2. Werkzeuge der Kern- und Teilchenphysik

2.1. Zerfallsgesetz

Zerfälle, wenn Zustand X energetisch in der Lage ist, Übergang nach Zustand Y zu machen

Verschiedene Arten von Zerfällen

- angeregtes Atom zerfällt unter Emission eines Photons in Grundzustand
  $A^* \longrightarrow A + \text{Photon}$ im eV-Bereich
- ebenso ein Atomkern $X^* \longrightarrow X + \gamma$ "Gammazerfall" Photonen in Energiebereich 100 keV – 10 TeV "Gammastrahlung"
- Kerne mit zu vielen Protonen o. Neutronen

$$ {}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + e^- + \bar{\nu}_e $$

$$ {}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + e^+ + \nu_e $$

β-Teilchen "Betazerfall"

- Kerne mit zu vielen Nukleonen

$$ {}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He $$

α-Teilchen "Alphazerfall"

– aber auch $\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$ oder $\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

↳ neutrales Pion

die meisten bekannten Teilchen sind instabil, d.h. sie zerfallen "spontane Übergänge", also ohne Einwirkung von aussen, folgen Zerfallsgesetz Zerfallsrate $\left| \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \right|$ ← charakterisiert durch Zerfallskonstante λ Dimension $[s^{-1}]$

durch Integration $N(t) = N(0) \exp(-\lambda t)$

↳ Anzahl zur Zeit $t=0$

Anzahl zur Zeit t

Lebensdauer $\tau = 1/\lambda$ in der Zeit τ wird Anzahl auf $1/e$ reduziert

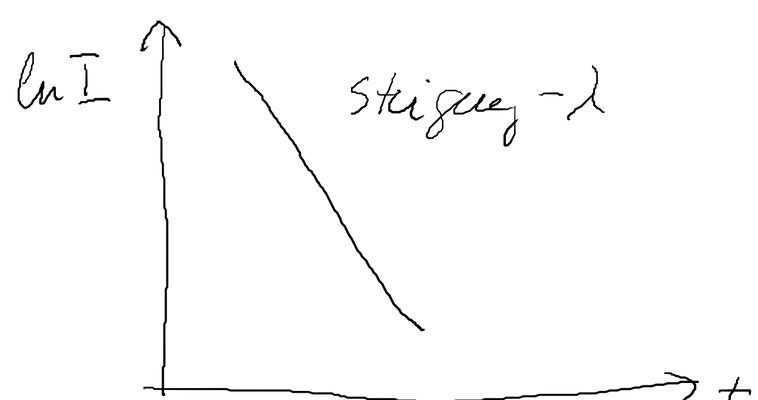
$t_{1/2} = \tau \ln 2$ Halbwertszeit: Zeit, in der sich Anzahl auf die Hälfte reduziert

entsprechend nach $2t_{1/2}$ $N = \frac{N(0)}{4}$, $3t_{1/2}$ $N = \frac{N(0)}{8}$, ...

Messung von $N(t)$ über "Zerfallsintensität"

$I(t) = -\frac{dN}{dt} = \underbrace{N(0)\lambda}_{I(0)} \exp(-\lambda t)$ ← sieht aus wie Lambert-Beer'sches Gesetz $I(x) = I(0)\exp(-\mu x)$ ↳ Absorptionskoeff.

- Zerfall ist statistischer Prozess, τ bezieht sich auf die mittlere Zeit für Zerfall
- ebenso bezieht sich μ auf mittlere Distanz bis Neutron absorbiert



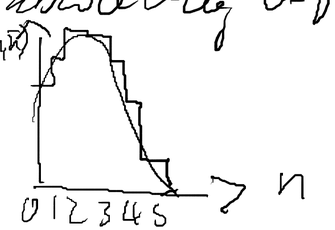
- wahrscheinlichste Zeit für Zerfall at $t=0$, dann exponentieller Abfall
- Wahrscheinlichkeit, in bestimmten Zeitintervall einen Anzahl von Zerfällen n zu beobachten, Auftreten statistisch, charakterisiert durch Poisson-Verteilung

$$P(n,\bar{n}) = \frac{\bar{n}^n \exp(-\bar{n})}{n!} \qquad \bar{n}: \text{mittlere Anzahl von Zerfällen}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n,\bar{n}) = 1$$

charakteristische für Poisson: Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\bar{n}}$

σ charakterisiert Variation Zerfälle in Intervall



2.2. Fermi's Goldene Regel und Phasenraum

Berechne Übergangsrate von Zustand α nach Zustand β basierend auf Störungstheorie (PTP4). Voraussetzung: WW, die für Übergang verantwortlich ist, ist schwach $H = H_0 + \underbrace{H_{int}}_{\text{klein}}$, so daß α und β in Basis von Eigenfunktionen zu H_0 entwickelt werden können. Rate $|\alpha\rangle$ nach $|\beta\rangle$

$$W_{\alpha\beta} = \frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} \underbrace{|\langle \beta | H_{int} | \alpha \rangle|^2}_{\text{Matrixelement von } H_{int}} \underbrace{\rho(E)}_{\text{Zustandsdichte im Endzustand}}$$

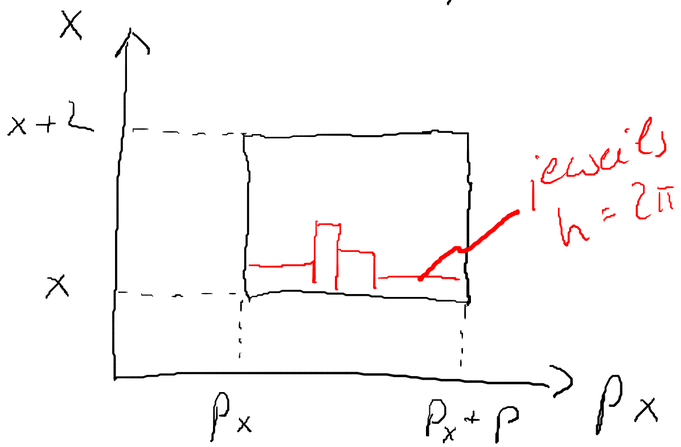
"Fermi's Goldene Regel" erfunden von Dirac 1927
2nd Golden rule

