c) Streuung an ausgedehnter Ladungsverteilung

starke wie oben $f(\vec{q}^2) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d\vec{r}\, V(r) \exp\left(\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right)$

mit Poisson-Gleichung $\nabla^2 V = 4\pi \rho(r) Ze^2$
($\int \rho(r) d\vec{r} = 1$) und Green'schem Theorem

$$\int d\vec{r} \exp\left(\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) V(r) = -\frac{\hbar^2}{q^2}\int d\vec{r} \exp\left(\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) \nabla^2 V(r)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{q}^2)|^2 = \frac{4m^2Z^2e^4}{q^4} \underbrace{\left|\int d\vec{r} \exp\left(\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) \rho(r)\right|^2}_{\text{Formfaktor } F(\vec{q}^2)}$$

der Formfaktor ist die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung und enthält im Wirkungsquerschnitt die ganze Strukturinformation von

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma^R}{d\Omega} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma^M}{d\Omega} \cdot |F(\vec{q}^2)|^2}$$

spinloses Streuteilchen α ... Elektronenstreuung

Beispiel: 400 MeV/c $e^- + {}^{40}Ca$ ⇒ Fig. 6-1

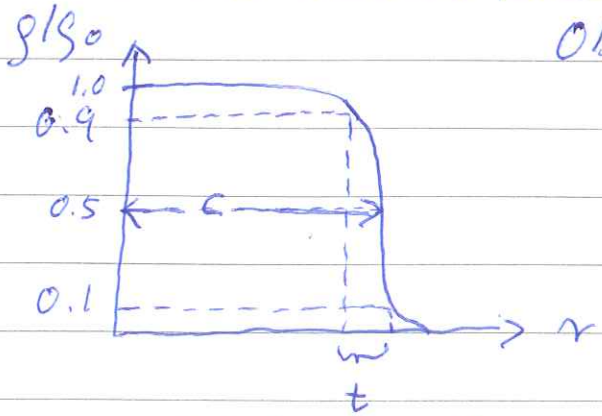
6.1.1 Ladungsverteilung von Atomkernen

misst differentiellen Wirkungsquerschnitt über möglichst großen Bereich von ϑ oder q^2 und extrahiert $\rho(r)$
Schwierigkeit: je größer die Ausdehnung, desto schneller fällt $F(\vec{q}^2)$, daher Inversion der Beziehung oben als $\rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d\vec{q}\, F(\vec{q}^2) \exp(-i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar)$ schwierig

Beispiel [Fig. 6-1] q bis $3.5\,fm^{-1} \hat{=} 700\,MeV$ Wirkungsquerschnitt fällt über 12 Größenordnungen!

Ergebnis: Fermiverteilung $\rho(r) = \frac{\rho_0}{1+\exp((r-c)/a)}$

$c \equiv$ Halbdichteradius $\simeq (1.18A^{1/3} - 0.48)\,fm$



Oberflächendicke $t = (4\ln 3)a$
$= 4.4a \simeq 2.4\,fm$

$\sqrt{\langle r^2\rangle} \simeq 0.94 \cdot A^{1/3}\,fm$

Volumen $V \propto A$
Kernmasse $\propto A$
} Dichte $\simeq$ konst

Vergleiche mit vereinfachtem Modell einer Kugel konstanter Dichte mit scharfem Radius R, gewählt so, daß rms Radius mit gemessenem übereinstimmt

$$\langle r^2\rangle = 4\pi \int_0^R \frac{3r^4\,dr}{4\pi R^3} = \frac{3}{5}R^2$$

setze von oben ein $\sqrt{\langle r^2\rangle} = 0.94\,A^{1/3}\,fm$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{R = 1.2 \cdot A^{1/3}\,fm}$ "equivalent sharp sphere radius"

Ladungsverteilung verschiedener Kerne $\Rightarrow$ [Fig 6-2]

