

# 10. Bindung und Auslegung von Atomkernen

## 10.1 Bindungsenergie von Atomkernen und Tröpfchenmodell

Bindungsenergie definiert als

$$B(N, Z) = Z M_H c^2 + N M_n c^2 - M_{N, Z} c^2$$

↑  
Masse Wasserstoffatom

↑  
Masse Neutron

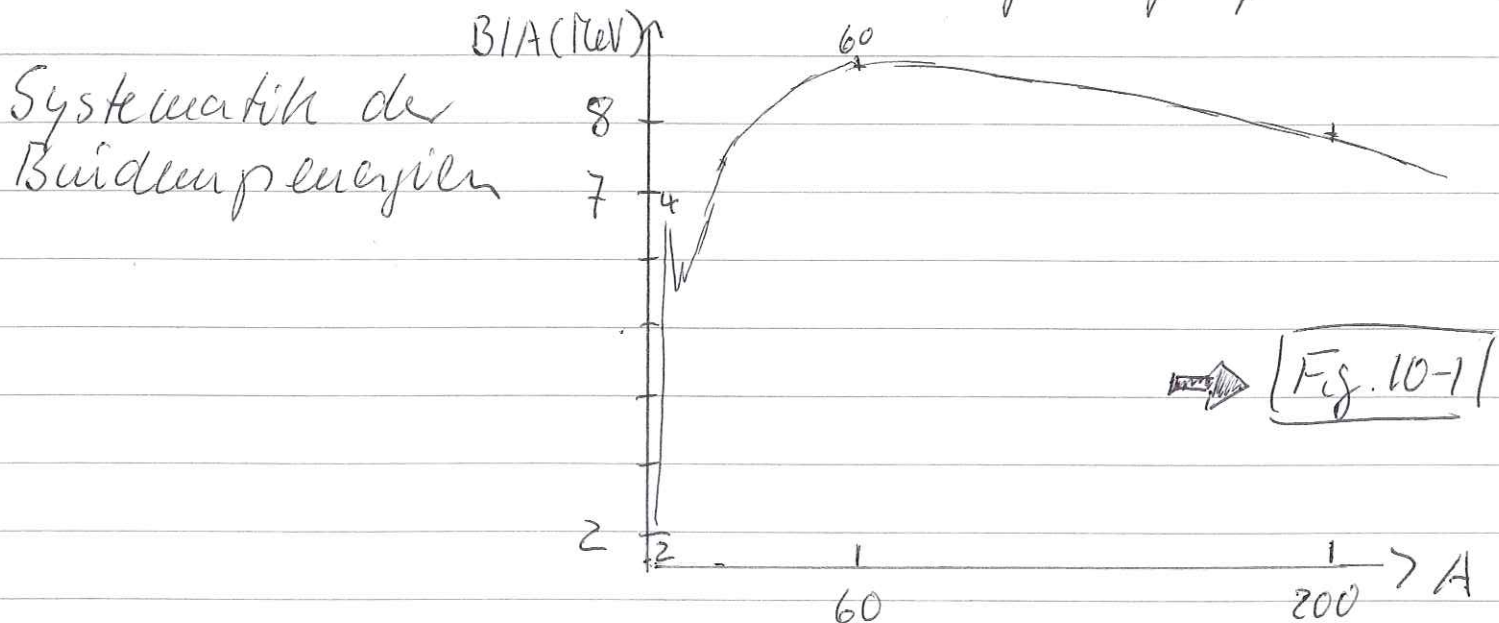
←  
Masse Atom mit  
N Neutronen und  
Z Protonen

$M$  ausgedrückt üblicherweise in  
Einheiten von  $1/12$  der Masse eines  $^{12}\text{C}$ -Atoms  $\equiv 1 \text{ amu}$   
 $1 \text{ amu} \hat{=} 931.502 \text{ MeV}/c^2$

$$M_H = 1.0078 \text{ amu} \quad M_n = 1.0087 \text{ amu}$$

$${}^4\text{He}: B(2, 2) = 2 \cdot 1.0078 + 2 \cdot 1.0087 - 4.0026 = 0.0304 \text{ amu} \\ \hat{=} 28.3 \text{ MeV}$$

$$B/A = 7.1 \text{ MeV} \leftarrow \text{Bindungsenergie pro Nukleon}$$



erste Beschreibung der Systematik durch C.F. von Weizsäcker 1935, N. Bohr 1936 basierend auf:

