8. Symmetrien und Erhaltungssätze

Der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen wurde zuerst von Emmy Noether 1918 erkannt (Noether-Theorem)
die Invarianz der Wirkung unter einer einparametrigen stetigen Transformationsgruppe hat die Existenz einer Erhaltungsgröße zur Folge und umgekehrt hat jede Erhaltungsgröße die Existenz einer Symmetrie (mindestens infinitesimale) der Wirkung zur Folge.
sowohl im Lagrange wie im Hamiltonformalismus mögl., also sowohl für klassische wie auch Quantensysteme, hier (PEP4) nur letzteres

8.1 Allgemeine Betrachtungen

Operator Q entspricht einer physikalischen Observablen wenn $\langle Q \rangle$ reell, d.h. Operator Q muß hermitesch sein: Q^{+} adjungierter Operator gleich Q ($Q^{*}_{ki} = Q_{ik}$)
Observable erhalten wenn $\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = 0$
Zeitentwicklung des Erwartungswerts durch Ehrenfesttheorem gegeben:

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [Q,H] \rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle (QH-HQ) \rangle$$

damit ist Observable Q erhalten wenn der entsprechende Operator mit dem Hamiltonoperator des Systems kommutiert. $[Q,H] = 0$
Eigenfunktionen von H können so gewählt werden, daß sie auch Eigenfunktionen von Q sind

Sollen die durch Q bzw U generierten infinitesimalen Transformationen definieren eine Symmetrie.
z.B. Generator der Rotation: Drehimpuls
" Translation: Impuls (siehe unten)

Eine Symmetrieoperation sei definiert durch einen Operator U: $\psi'(\vec{r},t) = U\,\psi(\vec{r},t)$
Normierung der Wellenfunktion muß garantiert sein, d.h. Operator U muß unitär sein
$U^+ = U^{-1} \quad U^+U = UU^+ = 1$ (Einheitsmatrix)
U ist ein Symmetrieoperator, wenn $U\psi$ dieselbe Schrödingergleichung erfüllt wie ψ. Das ist der Fall, wenn U mit dem Hamiltonoperator des Systems kommutiert $[H,U] = (HU - UH) = 0$
– damit schließt sich der Kreis

2 Möglichkeiten
a) wenn U auch hermitesch, dann gibt es eine entsprechende erhaltene Observable
b) wenn U nicht hermitesch, kann es einen hermiteschen Operator (Generator) F geben, so daß
$U = \exp(i\varepsilon F)$ für Transformation ε
für kleine ε:
$$U\psi = \exp(i\varepsilon F)\psi = \left(1 + i\varepsilon F + \frac{(i\varepsilon F)^2}{2!} + \dots\right)\psi$$
dann ist Erwartungswert von F erhalten und F ist Generator der Sym.operation U.

(bemerke: $U^+U = \exp(-i\varepsilon F^+)\exp(i\varepsilon F) = \exp(i\varepsilon(F - F^+)) = 1$
da F hermitesch)

die 2 Möglichkeiten entsprechen 2 Typen von Transformationen und Erhaltungssätzen

b) kontinuierliche Transformationen: U geht kontinuierlich in Einheitsoperator über (Translation, Rotation, ...) → führen zu additiven Erhaltungssätzen

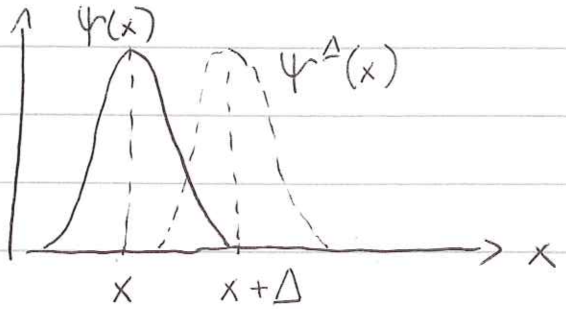
a) diskontinuierliche Transformationen: immer diskrete Zustände, z. B. Inversion von ψ mit U unitär und hermitesch $U^2 = UU^+ = UU^{-1} = 1$
→ führen zu multiplikativen Erhaltungssätzen

- Verknüpfung: Addition im Exponenten $\hat{=}$ Multiplikation, (zu Fall b)

