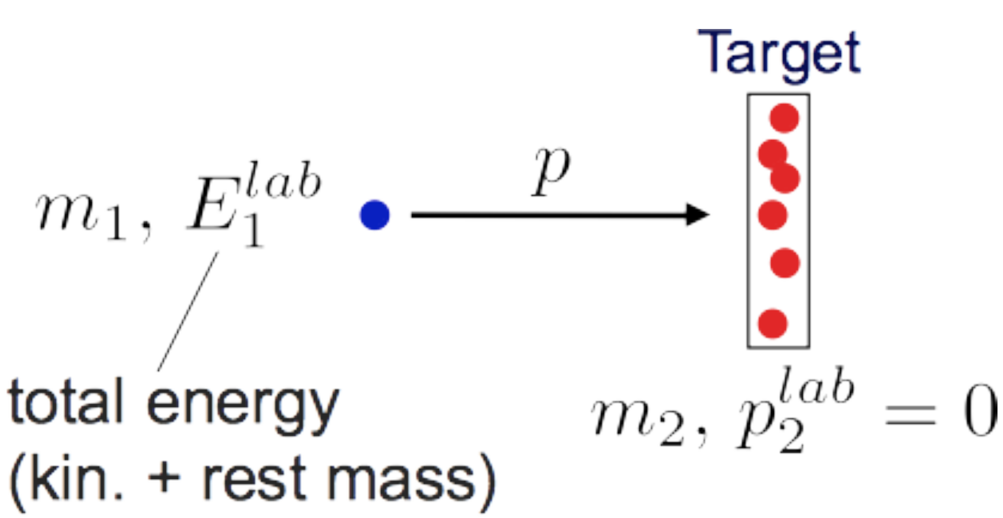
Gesamtenergie im Schwerpunktsystem:

$k_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ $\qquad$ $k_2 = (E_2, \vec{p}_2)$

$$\sqrt{s} \equiv E^*_{\text{cm}} = E^*_1 + E^*_2 = \sqrt{(k^*_1 + k^*_2)^2} = \sqrt{(k_1 + k_2)^2}$$

Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems: $$0 \stackrel{!}{=} \gamma_{\text{cm}}(p_{\text{cm}} - \beta_{\text{cm}} E_{\text{cm}}) \Rightarrow \beta_{\text{cm}} = \frac{p_{\text{cm}}}{E_{\text{cm}}}$$

Beispiel: Fixed-Target-Experiment



$$k_1 = (E_1^{lab}, \vec{p}_1^{\,lab}), \quad k_2 = (m_2, \vec{0})$$

$$s = (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2 k_1 k_2$$
$$= m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1^{lab} m_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1^{lab} m_2}$$

Beispiel: LHC (p+Au)

proton, E_1 = 4 TeV

proton, E_2 = 1,58 TeV

Schwerpunktsenergie? Geschw. des CM-Systems im Laborsystem?

$$k_1 = (E_1, 0, 0, p_1), \quad k_2 = (E_2, 0, 0, -p_2) \quad p_1 \approx E_1,\ p_2 \approx E_2$$

$$s = (k_1 + k_2)^2 = \underbrace{2m_p^2}_{\approx 0} + 2k_1 k_2 \approx 4E_1 E_2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{s} = 2\sqrt{E_1 E_2} = 5\,\mathrm{TeV}$$

$$\beta_{\mathrm{cm}} = \frac{p_{\mathrm{cm}}}{E_{\mathrm{cm}}} \approx \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} = 0{,}43$$

Beispiel: 9 GeV Elektron trifft auf 4 GeV Positron
Schwerpunktsenergie? Geschwindigkeit des CM-Systems?