Kernradius  $\approx 1.2 \cdot A^{1/3}$  fm  
 Kerne haben im Inneren etwa konst. Dichte  
 $0.17$  Nukleonen / fm<sup>3</sup>, offensichtlich Reichweite  
 der Kernkraft kurz  $\leftrightarrow$  Sättigungscharakter  
 in Analogie zu Atomen / Molekülen in Flüssig-  
 keiten einfache Parametrisierung der  
 Bindungsenergien

$$B(\text{MeV}) = b_v \cdot A - b_s A^{2/3} - b_c Z^2 A^{-1/3} - b_{\text{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A} + b_p A^{-1/2}$$

"Weizsäcker-Formel"

$\rightarrow$  [Fig 10-2]

beschreibt phänomenologische Bindung  
 durch eine stark attraktive kurzreichweitige Kraft,  
 die zwischen direkt benachbarten Nukleonen  
 wirkt.

-  $b_v A$  Volumenterm:  $B/A$  ist etwa konstant,  
 $B$  wächst proportional von  $A$ , also auch Kern-  
 Volumen  $b_v = 15.85$  MeV

-  $b_s A^{2/3}$  Oberflächenterm: Nukleonen an der  
 Kernoberfläche haben weniger Bindungspartner,  
 sind also schwächer gebunden,  $\propto$  Oberfläche  
 $R^2 \propto A^{2/3}$ ,  $b_s = 18.34$  MeV, Term reduziert  $B$ , also -

-  $b_c Z^2 A^{-1/3}$  Coulombterm: Coulombabstoßung der  
 $Z$  Protonen, für einheitlich geladene Kugel  
 mit Radius  $R_0$

$$B_c = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(r)\rho(r')}{|r-r'|} d^3r d^3r' = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{8\pi^2}{3} \frac{4}{5} R_0^5$$

$$\text{mit } \rho = \frac{3Ze}{4\pi R_0^3} \text{ und } R_0 = r_0 \cdot A^{1/3} \rightarrow B_c = \frac{3Ze^2}{5r_0 A^{1/3}}$$

und mit  $r_0 = 1.2 \text{ fm} \approx b_c = 0.717 \text{ MeV}$ ,  $Z$  repulsiv  $\rightarrow$  red. B

-  $b_{\text{sym}} (N-Z)^2/A$  Symmetrieterm: Pauliprinzip und diskrete Energielevels in Potentialtopf  $\rightarrow$  besonders günstig: gleiche Anzahl von Protonen  $Z$  und Neutronen  $N$ ,  $b_{\text{sym}} = 23.2 \text{ MeV}$ ,  $A_{\text{sym.}}$  reduziert B, Vorzeichen -

-  $b_p A^{-1/2}$  Paarungsterm:  $gg$ -Kerne sind  $sg$ st. stärker gebunden als  $ug$ - und  $gu$ -Kerne und diese wieder stärker als  $uu$ . Kopplung von Protonen zu Paaren, ebenso Neutronen, Cooperpaare ähnlich wie Elektronen in Supraleitern,  $b_p = 11.5 \text{ MeV}$  für  $gg$ ,  $b_p = -11.5 \text{ MeV}$  für  $uu$  und  $b_p = 0$  für  $ug, gu$   $\Rightarrow$  Fig. 10-3

für den größten Teil des Periodensystems mit  $A \geq 20$  beschreibt Weizsäcker-Formel Bindungsenergien pro Nukleon besser als  $0.1 \text{ MeV}$  (1-2%).