- Translation als Beispiel kontinuierlicher Transformation: U^Δ verschiebt Teilchen um Δ in x

$$U^\Delta \psi(x) = \psi^\Delta(x)$$

Translationsinvarianz: $\psi^\Delta(x+\Delta) = \psi(x)$



Δ kann sehr klein gemacht werden und $\psi^\Delta(x+\varepsilon)$ kann dann um x expandiert werden

$$\psi(x) = \psi^\Delta(x+\varepsilon) = \psi^\Delta(x) + \varepsilon \frac{d\psi^\Delta}{dx} + \dots$$
$$\simeq \left(1 + \varepsilon \frac{d}{dx}\right)\psi^\Delta(x)$$
$$= \left(1 - \varepsilon\, p_x/i\hbar\right)\psi^\Delta(x)$$

endliches Δ durch n Schritte ε, $\Delta = n\varepsilon$

$$\psi^\Delta(x) = \left(1 + \Delta \frac{p_x}{i\hbar}\right)\psi(x)$$ (mult. von links mit $1 - \frac{\Delta p_x}{i\hbar}$ und vernachlässige Δ^2 ...)

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \varepsilon \frac{p_x}{i\hbar}\right)^n \psi(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \Delta \frac{p_x}{i\hbar}\cdot\frac{1}{n}\right)^n \psi(x)$$

$$= \underbrace{\exp\left(-\frac{i\Delta p_x}{\hbar}\right)}_{U^\Delta}\psi(x)$$

$U^\Delta = \exp(i\Delta F) \rightsquigarrow F = -\frac{p_x}{\hbar}$

Translationsinv. beinhaltet Impulserhaltung

8.2 Additive Erhaltungssätze

- elektrische Ladungserhaltung: wurde bereits 1941 von Pauli mit der Eichinvarianz der elektromagnetischen WW (keine absolute Skala für Potential) verknüpft, bei zugleich unendlicher Reichweite (Rev. Mod. Physics 13 (1941) 203)

$$\boxed{\sum q_i = \text{konstant}}$$

experimentelle Tests: $e \to \nu \gamma$ wäre durch alle anderen Erhaltungssätze erlaubt. Zerfall im Atom würde Loch in einer Schale hinterlassen, das durch ein weniger gebundenes Elektron und ein Röntgenquant gefüllt würde $\tau > 4.6 \cdot 10^{26}\,y$ (PDG)
neuer Limit Borexino Dez. 2015 $\tau > 6.6 \cdot 10^{28}\,y$
ladungsverletzender β-Zerfall des Neutrons
$n \to p\, \nu_e \bar{\nu}_e$ im Vergleich zu $n \to p\, e^- \bar{\nu}_e$

$$\frac{\Gamma(n \to p \nu \bar{\nu})}{\Gamma_{tot}} < 8 \cdot 10^{-27}$$

- Baryonzahlerhaltung: weise jedem Teilchen analog zu elektrischen Ladung eine Baryonzahl oder baryonische Ladung A zu.
Quarks haben $A = 1/3$ Antiquarks $A = -1/3$
$A = 1$ für $p, n, \Delta, \Lambda, \ldots$ alle Baryonen haben $A = 1$
$A = -1$ $\bar{p}, \bar{n}, \bar{\Lambda}, \ldots$ alle Anti " $A = -1$
finde experimentell $\boxed{\sum A_i = \text{Konstant}}$

Suche nach Baryonzahl verletzenden Zerfällen
z.B. $\Gamma(\tau^- \to \Lambda\pi^-)/\Gamma_{tot} < 7.2 \cdot 10^{-8}$ oder
Zerfall des Protons, Suche in großen unterirdischen superreinen Wassertanks mit vielen Photomultipliers, Nachweis von Cherenkov licht der leichten Zerfallsteilchen $\tilde{\tau} > 2.1 \cdot 10^{29}$ y
vgl. mit Alter des Universums $1.3 \cdot 10^{10}$ y

Kein zwingender theoretischer Grund, kein Generator einer entsprechenden Symmetrie bekannt.
Suche nach einer 5. Kraft die an Baryonzahl koppelt und unendliche Reichweite hat, zusätzlich zu Gravitation, die an Masse koppelt
Kraft zwischen 2 Nukleonen oder Kernen

$$F = \underbrace{-G M_1 M_2 / r^2}_{\text{Gravitation } F_g} + \underbrace{\eta^2 A_1 A_2 / r^2}_{\text{5. Kraft}}$$

Packungsdichte von Atomen M/A variiert um ca 10^{-3}, Suche nach Differenz zwischen träger und gravitativer Masse $F = ma$ und F_g mit $g = \frac{M_e G}{R_e^2}$ $\quad \Delta\kappa = \frac{\Delta a}{g}$ gesucht

