2. Werkzeuge der Kern- und Teilchenphysik

2.1. Zerfallsgesetz

Zerfall, wenn Zustand X energetisch in der Lage ist, Übergang nach Zustand Y zu machen

verschiedene Arten von Zerfällen

- angeregtes Atom zerfällt unter Emission von Licht in Grundzustand $A^* \rightarrow A + \text{Photon}$
  ↳ eV-Bereich
- ebenso im Atomkern
  $X^* \rightarrow X + \gamma$ "Gammazerfall" Photonen im Wellenlängenbereich
  100 keV – 10 MeV → "Gammastrahlung"
- Kerne mit zuvielen Protonen oder Neutronen:
  $^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e$
  → β-Teilchen
  $^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e$ "Betazerfall"
- Kerne mit zu vielen Nukleonen (Protonen und Neutronen):
  $^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 He$ → α-Teilchen
  "Alphazerfall"
- aber auch $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$
  ↳ neutrales Pion
  oder $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ geladenes Pion π^-

die meisten uns bekannten Teilchen zerfallen

spontane Übergänge, also ohne Einwirkung von aussen

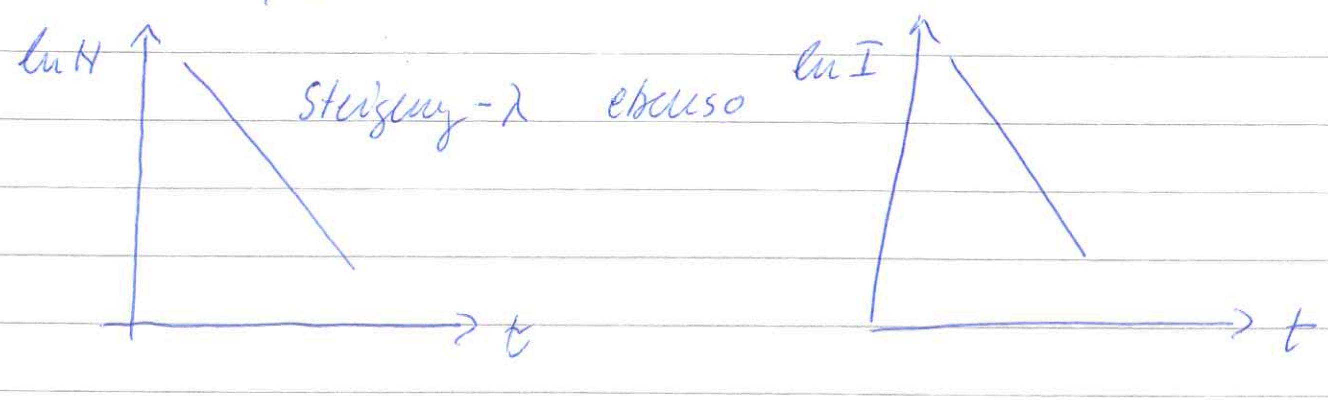
Zerfallsrate gegeben durch $\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$

Rate bestimmt durch die Zerfallskonstante λ
Dimension: inverse Zeit $[s^{-1}]$
durch Integration $\underbrace{N(t)}_{N \text{ zur Zeit } t} = N(0) \exp(-\lambda t)$ ↳ zur Zeit $t=0$

Lebensdauer $\tau = 1/\lambda$ in Zeit τ fällt Anzahl auf $1/e$ der ursprünglichen Anzahl
$t_{1/2} = \tau \ln 2$ Halbwertszeit: Zeit, in der Anzahl auf die Hälfte zerfällt
nach $2t_{1/2} \rightarrow 1/4$ etc.
Messung von $N(t)$ über die Zerfallsintensität

$$I(t) = -\frac{dN}{dt} = \underbrace{N(0)\lambda}_{I(0)} \exp(-\lambda t)$$

- sieht aus wie Lambert-Beer'sches Gesetz für Anzahl von Photonen nach Durchqueren von Schichtdicke x: $I(x) = I(0) \exp(-\mu x)$ ↳ Abs.koeff.
- Zerfall ist ein statistischer Prozess, τ bezieht sich auf die mittlere Zeit, bis Zerfall passiert ebenso wie $1/\mu$ sich auf die mittlere Distanz bezieht, nach der Photon absorbiert wird.