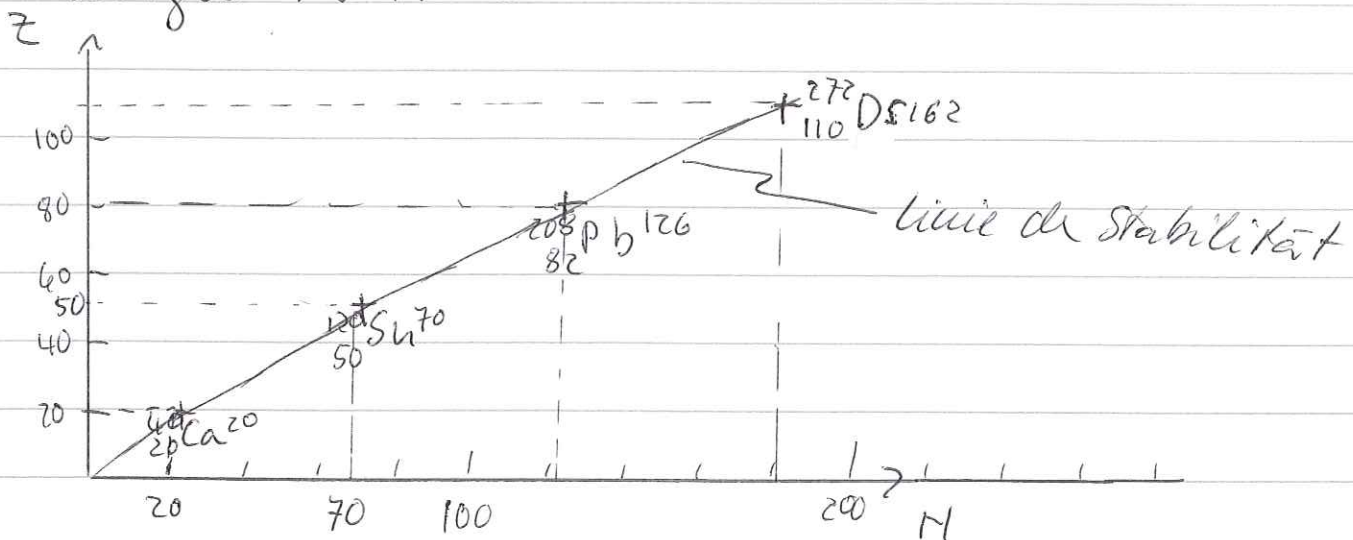
$B(M, Z)$  beinhaltet, um wieviel ein Atomkern gebunden ist gegenüber freien Nukleonen. Bindung im Vergleich zum  $^{12}\text{C}$  ist im sogenannten "Massenüberschuß" enthalten

$$\Delta (\text{MeV}) = M_{N,Z} c^2 (\text{MeV}) - A \cdot \underbrace{931.502 \text{ MeV}}_{\text{amu} = 1/12 \text{ MeV } ^{12}\text{C-Atom}}$$

( tabelliert, Nuclear Data Center, Brookhaven Lab. Nuclear Wallet Cards )

$\Delta > 0$  Kern schwächer gebunden als  $^{12}\text{C}$   
 $\Delta < 0$  " stärker " "

$B(N, Z) > 0$  drückt aus, daß ein Atomkern gebunden ist. Für jedes Element  $Z$  gibt es ein am stärksten gebundenes Isotop  $\leftarrow$  definiert Linie der Stabilität  
 - für kleines  $Z$  ist  $M=Z$  bevorzugt (Sym.energie)  
 - für großes  $Z$  dominiert zunehmend Coulomb-energie  $\sim M > Z$



- für jedes Element gibt es 1 oder mehrere stabile Isotope sowie eine ganze Reihe von instabilen aber gebundenen Isotopen  $\leftarrow$  Radioaktivität  
 z.B. Zinn-Isotope  $Z=50$   $A=99-138$  bekannt  
 stabilstes Isotop  $^{120}_{50}\text{Sn}$ , 10 stabile Isotope, 30 radioaktive Isotope