Experiment von Eötvös et al (Ann. Physik 68 (1922) 11) ergibt Grenzwert für Effekt $\Delta\kappa < 10^{-8}$
Reanalyse 1986 zeigte Effekt, neuere Experimente (Massen suspendiert in großen Wassertanks in der Nähe von Cliffs, z.B. Pallisades bei New York) bestätigen dies nicht. In der Tat umgekehrtes Argument:
da keine entsprechende langreichweitige WW

gefunden wird und es daher keine theor. Basis für Baryonzahlerhaltung gibt, kein Grund, daß A exakt erhalten, nur 'empirische Regel'
in einigen Grand Unified Theories GUT zerfällt Proton je nach Unifizierungsmasse auf Zeitskala $10^{29}-10^{30}$ y

- <u>Leptonzahlerhaltung</u>

1953 als empirisches Gesetz von Konopinski & Mahmoud eingeführt um Abwesenheit bestimmter Prozesse zu erklären
z.B. $\gamma \to e^+e^-$ und $\gamma \to p\bar{p}$ im Feld eines 3. Teilchens aber nie $\gamma \to e^-\mu$ oder $\mu \to e\gamma$
↝ Zuordnung einer Leptonzahl zu jeder Generation von Leptonen, $L_e = 1$ für e^- und ν_e etc.
empirisch ist die Leptonzahl für jede Generation erhalten

$$\boxed{\sum_i L_{e_i} = \text{konstant}} \quad \boxed{\sum_i L_{\mu_i} = \text{konst.}} \quad \boxed{\sum_i L_{\tau_i} = \text{konst.}}$$

- sind Neutrino und Antineutrino identisch (Majorana Neutrino) oder nicht identisch (Dirac Neutr.)?
erste Experimente (R. Davis 1955) an Reaktoren sagen 'nicht identisch'

$\nu_e + {}^{37}Cl \to e^- + {}^{37}Ar$ wird beobachtet
(Sonnenneutrinos) ebenso wie ${}^{37}Ar + e^- \to {}^{37}Cl + \nu_e$ electron capture
am Reaktor aus Spaltung neutronenreiche Kerne die durch β^--Zerfälle $\bar{\nu}_e$ produzieren
Suche nach $\bar{\nu}_e + {}^{37}Cl \to e^- + {}^{37}Ar$ nicht beob-

achtet, Obergrenze für Wirkungsquerschnitt
$\sigma \lesssim 2 \cdot 10^{-42} cm^2$

- sind ν_e und ν_μ wirklich verschieden?
1962 Brookhaven Nat. lab Alternating Gradient Synchrotron AGS 15 GeV $p + B \to \pi^- + X$
untersuche Zerfallskanal $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$
stoppe Myon in 13.5 m Stahl (Reichweite für μ bis 17 GeV ok)
richte verbleibenden Strahl, nur Neutrinos, auf flüssiges Wasserstofftarget und beobachte mit 10 t Funkenkammer, was passiert

$\bar{\nu}_\mu + p \to n + \mu^+$? } leicht zu unterscheiden,
$\bar{\nu}_\mu + p \to n + e^+$? } min. ionisierendes Teilchen und elektromagn. Schauer

nach 8 Monaten und 10^{14} ν auf Target:
56 Ereignisse mit μ und Null mit e, später noch dramatisch verbessert mit selbem Ausgang
$\to$ $\nu_e \neq \nu_\mu$
(Nobelpreis für diese Experimente 1988 an L. Lederman, M. Schwarz und J. Steinberger)
aber: inzwischen wissen wir daß Neutrinos mischen, Neutrinooszillationen beobachtet (Nobelpreise 2015). Das ist nur möglich, wenn Neutrinos Masse haben (Maki et al. 1962, Pontecorvo 1968)
Masseneigenzustände $\leftrightarrow$ Flavoreigenzustände

sind Majorananeutrinos wirklich ausgeschlossen?
Suche nach neutrinolosem, doppeltem β-Zerfall

$^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z+2}Y + 2e^-$ $\quad \Delta L_e = 2 \quad$ $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$

Kann dieses Neutrino im 2. Schritt absorbiert werden $\nu_e + n \to p + e^-$, wozu es ein ν_e braucht? dann wären beide identisch (Vorschlag Furry 1939, seitdem Suche)

benutze das zerfallende Element als hochauflösendes Kalorimeter, in dem Zerfallsenergie (Rückstoß Kern + Elektronen) gemessen wird

Klassiker →

Heidelberg-Moskau Experiment: 11.5 kg ^{76}Ge in Gran Sasso Tunnel ($^{76}Ge \to {}^{76}As \to {}^{76}Se$, einfach Zerfall nicht mögl. da ^{76}As energetisch höher als ^{76}Ge) $\tau = 1.9^{+16.8}_{-0.7} \cdot 10^{25}$ y in 2001