wahrscheinlichste Zeit für Zerfall ist $t=0$
(wahrscheinlichster Punkt für Photonabsorption ist bei Distanz $x=0$), dann exponentieller Abfall

Wahrscheinlichkeit in einem bestimmten Zeitintervall n Zerfälle zu beobachten, gehorcht statistisch, charakterisiert durch Poissonverteilung

$$P(n,\bar{n}) = \frac{\bar{n}^n \exp(-\bar{n})}{n!}$$

$\bar{n}$: mittlere Anzahl von Zerfällen im Intervall

$$\sum_n P(n,\bar{n}) = 1$$

charakteristisch für Poissonverteilung: Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\bar{n}}$ charakteristische Schwankung der Anzahl Zerfälle in einem Zeitintervall

2.2 Fermi's Goldene Regel und Phasenraum

Berechnung der Übergangsrate von Zustand α nach Zustand β basierend auf Störungstheorie (siehe auch PTP4). Voraussetzung: WW, die für Übergang zuständig ist, ist schwach

$H = H_0 + \underbrace{H_{int}}_{\text{klein}}$, so daß α und β in Basis von Eigenfunktionen von H_0 expandiert werden können. Rate $|\alpha\rangle$ nach $|\beta\rangle$

$$(*) \quad \boxed{W_{\alpha\beta} = dP/dt = \frac{2\pi}{\hbar} \underbrace{|\langle \Psi_\beta | H_{int} | \Psi_\alpha \rangle|^2}_{\text{Matrixelement von } H_{int}} \underbrace{\rho(E)}_{\text{Zustandsdichte im Endzustand}}}$$

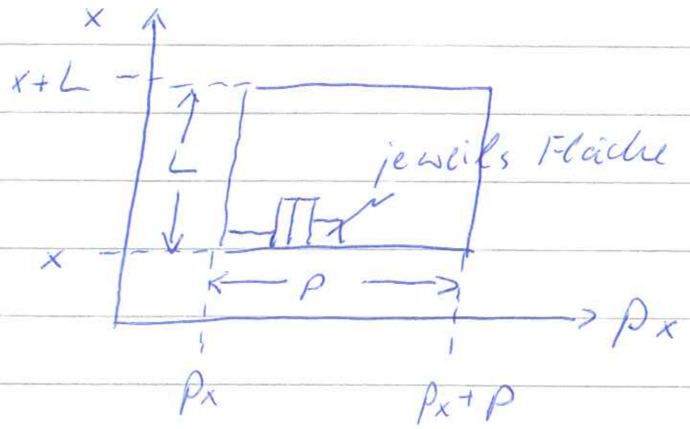
"Fermi's Goldene Regel" (erfunden von Dirac 1927)
von Fermi in Kernphysik Lehrbuch 1950 als "Zweite Golden Rule" genannt

$\rho(E)$: Anzahl von Endzuständen pro Energieintervall

$(*)$ Kehrwert von $W_{\alpha\beta}$ gibt Lebensdauer, wenn nicht noch Übergänge in weitere Zustände möglich sind.

im 6-dimensionalen Phasenraum (x, y, z, p_x, p_y, p_z) werden wegen Unschärferelation Punkte durch kleine Volumina $h^3 = (2\pi\hbar)^3$ ersetzt

- in 1 Dimension: für Positionen zwischen x und $x+L$ und Impulse zwischen p_x und $p_x + p$ kann die Fläche Lp mit $N = Lp/(2\pi\hbar)$ Zuständen gefüllt werden



damit wird $\rho(E) = \frac{dN}{dE} = 2\frac{dN}{dp}\frac{dp}{dE} = \frac{L}{2\pi\hbar}\underbrace{\sqrt{\frac{m}{2E}}}_{\text{nicht relativistisch}} = \frac{L}{2\pi\hbar c}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}$