6.1.2 Struktur des Nukleons

2 Nukleonen: Proton und Neutron

$m_p = 938.3\,MeV/c^2$ $m_n = 939.6\,MeV/c^2$

Proton, soweit bisherige Messungen zeigen, stabil $\tau > 2.1 \cdot 10^{29}$ y SNO sehr große unterirdische Tank mit ultrareinem Wasser

Neutron $\tau = 880.3 \pm 1.1\,s$ $\quad n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$

beide Nukleonen haben Spin 1/2 und "anomale" magnetische Momente (siehe Kapitel 5)

$\langle \mu_s \rangle_p = \pm 2.79\,\mu_N \leftrightarrow g_p = 5.58$

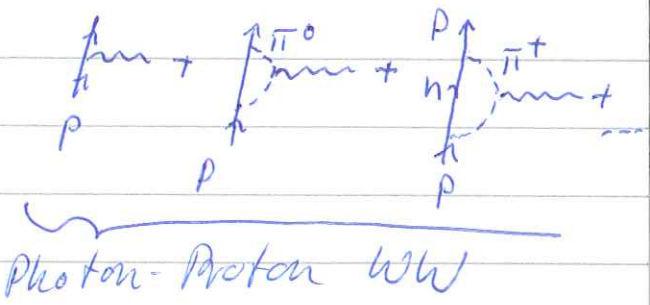
$\langle \mu_s \rangle_n = \mp 1.91\,\mu_N \quad g_n = -3.82$

→ zeigt, Nukleonen haben Struktur

Quarksubstruktur + "Pionwolke"

(uud bzw udd) Valenz

+ Gluonen + $q\bar{q}$ - See



Aufklärung der Struktur: Streuung von Elektronen an Nukleon, zusätzliche Komplikation: beide Streupartner haben Spin $S = 1/2$

→ 3 Beiträge zum Wirkungsquerschnitt

(1) WW Ladung Elektron – Ladung Nukleon Rutherf.? } Mott

(2) " Strom Nukleon – magn. Moment Elektron

(3) " Strom Elektron – magn. Moment Nukleon } Dirac

Wirkungsquerschnitt für punktförmiges Dirac-Nukleon ($g = 2$) mit Masse M und relativistisches Elektron

$$\frac{d\sigma^{Dirac}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{Rutherford}}{d\Omega}\left(\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{q^2}{2M^2}\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right) = \frac{d\sigma^{Mott}}{d\Omega}\left(1 - \frac{q^2}{2M^2}\tan^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)$$

Matrixelement $\propto \langle \mu_p \rangle \propto \frac{1}{M}$

" $\propto$ zeitlich integriertes B-Feld am Ort des Nukleons $\propto$ Ablenkung, d.h. $\propto q$ $\Rightarrow \sigma \propto q^2/M^2$

Vorzeichen von ③ relativ zu ② aufpassen!
hängt von Rechnung für 4er Vektoren ab, in unserer Rechnung $q = (\epsilon - \epsilon', \vec{p} - \vec{p}')$ ist für elastische Streuung q^2 immer negativ (bzw. bei Vernachlässigung Rückstoß $q^2 = -\vec{q}^2$ und daß gilt Vorzeichen wie oben in $d\sigma^{Dirac}/d\Omega$.
In Minkowski-Rechnung steht hier ein "+", Manchmal wird auch $Q^2 = -\vec{q}^2$ verwendet, dann auch "+"

für ausgedehnte Nukleonen: Streuquerschnitt wird (analog zu Atomkern) durch Formfaktoren modifiziert. Aber: jetzt ein Formfaktor, um ausgedehnte Ladungsverteilung zu berücksichtigen "elektrischer Formfaktor" $G_E(q^2)$ und ein Formfaktor um ausgedehnte Magnetisierung zu berücksichtigen "magnetischer Formfaktor" $G_M(q^2)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{Mott}}{d\Omega}\left[\frac{G_E^2 - \frac{q^2}{4M^2}G_M^2}{1 - \frac{q^2}{4M^2}} - \frac{q^2}{2M^2}G_M^2 \tan^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right] \Rightarrow \boxed{\text{Fig. 6-3}}$$