Teil d. Kollab berichtet in 2004 Beobachtung von 24 ± 7 Zerfällen $\hat{=}$ $T^{0\nu}_{1/2} = 1.19^{+0.37}_{-0.23} \cdot 10^{25}$ y

neues Experiment mit mehr Ge, weniger Untergrund, GERDA, Messung 2011-2013, 21.6 kg·yr

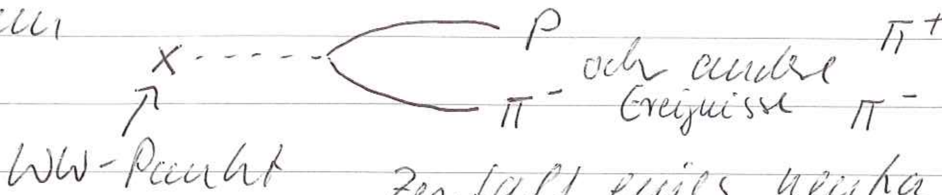
Kein Signal, bester Fit 0 Ereignisse

Limit $N^{0\nu} < 3.5 \longleftrightarrow T^{0\nu}_{1/2} > 2.1 \cdot 10^{25}$ y

Start größere Version GERDA II Ende 2015 + eine Reihe andere laufende und geplante Experimente

• Strangenesserhaltung

Seit Ende der 1940er Jahre beobachtetes Puzzle: sogenannte V-Teilchen werden mit großer Wahrscheinlichkeit produziert, aber zerfallen langsam



Zerfall eines neutralen Teilchens

$\Lambda^0 \to p + \pi^-$ bzw $K^0 \to \pi^+ + \pi^-$
bei einigen GeV Strahlenergie ist Wirkungsquerschnitt für Reaktion $\pi^- + p \to \Lambda + K^0$
$\sigma_{\pi p \to \Lambda K} \simeq 1\,mb \mathrel{\hat{=}} 10\,\%$ von $\sigma_{\pi p \to \Delta}$
typisch für starke WW.
Aber Zerfallsbreite $\Gamma_\Lambda = \frac{\hbar c}{\tau c} = \frac{197\,MeV\,fm\,s}{10^{-10}\,s \cdot 3 \cdot 10^{23}\,fm} = 6.6 \cdot 10^{-12}\,MeV$
also schwache WW
(Vgl. $\Gamma_\Delta \simeq 100\,MeV$, starke WW)
Pais-Regel (1952): Kaonen und Lambdas werden in starker WW produziert, aber zerfallen schwach.
Grund: Erhaltung von Strangeness in assoziierter Produktion, d.h. Produktion in Paaren mit $S = 1$ und $S = -1$
Strangeness 1953 von Gell-Mann und Nishijima eingeführt (11 Jahre vor Quarks), um Pais-Regel zu erklären

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_i S_i = \text{konst für starke und em. WW} \\ \sum_i S_i \neq \text{konst für schwache WW} \end{array}}$$

$$\begin{array}{lcccccl} & \pi^- & + p & \to & \Lambda & + K^0 & \text{Produktion starke WW} \\ S & 0 & + 0 & & -1 & +1 & \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccc} & \Lambda \to & p & + \pi^- & & \text{und} & K^0 \to & \pi^+ & + \pi^- & \\ S & -1 & 0 & 0 & \Delta S = 1 & & +1 & 0 & 0 & \Delta S = -1 \end{array}$$

in schwachem Zerfall $\Delta S = \pm 1$ möglich

- <u>Isospinerhaltung</u>

Heisenberg 1932: Neutron und Proton sind 2 Ladungszustände eines Teilchens, des Nukleons
belegt 1937 durch H. Bethe: Analyse von pp- und pn-Streudaten zeigt nach Abzug von Coulombeffekten, daß pp und pn WW gleich in Stärke und Reichweite. Ebenso Massen von ^3H und ^3He
$\rightarrow$ führt zu Konzept des Isospins
- Nukleon ist ein 2-Zustandssystem (Dublett) charakterisiert durch eine Quantenzahl 'Isospin' die in einem internen Hilbertraum 2 mögl. Orientierungen ergibt, p und n
Formalismus analog zu Spin
$I = 1/2 \quad I_3(p) = +1/2 \quad I_3(n) = -1/2$
Rotationen im Isospinraum durch Spinoren analog zu Paulispinoren

<u>2-Nukleon-System</u>: Symmetrisierung der Wellenfunktion, wie für 2-Elektronensystem bezüglich Spin
Sym. Triplett $\quad pp \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(pn+np) \quad nn$
antisym. Singulett $\frac{1}{\sqrt{2}}(pn-np)$
mit Wellenfunktion $\chi(I,I_3)$ wird
Triplett $\chi(1,1) \quad \chi(1,0) \quad \chi(1,-1)$
Singulett $\quad \chi(0,0)$.