↳ für jedes E zentartete Zustände mit p und $-p$

- in 3 Dimensionen: $N = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3x\, d^3p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int p^2 dp\, d\Omega$

mit $E^2 = p^2 + (mc^2)^2 \rightsquigarrow N = \frac{V4\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int p^2 \frac{E}{pc^2}\, dE$ und damit

$$\boxed{\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{VEpc}{2\pi^2(\hbar c)^3}}$$ "Einteilchenphasenraum"

- 2 Teilchen in 3 Dimensionen: mit totalem Impuls $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ (im cm-System: $p_1^2 = p_2^2$) und Energie $E = E_1 + E_2$, Anzahl von Zuständen wie für 1 Teilchen, aber Dichte unterschiedlich wegen Bedingung $E = E_1 + E_2 \rightsquigarrow$ für ein gegebenes E_1 ist E_2 festgelegt

$$\rho_2 = \frac{dN_2}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar c)^3} \frac{E_1 E_2 p_1 c}{E_1 + E_2} \int d\Omega_1$$

übrigens: - am Ende fällt V immer wegen entsprechender Normierung der Wellenfunktionen heraus. - bei entarteten Zuständen mit Entartungsgrad multiplizieren.

2.3. Reaktionsrate

- Rate von Zerfällen siehe oben; Zerfallsgesetz und τ bzw λ durch Fermi's Goldene Regel (wenn anwendbar)
- wenn Teilchen durch Kollision 'reagieren'
  z.B. Rutherfordstreuung (elastisch)
  $\alpha + Au \rightarrow \alpha + Au$ Streuung in Winkel ϑ
  Rate von Streuereignissen gegeben durch
  - einfallenden Teilchenfluß N_b (b für 'beam')
  - Anzahl von Streuzentren pro Flächeneinheit N_t
  - Wirkungsquerschnitt σ Dim. Fläche (t für Target)

nach einer typischen Länge λ ('mittlere freie Weglänge') passiert Streuung

$\lambda = \frac{1}{n \cdot \sigma}$ mit Dichte der Streuzentren n ($\frac{\text{Atome}}{cm^3}$)
(dies vernachlässigt Bewegung der Streuzentren)

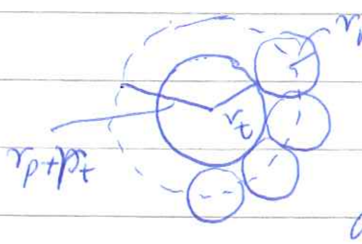
Wahrscheinlichkeit, daß einfallendes Teilchen gestreut wird $\boxed{P = 1 - \exp(-x/\lambda)}$ (ohne Koll. $N = N_0 \exp(-x/\lambda)$)

für $x \ll \lambda$ ("dünnes Target) Entwicklung der e-Funktion

$$\boxed{P \simeq x/\lambda = \sigma \cdot \underbrace{n \cdot x}_{\text{Flächendichte von Streuzentren } N_t}}$$

Streurate $R\left[\frac{1}{s}\right] = N_b\left[\frac{1}{s}\right] \cdot N_t\left[\frac{1}{cm^2}\right] \cdot \sigma\,[cm^2]$
σ kann generell für alle möglichen Prozesse definiert werden: elastische o. inelastische Streuung, Absorption, Reaktion $A+B \rightarrow C+D+E \ldots$
für verschiedene mögliche Prozesse: Wahrscheinlichkeiten addieren sich
"totaler Wirkungsquerschnitt" $\sigma = \sigma_{el} + \sigma_{inel} + \ldots$
σ_t: partielle Wirkungsquerschnitte
typischerweise ist Wirkungsquerschnitt winkelabhängig, betrachte $d\sigma/d\vartheta$ bzw $d\sigma/d\Omega$ und ebenso differentielle Raten $\frac{dR}{d\Omega} = N_b N_t \frac{d\sigma}{d\Omega}$ bzw für inelastische Prozesse doppelt differentiell $d^2\sigma/d\Omega dE$