Radioaktivität: hauptsächlich  $\beta$ -Zerfälle

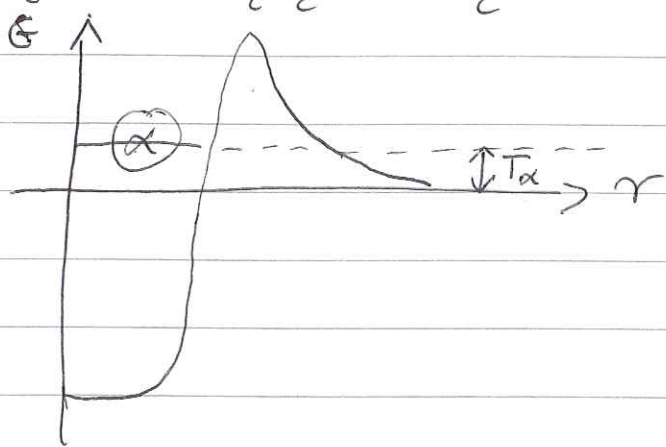
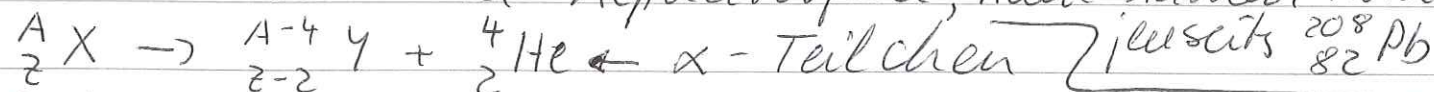
$\beta^+$ -Zerfälle oder Elektroneneinfang, wenn  $M$  zu klein  
 $\beta^-$ -Zerfälle, wenn  $M$  zu groß

- Region der gebundenen Kerne limitiert durch

sogenannte Proton- bzw. Neutron-Drip-Linie; jenseits zerfallen Kerne stark in  $< 10^{-18}$  s durch Proton- oder Neutron-Emission. Wegen Elementsynthese in Sternen wichtig den Verlauf zu kennen.

→ Fig. 10-4

- in schweren Kernen Alphazerfall; keine stabilen Kerne



wegen Tunnel durch  
Coulombbarriere typ.  
lange Halbwertszeiten

- die schwersten Atomkerne können auch durch spontane Kernspaltung zerfallen, z. B.  ${}_{102}^{260}\text{Mo}$

100% SF,  $t_{1/2} = 106 \text{ ns}$

${}_{92}^{235}\text{U}$  100%  $\alpha$ -Zerfall  $t_{1/2} = 7 \cdot 10^8 \text{ y}$

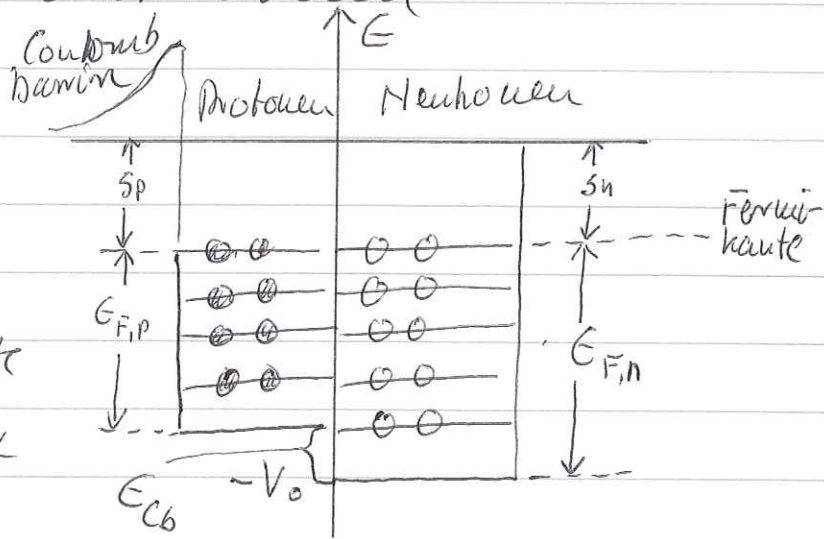
## 10.2 Fermigas-Modell

Kern hat auch viele Eigenschaften, die leichter durch ein Modell unabhängiger Teilchen in einem Potentialtopf beschrieben werden als durch einen stark wechselwirkenden Flüssigkeitstropfen.

Einfachstes Modell, das Quantennatur berücksichtigt: betrachte Atomkern als Fermigas von  $(N+Z)$  Nukleonen, die sich frei und unabh.

hängig voneinander in einer Kugel mit Radius  $R = r_0 A^{1/3} \approx 1.2 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$  bewegen. Nur Pauliprinzip muß beachtet werden

wegen Coulomb-WW  
2 unterschiedlich  
Potentialtöpfe für Protonen und Neutronen  
jeder enthält  $n$  Teilchen-  
niveaus, jedes besetzt mit  
2 Teilchen (Spin nach  
oben/unten).  $T=0$ , alle