$$k_1 = (E_1, 0, 0, p_1),\ \ E_1 = 9\,\mathrm{GeV},\ \ p_1 = \sqrt{E_1^2 - m_e^2} \approx E_1$$

$$k_2 = (E_2, 0, 0, -p_2),\ \ E_2 = 4\,\mathrm{GeV},\ \ p_2 = \sqrt{E_2^2 - m_e^2} \approx E_2$$

$$s = (k_1 + k_2)^2 \approx (E_1 + E_2)^2 - (E_1 - E_2)^2 = 4E_1 E_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{s} = 2\sqrt{E_1 E_2} = 12\,\mathrm{GeV}$$

$$\beta_{\mathrm{cm}} = \frac{p_{\mathrm{cm}}}{E_{\mathrm{cm}}} = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} = 4/13 = 0.3$$

Beispiel: Schwellenenergie

Welche Energie benötigt ein Myon-Neutrino, damit folgende Reaktion ablaufen kann?

$$\nu_\mu + e^- \to \mu^- + \nu_e$$

(m_e = 511 keV, m_μ = 207 m_e, $m_\nu \approx 0$)

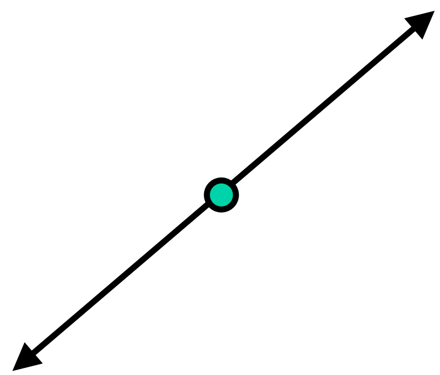
$$s_{\text{min}} = m_\mu^2 = (k_1 + k_2)^2 = m_e^2 + 2E_{\nu_\mu} m_e$$

$$\Rightarrow E_{\nu_\mu,\text{min}} = \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{2m_e} = \left[\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2 - 1\right]\frac{m_e}{2}$$

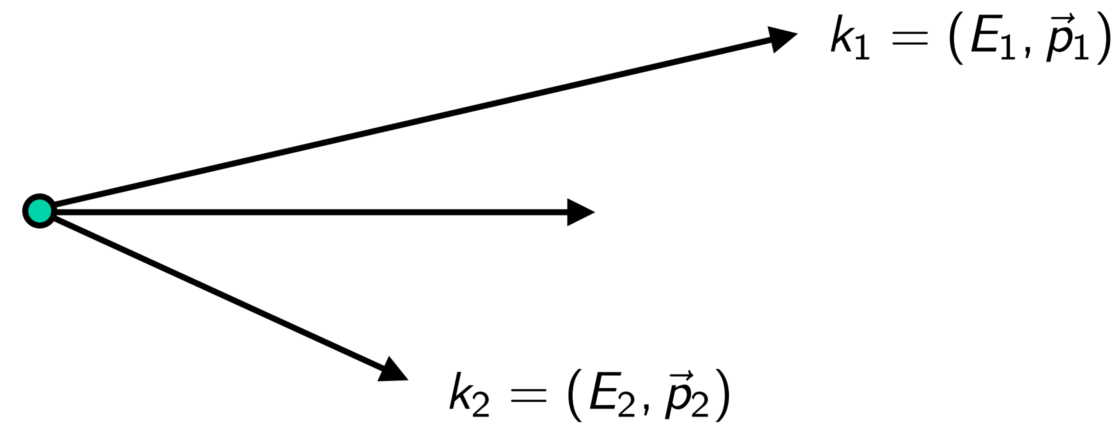
$$= 10{,}9\,\text{GeV}$$

Teilchenzerfall: Invariante Masse

Im Ruhesystem des Mutterteilchens:



Im Laborsystem:



$$
\begin{aligned}
m^2 = (k_1 + k_2)^2 &= m_1^2 + m_2^2 + 2k_1 k_2 \\
&= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2\vec{p}_1 \vec{p}_2 \\
&= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2p_1 p_2 \cos\theta
\end{aligned}
$$

Beispiel: Zerfall des Higgs-Teilchens in zwei Photonen (H → γγ)

$$m^2 = 2p_1 p_2 (1 - \cos\theta)$$