$\rho(E)$: Anzahl von Endzuständen pro Energieintervall

→ Kehrwert von $W_{\alpha\beta}$ ergibt Lebensdauer τ, wenn nicht noch Übergänge in weitere Zustände möglich

im 6-dimensionalen Phasenraum (x, y, z, p_x, p_y, p_z)
nehmen Zustände wegen Unschärferelation kleine Volumina $h^3 = (2\pi\hbar)^3$ ein

- in 1 Dimension: für Positionen zwischen x und $x+L$ und Impulse zwischen p_x und $p_x + p$ kann die Fläche Lp mit $N = \frac{Lp}{(2\pi\hbar)}$ Zuständen gefüllt werden



damit wird $\rho(E) = \frac{dN}{dE} = 2\frac{dN}{dp}\cdot\frac{dp}{dE}$

↳ zu jedem Zustand mit Energie E gibt es 2 Zustände mit p und $-p$

$$\boxed{\frac{dN}{dE} = 2\frac{L}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}} = \frac{L}{\pi\hbar c}\sqrt{\frac{mc^2}{2E}}}$$

nicht relativistisch

- in 3 Dim: $N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3x\, d^3p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int p^2 dp\, d\Omega$

mit $E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2 \rightsquigarrow$ $N = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int p^2 \frac{E}{pc^2} dE$ und damit

$$\boxed{\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{V E p c}{2\pi^2(\hbar c)^3}}$$

" 1-Teilchen Phasenraum "

- 2 Teilchen in 3 d: mit totalem Impuls $p = p_1 + p_2$ (im cm-System: $p_1^2 = p_2^2$)

und Energie $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$

Anzahl von Zuständen wie für 1 Teilchen, aber Dichte unterschiedlich wegen Bedingung $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ ↝ für ein gegebenes ϵ_1 liegt ϵ_2 fest

$$g_2 = \frac{dN_2}{d\epsilon} = \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 p_1 c}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \int d\Omega_1$$

NB: - am Ende fällt V immer wegen entsprechender Normierung der Wellenfunktionen weg

- bei entarteten Zuständen mit Entartungsgrad multiplizieren

2.3. Reaktionsrate

- Rate von Zerfällen, siehe oben, Zerfallsgesch und τ bzw λ durch Fermi's Goldene Regel
- wenn Teilchen durch Kollisionen 'registriert' z.B. Rutherfordstreuung (elastisch) $\alpha + Au \longrightarrow \alpha + Au$ streuen, in Winkel ϑ

Rate der Streuereignisse gegeben durch

- einfallenden Teilchenfluß N_b (b steht 'beam')
- Anzahl Streuzentren pro Flächeneinheit N_t (t steht 'target')
- Wirkungsquerschnitt σ Dimension Fläche

nach einer typischen Länge λ ('mittlere freie Weglänge')
passiert Streuereignis $\lambda = \frac{1}{n \cdot \sigma}$ mit Dichte der Streuzentren n $\left(\frac{\text{Atome}}{\text{cm}^3}\right)$
(Vernachlässigung Bewegung der Streuzentren)
Wahrscheinlichkeit, daß einfallendes Teilchen gestreut wird

$$\boxed{P = 1 - \exp(-x/\lambda)}$$ ohne Kollision $N = N_0 \exp(-x/\lambda)$

für $x \ll \lambda$ "dünnes Target" Entwicklung der exp. Funktion

$$P \simeq \frac{x}{\lambda} = \sigma \cdot \underbrace{n \cdot x}_{\text{Flächendichte der Streuzentren } N_t}$$

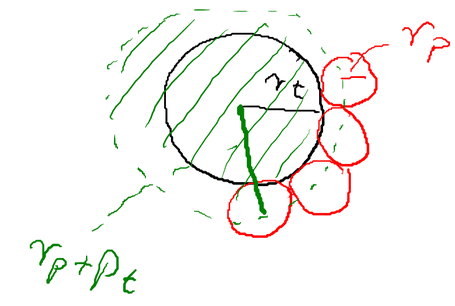
Streurate $R\left[\frac{1}{s}\right] = N_b\left[\frac{1}{s}\right] \cdot N_t\left[\frac{1}{\text{cm}^2}\right] \cdot \sigma\,[\text{cm}^2]$

σ kann generell für alle möglichen Prozesse definiert werden, z.B. elastische oder inelastische Streuung, Absorption, Reaktion $A+B \to C+D+\ldots$

für verschiedene mögliche Prozesse addieren sich Wirkungsquerschnitte zu "totalem Wirkungsquerschnitt" $\sigma = \sigma_{el} + \sigma_{inel} + \dots$

σ_t: partielle Wirkungsquerschnitte, typischerweise winkelabhängig d.h. differentieller Wirkungsquerschnitt relevant, also $\frac{d\sigma}{d\vartheta}$ oder $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und entsprechend differentielle Rate

$$\frac{dR}{d\Omega} = N_b \cdot N_t \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

- Skala für Wirkungsquerschnitte gegeben durch Konzept des "geometrischen Wirkungsquerschnitts" besonders sinnvoll, wenn Reichweite der WW klein gegenüber Dimensionen des Streupartikels

Targetteilchen mit Radius r_t
Projektile mit Radius r_p
} $\sigma_{geo} = \pi (r_t + r_p)^2$