Nukleonen sind in den niedrigstmöglichen Zuständen. Zustände bis zu einer bestimmten maximalen kinetischen Energie, der Fermienergie, sind besetzt. Anzahl von Zuständen mit Impulsen zwischen 0 und max. Impuls  $p_F$  folgt aus Integration

$$n = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} \int_0^{p_F} d^3x d^3p = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} \quad \text{mit } V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A$$

jeder Zustand mit 2 Neutronen besetzt, also

$$n = N/2 = \frac{4\pi r_0^3 A p_{F,n}^3}{3 \cdot 6\pi^2 \hbar^3} \quad \leadsto \quad p_{F,n} = \frac{\hbar}{r_0} \sqrt[3]{\frac{9\pi N}{4A}}$$

ebenso für die Protonen

$$n = Z/2 = \frac{4\pi r_0^3 A p_{F,p}^3}{3 \cdot 6\pi^2 \hbar^3} \quad \leadsto \quad p_{F,p} = \frac{\hbar}{r_0} \sqrt[3]{\frac{9\pi Z}{4A}}$$

für z. B.  $N=Z \rightarrow p_{F,N} = p_{F,Z} \approx 250 \text{ MeV}/c$   
 $= A/2$

$T_{\max} = E_F \approx 33 \text{ MeV}$  nicht relativistisch

mittlere kinetische Energie  $\langle T \rangle = \frac{\int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} d^3p}{\int_0^{p_F} d^3p} = \frac{3}{5} E_F \approx 20 \text{ MeV}$

⊕ Was passiert mit zunehmender / abnehmender Zahl von Protonen und Neutronen?

- Fermienergie bleibt konstant, ebenso ist Tiefe des Potentialtopfes  $V_0 \approx 41 \text{ MeV}$

- Energie ein Neutron oder ein Proton zu entfernen  $S_n, S_p: 7-8 \text{ MeV}$

- Volumen wächst  $\propto A$ , ebenso die Anzahl der Zustände  $\rightarrow$  mit wachsendem  $N, Z$  werden mehr Zustände in selbes Energieintervall gepackt, Zustände rücken näher zusammen

### 10.3 Schalenmodell

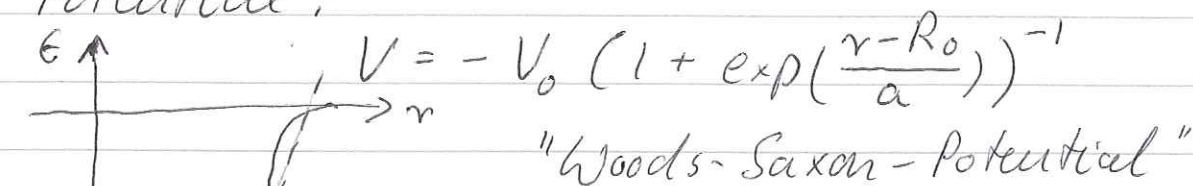
Um Kerneigenschaften wie Energien und Quantenzahlen diskret gebundener Zustände zu verstehen, um  $\beta$  von Schrödingergl. für geeignetes Potential lösen  $\rightarrow$  Schalenmodell

Evidenz für Schalenstruktur im Atomkern:

Diskontinuitäten in Bindungsenergie (Abweichungen von Weizsäcker-Formel), Proton und Neutronseparationsenergien (äquivalent Ionisierungsenergien in Atomen, Fig. 1-9), Anregungsenergie von 1. angeregten Zu-

stand in gg-Kurven  $\Rightarrow$  bei  $Z$  oder  $N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$  ändern sich Eigenschaften relativ scharf "magische Zahlen" deuten auf Schalenabschlüsse hin  $\Rightarrow$  [Figs 10.5-7]

wegen kurzer Reichweite der Kernkraft muß Form des Potentials der (Ladungs-) Dichteverteilung folgen; der Fermi-Verteilung entsprechendes Potential:



Schrödingergl. schwierig zu lösen, daher zunächst Approximation durch harmonisches Potential  $\approx$  3dim harm. Oszillator

$$V(r) = -V_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (r^2 - R_0^2)$$

mit  $\hbar \omega_0 \approx 41 \text{ MeV} \cdot A^{-1/3}$  (für  $A=40$   $\hbar \omega_0 = 12 \text{ MeV}$ )  
 $\frac{200}{7}$