Elektron-Nukleon elastischer Streuquerschnitt in 1 Photon Austauschnäherung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big/\frac{d\sigma^{Mott}}{d\Omega} = A(q^2) + B(q^2)\tan^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

"Rosenbluth Formel"

↳ misst für jedes q^2 bei verschiedenen Winkeln (Variation ϵ und ϑ) ↘ $G_E(q^2)$ und $G_M(q^2)$

erste Messungen: Hofstadter et al 1956 in Stanford, 200 MeV Elektronen
Info über Neutron: Vergleich ep und ed (Hofstadter 1961) ⇒ Fig 6-4

Ergebnis: bei moderatem $q^2 < 1\ GeV^2$

$$G_E^p(q^2) \simeq \frac{G_M^p(q^2)}{\langle \mu_p \rangle} \simeq \frac{G_M^n(q^2)}{\langle \mu_n \rangle}$$

funktionale Form $G(q^2) \simeq \frac{1}{(1 + q^2/0.73)^2}$ "Dipol-Form"

↳ in GeV^2

Fouriertransformiert ergibt exponentielle Verteilung von Ladung und Magnetisierung $\rho = \rho_0 \exp(-\sqrt{0.73}\, r/\hbar c)$

rms-Radius des Protons: $G_E(q^2) = \int d\vec{r} \exp\left(\frac{i\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) \rho(r)$

$$G_E(q^2) = 4\pi \int r^2 dr \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} \rho(r) \quad (\text{wie oben } q \equiv |\vec{q}|)$$

entwickle für $\frac{qr}{\hbar} \ll 1$ $\sin(qr/\hbar) = \frac{qr}{\hbar} - \frac{(\frac{qr}{\hbar})^3}{3!} + \frac{(\frac{qr}{\hbar})^5}{5!} \cdots$

(also $qc \ll \frac{\hbar c}{r} = \frac{197\ MeV\,fm}{1\ fm}$)

$$\rightarrow G_E(q^2) = 1 - \frac{1}{6}\frac{q^2}{\hbar^2}\langle r_{Ep}^2 \rangle + \frac{1}{120}\frac{q^4}{\hbar^4}\langle r_{Ep}^4 \rangle \cdots$$

mit $\langle r_{Ep}^2 \rangle = \int \rho(r)\, r^2 d\vec{r}$ mittlerer quadratischer Ladungsradius

d.h. für kleine Abstände im Nukleon

$$\frac{dG_E}{dq^2} = -\frac{1}{6}\langle r_{Ep}^2 \rangle \quad \text{bei } q^2 = 0$$

Steigung el. Formfaktor als Funktion von q^2 bei ganz kleinen q^2

$$r_{Ep}^{rms} = 0.879 \pm 0.008$$

Zukunft: aus Messungen MAMI $q^2 = (0.0038 - 0.98)\ GeV^2$

benötige $\Delta\theta = 0.2\%$ Schwierigkeit: extrem genaue Winkelmessung, bei niedrigsten q^2 $\vartheta = 10$ mrad, benötige $\Delta\vartheta = 10\,\mu$rad wegen $\frac{1}{4}$ Abh. Bronn

- Feld wurde 20 Jahre als vollständig verstanden betrachtet, in letzten 10 Jahren durch neuere Messungen 2 Krisen was Nukleonformfaktor angeht
- alternativ sehr genaue Messung des rms-Radius

des Protons ergibt 4% genaueren Wert, Abweichung um 5 σ; sehr genaue Messung des Lambshift myonischer Atome (Pohl et al Nature 466 (2010) 213) hängt von Überlapp der Myonwellenfunktion mit Proton ab

$$E(nS) \simeq -\frac{R_\infty}{n^2} + \frac{L_{1S}}{n^3} \leftarrow \text{Lambshift 1S}$$
WW des μ mit dem Vakuum

durch unterschiedliche n-Abhängigkeit können Rydbergkonstante und Lambshift (1S) sehr genau vermessen werden, z.B. Übergang 1S-2S (für Lamb) und 2S-HL_7 (wie $8D_{5/2}$) mit ganz geringer Sensitivität Lambshift. Effekt endlicher Größe $\simeq 1.5 \cdot 10^{-4}$ der sehr kleinen Lambshift, aber Übergangsfrequenz auf 10^{-11} genau gemessen $r_{Ep}^{rms} = 0.84087 \pm 0.00039$