- Skala für Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch sogenannten "geometrischen Wirkungsquerschnitt" besonders sinnvoll wenn Reichweite der WW kurz und Streupartner endliche Ausdehnung
Targetteilchen mit Radius r_t und Projektil mit r_p
$\sigma_{geo} = \pi (r_p + r_t)^2$



"Treffer" immer, wenn Zentren von Target und Projektil innerhalb von $r_p + r_t$
Wahrscheinlichkeit für "Treffer": Bruchteil der Targetfläche (Au-Folie z.B.), die durch Streuzentren mit je zugehöriger Fläche σ_{geo} belegt ist

Beispiel: Proton-Proton Kollisionen am LHC:
$r_p \approx 0.8\,fm$ $\sigma_{geo} = 1.6^2\,fm^2 \cdot \pi \approx 8\,fm^2 = 80\,mb$ mit Einheit barn für Wirkungsquerschnitt $1b = 10^{-24}\,cm^2 = 100\,fm^2$

- typischer totaler pp Wirkungsquerschnitt: am LHC
bei $E_{cm} = \sqrt{s} = 7$ TeV $\sigma_{tot} \simeq 110$ mb
inelastic $\sigma_{inel} \simeq 60$ mb elastic $\sigma_{el} \simeq 40$ mb
single diffractive $\sigma_{diff} \simeq 12$ mb
relative schwache Energieabhängigkeit: $p = 10$ GeV, $\gamma = 10.7$
fixed Target $\sqrt{s} = m_p c^2 \sqrt{2 + 2\gamma} \simeq 4.54$ GeV
$\sigma_{tot} \simeq 40$ mb
d.h. Wahrscheinlichkeit für pp-WW ist von Größenordnung 'eins', wenn Protonen sich treffen
differentielle Wahrscheinlichkeiten, daß ein bestimmter Prozess passiert, ist viel kleiner. z.B. wird ein Higgs-Teilchen nur in 1 von $7 \cdot 10^9$ pp Koll. am LHC produziert. ($\sigma_{pp \to H} \simeq 15$ pb)
- für Atomkerne: $r_A \simeq 1.2$ fm $\cdot A^{1/3} \leftarrow$ Massenzahl
Blei-Blei $\sigma_{geo} \simeq 6.35$ b

also Reaktionsrate $R = \underbrace{N_b \cdot N_t}_{\text{nennt man Luminosität } \mathcal{L} \left[\frac{1}{cm^2 \cdot s}\right]} \cdot \sigma$

2 mögliche experimentelle Konfigurationen
a) stationäres Target
z.B. flüssiger Wasserstoff, Dicke 1 m $\rho_{\ell H_2} = 0.06 \frac{g}{cm^3}$
Flächendichte in Atomen/Molekülen pro Flächeneinheit

$$N_t = \frac{\rho \cdot t \cdot N_A}{M}$$

N_A Avogadrozahl $6.02 \cdot 10^{23}$/Mol
M Atom oder Molekulargewicht 2g/Mol

$$= \frac{0.06\,g \cdot 100\,cm \cdot 6.02 \cdot 10^{23}\,Mol}{cm^3 \cdot Mol \cdot 2g} = 1.8 \cdot 10^{24}/cm^2$$

typische Strahlintensität $N_b = 10^{12}/s \to \mathcal{L} = 1.8 \cdot 10^{36}/cm^2 \cdot s$
Annahme war hier: Querschnittsfläche Strahl < Fläche Target, Strahl trifft Target immer.