<u>Atomkerne</u>: Z Protonen und N Neutronen $A = N+Z$

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^{A} I_i \qquad I_3 = \sum_i I_{3i}$$

el. Ladung $Q = Ze = \sum_{i=1}^{A} q_i = e\sum_{i=1}^{A}(I_{3i}+1/2) = e(I_3 + A/2)$

$\curvearrowright I_3 = Z - A/2 = \frac{1}{2}(Z-N)$ fest für jeden Atomkern
aber für jeden Atomkern gibt es A Isospinvektoren
je von Länge 1/2, die vektoriell zu I koppeln
$I_{max} = A/2 = \frac{1}{2}(N+Z)$ und wegen $I_3 = \frac{1}{2}(Z-N)$
$\curvearrowright I_{min} = \frac{1}{2}|Z-N|$
d.h. in jedem Kern sind die Zustände durch eine Quantenzahl I, zusätzlich zu J^π, charakterisiert mit $\frac{1}{2}|Z-N| \leq I \leq \frac{1}{2}(Z+N)$

Vergleiche Niveauschemata von benachbarten Kernen mit gleichem A, sogenannte Isobare.
Zustände mit gleichem I, J^π formen Multipletts.
Da I_3 unterschiedlich, wird die Isospinsymmetrie der starken WW etwas durch die em. WW (verschiedene Coulombabstoßung) gebrochen.
Skala $\alpha \leftrightarrow \alpha_s$

<u>Beispiel</u>: ${}^7_3Li^4$ und ${}^7_4Be^3$

I_3 $\frac{1}{2}(3-4) = -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}(4-3) = \frac{1}{2}$ $\quad \left.\right\}$ für beide $I_{min} = 1/2$, $I_{max} = 7/2$

sehr ähnliche Niveauschemata, nur Verschiebung um ca 0.9 MeV ⇒ $\boxed{\text{Fig. 8-2}}$
alle niedrigen Zustände sind $I = 1/2$
Energiedifferenz der Isobaren:

$$\Delta E = E(A, Z+1) - E(A, Z) = \frac{dE}{dZ}(\Delta Z = 1)$$

$$= \frac{dE_{Cb}}{dZ} - \underbrace{(m_n - m_p)c^2}_{1.29\,\text{MeV}}$$

für gleichförmig geladene Kugel $E_{Cb} = \frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{R}$

$$\frac{dE_{Cb}}{dZ} = \frac{6}{5}\frac{Ze^2}{R} \simeq \frac{6}{5}\frac{Ze^2}{1{,}2\,\text{fm}\cdot A^{1/3}}$$

für $Z = 3$ und $A = 7$ $\frac{dE_{Cb}}{dZ} = 2.26$ MeV
$\rightsquigarrow \Delta E = 2.26 - 1.29 = 0{,}97$ MeV gut im Vergleich zu Daten mit $\Delta E = 0.86$ MeV $\leftrightarrow$ Isospin gute Symmetrie in Kernen
Es gibt auch Multipletts über mehr als 2 Kerne
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Fig 8-3}}$

andere Hadronen: I_3 wird über die Valenzquarks zugeordnet und $I \geq |I_3|$, Wert steht fest, wenn ganzes Multiplett bekannt
z.B. Pion

$$\left.\begin{array}{ll} \pi^+ = (u\bar{d}) & I_3 = 1 \\ \pi^- = (\bar{u}d) & -1 \\ \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) & 0 \end{array}\right\} \text{Isospintriplett mit } I = 1$$

Zerfall $\pi^0 \to \gamma\gamma$ $I = 1 \to I = 0$ em WW bricht I-Symmetrie, aber erhält I_3
Lambda $\Lambda = (uds)$, keine geladenen Partner also $I_3 = 0$, $I = 0$ Isospinsingulett
Zerfall $\Lambda \to p + \pi^-$

	uds	uud	$\bar{u}d$		
I_3	0	1/2	-1	$\Delta I_3 = -1/2$	schwache WW verletzt Erhaltung von I, I_3, S
I	0	1/2	1	$\Delta I \geq 1/2$	
S	-1	0	0	$\Delta S = 1$	