Diskrepanz ungelöst, neue Exp. geplant

- Messungen mit Rückstoßpolarisation (Trenne G_E, G_M Streuung long pol Elektr.) $\leftrightarrow \vec{e} + \vec{p} \to e + \vec{p}$

nicht konsistent mit Messung Wirkungsquerschnitt und Rosenbluth Separation, insbes höhere q^2 ⇒ Fig 6-5

wo ist das Problem? nichtrelativistische Behandlung mit $|\vec{q}|^2$ als einzigen freien Parameter und 1-Photon Austausch funktionieren nicht. 2-Photon Austausch gerade bei Rosenbluthsep. besonders schlimm. höhere Ordnung sehr kompliziert, 3 komplexe Amplituden, genaue Messung Polarisationstransferamplituden → G_E und G_M für Q^2 bis $\simeq 10\,GeV^2$ für Proton und Neutron

- genaue Kenntnis Ladungsverteilung Neutron ⇒ Fig 6-6
- Vergleich mit Berechnungen in Rahmen verschiedener Modelle gute Tests für Struktur des Nukleons

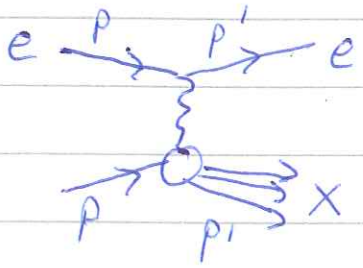
⇒ Fig 6-7

6.2 Inelastische Streuung

Nukleon hat angeregte Zustände, da im Gegensatz zu Elektron ausgedehntes Objekt, insbesondere Spin 3/2 möglich

und Frage: können wir Bestandteile des Nukleons sehen? → inelastische ep-Streuung

d.h. im cm-System wird nicht nur Impuls sondern auch Energie übertragen



Elektron $p = (E, \vec{p})$ $p' = (E', \vec{p}')$

Proton $P = (M, 0)$ $P' = (E_h', \vec{P}')$

↳ $W + T$

Proton kann in mehrere Hadronen aufbrechen. Hadronischer Endzustand hat inv. Masse W und kinetische Energie T

Elektron-Seite: $q^2 = -4EE' \sin^2(\frac{\vartheta}{2})$ relativistisch immer negativ, Intervall raumartig

Proton-Seite: $q^2 = W^2 - M^2 - 2M\nu$ mit $q = (\nu, \vec{q})$

d.h. Kollision komplett bestimmt durch 2 unabhängige Variable q^2 und $\nu = E - E' = E_h' - M$

von oben: $\nu = \frac{-q^2 + W^2 - M^2}{2M}$

wenn Streuung elastisch, ist $W^2 = M^2$ und $q^2 = -2M\nu$ oder $\nu = -\frac{q^2}{2M}$; d.h. Grad der Inelastizität kann gemessen werden durch Abweichung ν von $-q^2/2M$

bilde Quotient $x = -\frac{q^2}{2M\nu}$ $\quad 0 \leq x \leq 1$

beschreibt Inelastizität

der Streuung $x = 1$ ist elastische Streuung

Wirkungsquerschnitt wird damit doppelt differentiell; wieder bestimmt durch 2 Formfaktoren, die jetzt von q^2 und ν abhängen und "Strukturfunktionen" heissen.