- typischer totaler pp Wirkungsquerschnitt: am LHC
  bei $E_{cm} = \sqrt{s} = 7\,TeV$ $\sigma_{tot} \simeq 110\,mb$
  inelastic $\sigma_{inel} \simeq 60\,mb$ elastic $\sigma_{el} \simeq 40\,mb$
  single diffractive $\sigma_{diff} \simeq 12\,mb$
  relative schwache Energieabhängigkeit: $p = 10\,GeV$, $\gamma = 10.7$
  fixed Target $\sqrt{s} = m_p c^2 \sqrt{2+2\gamma} \simeq 4.54\,GeV$
  $\sigma_{tot} \simeq 40\,mb$
  d.h. Wahrscheinlichkeit für pp-WW ist von Größenordnung 'eins', wenn Protonen sich treffen
  differentielle Wahrscheinlichkeiten, daß ein bestimmter Prozess passiert, ist viel kleiner. z.B. wird ein Higgs-Teilchen nur in 1 von $7 \cdot 10^9$ pp Koll. am LHC produziert. ($\sigma_{pp \to H} \simeq 15\,pb$)
- für Atomkerne: $r_A \simeq 1.2\,fm \cdot A^{1/3}$ ← Massenzahl
  Blei-Blei $\sigma_{geo} \simeq 6.35\,b$

also Reaktionsrate $R = \underbrace{N_b \cdot N_t}_{\text{nennt man Luminosität } \mathcal{L}\ \left[\frac{1}{cm^2 \cdot s}\right]} \cdot \sigma$

2 mögliche experimentelle Konfigurationen

a) stationäres Target

z.B. flüssiger Wasserstoff, Dicke 1 m $\rho_{\ell H_2} = 0.06\,\frac{g}{cm^3}$

Flächendichte in Atomen/Molekülen pro Flächeneinheit

$N_t = \frac{\rho \cdot t \cdot N_A}{M}$ $\quad N_A$ Avogadrozahl $6.02 \cdot 10^{23}/Mol$

M Atom oder Molekulargewicht $2g/Mol$

$$= \frac{0.06\,g \cdot 100\,cm \cdot 6.02 \cdot 10^{23}\,Mol}{cm^3 \cdot Mol \cdot 2g} = 1.8 \cdot 10^{24}/cm^2$$

typische Strahlintensität $N_b = 10^{12}/s \rightarrow \mathcal{L} = 1.8 \cdot 10^{36}/cm^2 s$

Annahme war hier: Querschnittsfläche Strahl < Fläche Target, Strahl trifft Target immer.

pp-Wirkungsquerschnitt sei 40 mb (Beispiel oben)
Rate $R = \frac{1.8 \cdot 10^{36}}{cm^2 \cdot s} \cdot 4 \cdot 10^{-26} cm^2 = 7.2 \cdot 10^{10}/s$ riesig!
$\lambda = 13.9 m$

b) Kollidierende Strahlen
an einem 'kollider' laufen n Bündel (bunches) mit je N Teilchen mit einer Frequenz f (Umlauffrequenz) im Kreis und treffen an bestimmten Punkten aufeinander. Die Querschnittsfläche des Strahls sei A

$\mathcal{L} = f \cdot n \cdot \frac{N^2}{A}$ typischerweise viel kleiner als für stat. Target, aber höhere cm-Energie

Rekord LHC Large Hadron Collider am CERN
neues Regime → $\boxed{\text{Fig. 2.1}}$

2015 $\{ f = 11.245 \, kHz$ $n = 1374$ in 2015 $N = 10^{11}$ $A \simeq 3 \cdot 10^{-5} cm^2$
max. $\mathcal{L} = 5.13 \cdot 10^{33}/cm^2 \cdot s = 5.13/s \cdot nb$ ($\hat{=} r = 31 \mu m$)

integrierte Luminosität $\mathcal{L}_{int} = \int \mathcal{L} \cdot dt$
2015 pp kollisionen bei $\sqrt{s} = 13 TeV$ $\mathcal{L}_{int} = 4.22/fb$
bei mittlerer $\mathcal{L} = 3/s \cdot nb$ $1.4 \cdot 10^6 s$ (eine Füllung des Beschleunigers mit Strahl hält etwa 10 h)

für Prozess mit z.B. $\sigma_{pp \to Higgs} \simeq 15 pb$
Anzahl Ereignisse pro Jahr $N_{int} = \mathcal{L}_{int} \cdot \sigma = \frac{4.22}{fb} \cdot 15 pb$
$\simeq 6 \cdot 10^4$