Eigenzustände  $E_N = \hbar \omega_0 (N + 3/2) - V_0$

mit  $N = 2(n-1) + l \rightarrow$  Bahndrehimpulsquantenzahl

$\hookrightarrow$  Anzahl radialer Knoten  
 $n = 1, 2, 3, \dots$

$l = N, N-2, \dots, 0$  oder  $1$

Entartung  $g(N) = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$   
 jeweils mit Spin up & down

4	1, 2, 3	4, 2, 0	30	70	+
3	1, 2	3, 1	20	40	-
2	1, 2	2, 0	12	20	+
1	1	1	6	8	-
0	1	0	2	2	+

$N \quad n \quad l \quad 2g(N) \quad \text{Kumulierte Parität}$



→ magische Zahlen 2, 8, 20, 40, 70, 112 Problem!  
Kastenpotenzial oder korrektes Woods-Saxen Pot.  
lösen Problem nicht → Fig. 10-8

aber bisher Kopplung Nukleonspin-Bahndreh-  
impuls vernachlässigt

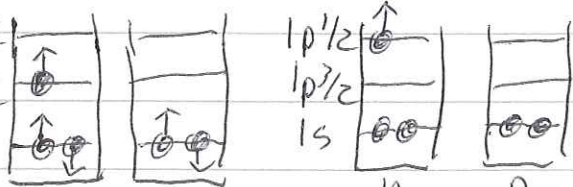
Term  $f(v) \hat{l} \cdot \hat{s}$  führt zu Aufspaltung der  
sonst entarteten Zustände mit  $j = l \pm 1/2$

1949 wurde etwa gleichzeitig von Haxel, Jensen Suess  
und Maria-Goeppert-Mayer realisiert, ein Schalen-  
modell mit starker Spin-Bahn-Kopplung ergibt  
korrekte magische Zahlen und erklärt eine  
große Anzahl exp. Daten, Drehimpulse, Energien,  
magn. Momente von Zuständen in Kernen → Fig. 10-9  
10-10

⊗ Phys. Rev 75 (1949) 1766 und 1969

experimentelle Bestimmung der Spin-Bahn-Kopplung:  
Streuung von polarisierten Neutronen oder Protonen  
an  $^4\text{He}$  populiert (ungebundener) Grundzustand  
von  $^5\text{Li}$  bzw  $^5\text{He}$  und angeregte Zustände

$^4\text{He}$ : 1s für Protonen und Neutronen gefüllt, gestreute  
p oder n populiert 1p-Zust. 1s mit  $j = 3/2, 1/2$



$^5\text{He}$  1. angeregter  
Zustand

Drehimpuls wird aus der Winkelverteilung des  
gestreuten p oder n bestimmt. Man findet in  
beiden Fällen: Grundzustand mit  $\pi = \frac{3}{2}^-$   
und 1. angeregter Zustand mit  $\pi = \frac{1}{2}^-$

4.6 bzw 7 MeV über Grundzustand  
 → sehr stark attraktive Spinbalkkopplung!  
 vgl Wasserstoffatom Feinstruktur  $10^{-5}$  Effekt und  
 anderes Vorzeichen (Ma:  $10^{-3}$  Effekt)

grundsätzliche Frage: warum haben wir trotz der  
 starken Kernkraft und hoher Dichte (ca 1/4 des  
 Volumens eines Kerns ist mit Nukleonen gefüllt)  
 annehmen, dass Elektronen sich angewandt unab-  
 hängig im Potential bewegen? Pauliprinzip spielt  
 entscheidende Rolle - energetisch benachteiligte Zu-  
 stände für ein Nukleon sind durch andere  
 Nukleonen besetzt, "Pauli-blockiert" keine Zust.  
 für Störung stehen zur Verfügung

#### 10.4 Angeregte Zustände in Atomkernen

Nahe den magischen Zahlen (Schalenabschlüssen)  
 sind Anregungsenergien gut durch Schalenmodell  
 reproduziert. Typ. Energieskala im MeV-Bereich  
 Zwischen Schalenabschlüssen werden Anregungs-  
 energien viel kleiner (Fig 10-6) bis zu 100 keV  
 und Spektren mit äquidistanten Linien er-  
 scheinen, wie aus Rotation  $\gamma$ -atomiger Moleküle be-  
 kannt.