im Labor: $$\frac{d^2\sigma}{dq^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2\hbar^2}{q^4}\frac{\epsilon'}{\epsilon\pi}\left[W_2(q^2,\nu)\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + 2W_1(q^2,\nu)\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right]$$

vgl. mit elastischer Streuung

$$W_2 \longleftrightarrow \frac{G_E^2 + b G_M^2}{1+b} \qquad W_1 \longleftrightarrow b G_M^2 \quad \text{mit } b = \frac{-q^2}{4M^2}$$

Beispiel Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von Energieübertrag ν oder von ϵ'

4.879 GeV $e+p$ bei $\vartheta = 10°$ ⇒ Fig 6-8

starker elastischer Peak $\epsilon' = 4.522$ GeV bzw

$$\epsilon - \epsilon' = 0.357\,\text{GeV} = -\frac{q^2}{2M_p}$$

gefolgt von inelastischen Peaks, die angeregten Zuständen des Nukleons entsprechen bei

W (MeV)	bzw	$x = -q^2/2M\nu$
1232	Δ	0.47
1430	N^*	⋮
1520	N^*	
⋮		

Breite dominiert durch "natürliche Breite"

$\Gamma = \hbar c/\tau c$ für $\Delta(1232)$ ist $\Gamma \simeq 120$ MeV typisch für Zerfall durch starke WW $\tau \simeq 1.6\,\frac{fm}{c} = 5.5\cdot 10^{-24}$ s

$$\Delta^+ \longrightarrow \begin{matrix} p + \pi^0 \\ n + \pi^+ \end{matrix}$$

Was passiert bei immer höherer Stoßenergie?
- mit wachsendem ϵ und q^2 bewegen sich die zu einem best. W gehörenden Peaks immer mehr gegen $x=1$ und sind zunehmend durch Formfaktoren unterdrückt.
Alle ausgedehnten Objekte "verschwinden" wenn q^2 nur groß genug.
Überraschung: ein großer Kontinuumspeak erscheint, der nicht unterdrückt ist ⇒ Fig 6-9
→ das ist Streuung des Elektrons an viel kleineren Konstituenten des Nukleons, den Quarks nennt man "tief-inelastische Streuung"

6.2.1 Partonen

Tiefinelastische Lepton-Nukleon Streuung beschrieben durch elastische Streuung an punktförmigen Konstituenten des Nukleons, genannt "Partonen"

die Strukturfunktionen $W_{1,2}$ gewinnen in diesem Regime eine neue physikalische Bedeutung und bekommen daher neue Namen

$$F_1(q^2,\nu) = W_1(q^2,\nu) \qquad F_2(q^2,\nu) = \frac{\nu W_2(q^2,\nu)}{M}$$

$$\frac{d\sigma}{dq^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2\hbar^2}{q^4}\frac{\epsilon'}{\epsilon\nu}\left(F_2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{2\nu}{M}F_1\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Wenn Streuung punktförmig, dann dürfen die $F_{1,2}$ nicht von q^2 abhängen (Formfaktor konst. für Punktverteilung), sondern sind nur Funktionen von x

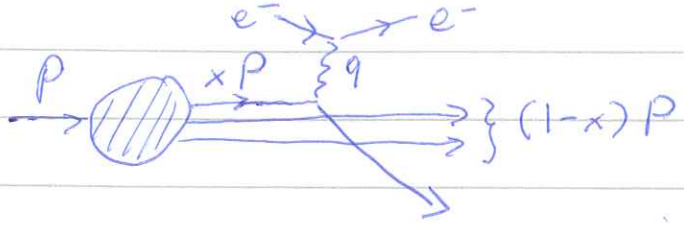
das nennt man "Bjorken scaling" nach Vorschlag von J.D. Bjorken 1967
mit $-q^2 \to \infty$ und $\nu \to \infty$ bleibt F endlich und hängt nur von Verhältnis $x = -q^2/2M\nu$ ab
da x dimensionslos, gibt es in tiefinelastischer Streuung keine Massen- oder Längenskala
$\leftrightarrow$ "Skaleninvarianz" der tiefinel. Streuung
nur $x \equiv$ "Bjorken Skalenvariable"
Experiment: Friedman, Kendall, Taylor 1969 Stanford (Nobelpreis 1990) bestätigen Bjorken-Hypothese
SLAC $E \simeq 4-18$ GeV $\vartheta = 6° - 26°$ $-q^2 = 1-8$ GeV^2
so gewählt das jeweils $x = 0{,}25$ ⇒ Fig 6-10