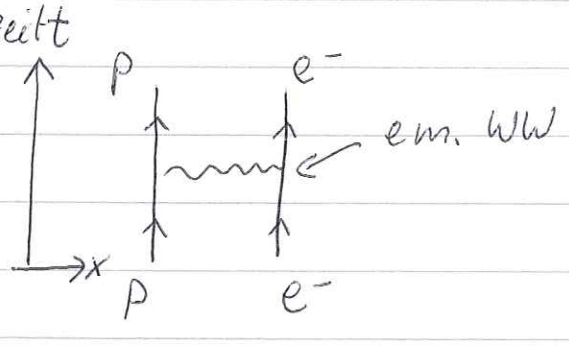
2.4 Feynman-Diagramme

Konzept der Wechselwirkung durch Austausch von Feldquanten ist Grundlage feldtheoretischer Beschreibung der verschiedenen WW

<u>Feldquanten</u>: Quanten, die die WW vermitteln
Photon (γ) für em WW
$W^{\pm}$, Z^0-Bosonen für schwache WW
Gluonen g für starke WW
Pionen für Wechselwirkung zwischen Nukleonen

Konzept kann anschaulich durch sogenannte "Feynman-Diagramme" visualisiert werden.
in 1940igern von R.P. Feynman entwickelte elegante Methode, Übergänge und WW
a) bildhaft eindeutig darzustellen
b) mit den Bildern sind in der QFT klare, mathematische Regeln verbunden, das Matrixelement für den dargestellten Prozess, bzw. den Wirkungsquerschnitt, zu berechnen
in der PEP4 hauptsächlich a) verwendet

<u>Beispiel</u>: em. WW zwischen 2 geladenen Teilchen Proton und Elektron

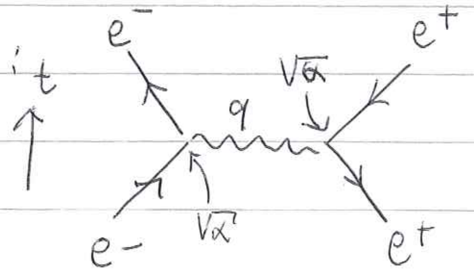


wie wird Bild erstellt:
- Zeitrichtung wird festgelegt entweder nach oben, oft auch $\longrightarrow t$ nach rechts
- "reelle Teilchen" dargestellt als Strahlen in positive Zeitrichtung (von − Unendlich und/oder nach + Unendlich $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$ :: reell
- Antiteilchen: Strahlen in negative Zeitrichtung
- Austauschteilchen sind Segmente (Linien, die im Diagramm beginnen und enden)
  Keine Vorzugsrichtung

- Ausgetauscht werden:
  für die em WW Photonen, dargestellt als
  " schwache WW W, Z-Bosonen "
  " starke WW Gluonen "
  aber auch andere Teilchen können ausgetauscht werden (siehe unten)
- die Segmente repräsentieren virtuelle Teilchen
  $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 \neq m^2$ für endliches Intervall in Raum oder Zeit möglich wegen Unschärferelation für kurzes Δt oder Δx
  $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$ $\quad \Delta E \Delta t \geq \hbar/2$
  insbesondere für Photonen $p^2 \neq 0$

• Punkte, an denen 3 oder mehr Linien zusammenkommen: "Vertex"
- Vertex und angrenzende Linien beschreiben Absorption oder Emission eines Teilchens
- an jedem Vertex gelten die Erhaltungssätze
- jeder Vertex ist charakterisiert durch eine Kopplungskonstante, gegeben durch die Art der WW, z.B. $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ für die elektromagn. WW
  Übergangsmatrixelement $\propto \sqrt{\alpha}$ für jeden Vertex
  " wahrscheinlichkeit $\propto \alpha$ "

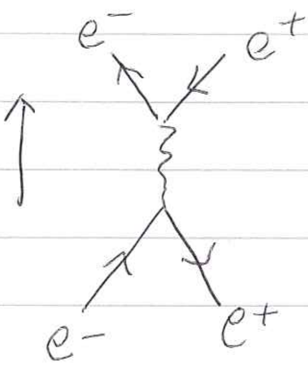
Beispiel:



Elektron und Positron ww durch Austausch eines virtuellen Photons
$\langle\ \rangle \propto e^2 \propto \alpha$
$|\langle\ \rangle|^2 \propto e^4 \propto \alpha^2$

$q^2 < 0$ negativ ← 'raumartiges' Intervall 'raumartig': man kann ein Bezugssystem finden, das sich mit $v < c$ bewegt und in dem die 2 Ereignisse gleichzeitig passieren, aber an verschiedenen Punkten im Raum

Zwischen Elektron und Positron ist auch dieser Prozess möglich



Annihilation von e^- und e^+ in ein 'zeitartiges' Photon

$q^2 > 0$

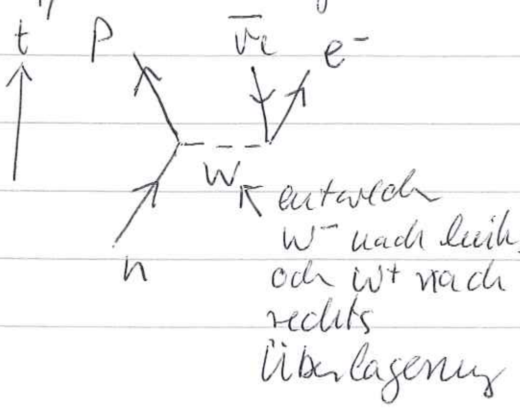
'zeitartig':
es gibt Bezugssystem mit $v < c$ in dem die Ereignisse am selben Punkt im Raum passieren, aber immer zu verschiedenen Zeiten

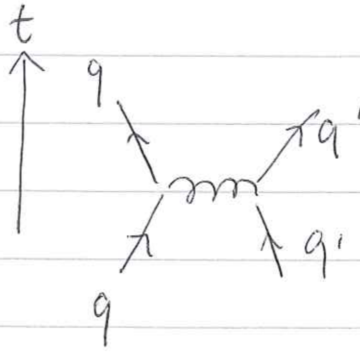
- Austauschteilchen hat keine Vorzugsrichtung in Berechnung von Matrixelement wird es durch sogenannten 'Propagator' beschrieben $\frac{1}{m^2 + q^2}$ (für Bosonen)
  ↳ 4er Impulsübertrag

  für em WW $\frac{1}{q^2}$

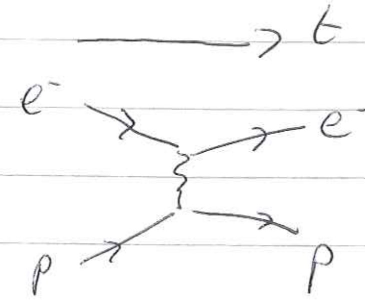
→ für $e^- e^+$ Wechselwirkung oben $\sigma \propto \frac{\alpha^2}{q^4}$

typische Diagramme für schwache und starke WW





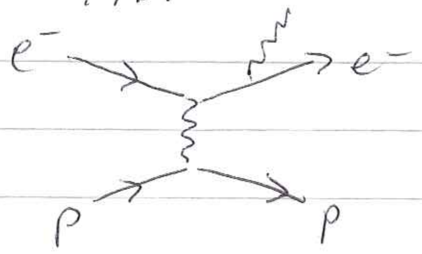
bisher betrachtet "führende Ordnung"



$\sigma \propto \alpha^2$

nächste Ordnung

z.B.



next to leading order (NLO)

$\sigma \propto \alpha^3$

und next-to-next-to-leading order (NNLO)

$\sigma \propto \alpha^4$