NB: auch für andere x ist q^2-Abhängigkeit schwach aber verstanden, sog. "scaling violations" durch Präsenz von Gluonen (über die man 1967 nichts wusste)

Interpretation der Daten im sogenannten Partonmodell (R. Feynman, 1969):
betrachte Targetproton im Ruhesystem des Elektrons, in dem Proton sehr hohen Impuls hat "infinite momentum frame", kann Proton in diesem System als Strom paralleler Partonen betrachten

Partonen" haben je 4er Impuls $x_i P$, wenn Proton 4er Impuls $P = (E \simeq |\vec{P}|, |\vec{P}|, 0, 0)$ hat mit
$0 < x_i < 1$ und $\sum_{i=1}^{3} x_i = 1$

Ein Parton der Masse m wird elastisch am Elektron gestreut und absorbiert 4er Impuls übertrag q



$(xP+q)^2 = m^2$

$x^2P^2 + 2xPq + q^2 = m^2$

invariant, im Ruhesystem des Partons ist $x^2P^2 = m^2$

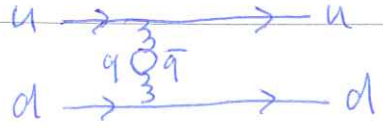
$\rightsquigarrow x = \frac{-q^2}{2Pq} = \frac{-q^2}{2M\nu}$ ← Impulsbruchteil Parton im infinite Momentum frame

(evaluiere Pq im Laborsystem $P = (M, 0)$ $q = (\nu, \vec{q})$ $Pq = M\nu$)

das sieht so aus wie elastische Streuung eines stationären Partons im Laborsystem mit $-q^2 = 2m\nu$, so daß $x = \frac{-q^2}{2M\nu} = \frac{2m\nu}{2M\nu} = \frac{m}{M}$ → damit wäre x der Bruchteil der Masse des Nukleons, den Parton trägt.

Physikalische Bedeutung der $F_{1,2}(x, q^2) \simeq F_{1,2}(x)$:
Maß für die Impulsbruchteil-Verteilung der Partonen im Proton (Nukleon)
$q_f(x)$ sei Wahrscheinlichkeit, Quark mit Flavour mit Impuls xP in Proton mit Impuls P zu finden; elektrische Ladung $z_f e$, Wirkungsquerschnitt $\propto z_f^2 e^2$

$q_f(x)$ hat Beiträge von "Valenzquarks" und "Seequarks", d.h. Quark-Antiquarkpaaren, die von Gluonen im Feld der starken WW erzeugt werden



... analog zu e^+e^--Paaren im Coulombfeld

Antiquarks haben Impulsanteil $\bar{q}_f(x)$

F_2 ist die Summe der mit x und z_f^2 gewichteten Impulsanteil-Verteilungen der Quarks und Antiquarks

$$F_2(x) = x \sum_f z_f^2 (q_f(x) + \bar{q}_f(x))$$

Durch Streuung verschiedener Leptonen (e, μ, ν) an p und n (Deuterium) kann man Beiträge von Valenz- und Seequarks (und Gluonen) unterscheiden

Ergebnis: Beitrag der Valenzquarks gespeakt bei $x \simeq 0.15 - 0.2$

See-Quarks und Gluonen tragen sehr kleine Impulsanteile, sind aber sehr zahlreich

- Integral von F_2 über x gibt den Impulsanteil des Nukleons, der von allen Quarks und Antiquarks im Nukleon getragen wird. Man findet etwa 50%.
→ die andere Hälfte wird von Gluonen getragen.

⇒ Fig. 6-11