Übergang 1-Teilchenanregung → kollektive Anregung  
 Rotations- und Vibrationsanregung des ganzen Kerns

Kerne mit abgeschlossener Schale sind kugelsym.  
 Generell können Kernform als Ellipsoid beschrieben

werden  $R_k = R_0 \left( 1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos \left( \gamma - \frac{2\pi k}{3} \right) \right)$

Halbachsen  $R_k$  mit  $k = 1, 2, 3$

Spezialfall: Rotationsellipsoide, 2 Halbachsen gleich

prolat  $\gamma = 0^\circ$   $R_1 = R_2 \leq R_3 \rightarrow R_{1,2} = R_0(1 - 0.32\beta)$

oblat  $\gamma = 60^\circ$   $R_1 = R_2 \geq R_3$

triaxial  $\gamma = 0-60^\circ$   $R_1 \neq R_2 \neq R_3$

- niedrigste Anregung deformierte Kerne: Rotation um Achse  $\perp$  Symmetrieachse

Energiezustände: Eigenwerte des Drehimpulsoperators

$E_J = \frac{\hbar^2}{2\Theta} J(J+1)$  mit Drehimpulsquantenzahl  $J = 0, 2, 4, \dots$

und Trägheitsmoment  $\Theta$  (beachtet gg-Kerne, kein Spin). Wegen <sup>Spiegel</sup>-Symmetrie um Achse senkrecht zu Sym.achse nur gerade  $J$ .

$A = \hbar^2 / 2\Theta$

$\Delta E = E_J - E_{J-2} = 4AJ - 2A$

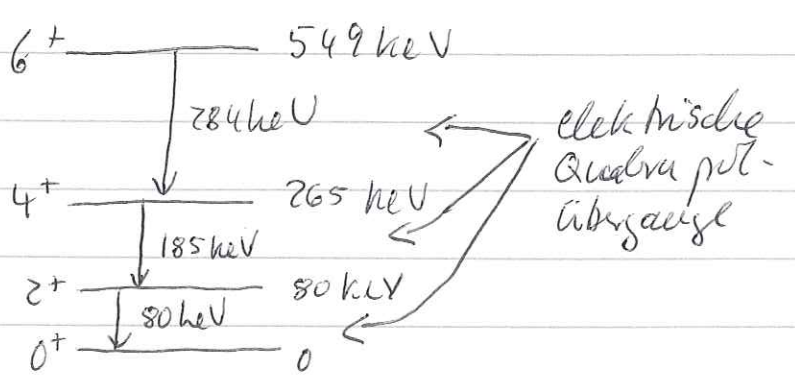
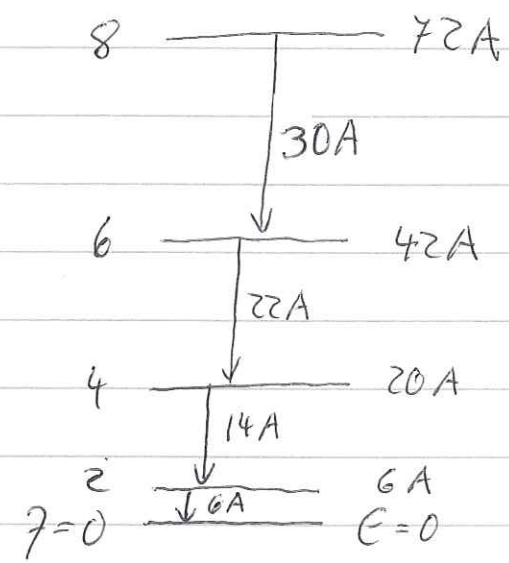
$\Delta(\Delta E) = 8A$

Spektrum mit äquidistanten Linien, Energiunterschied beobachtbarer Linien

daraus berechnet man Trägheitsmoment  $\Theta$

Beispiel:  $^{168}\text{Er}$

$\Delta(\Delta E) \approx 100 \text{ keV}$   
 $\rightarrow \Theta = 1.5 \cdot 10^6 \text{ MeV fm}^2$   
 $= \langle \mathcal{M} r^2 \rangle$



für ein gutes Beispiel siehe  $\Rightarrow$  [Fig 10-11]

Zufunktion über Deformation  $\beta$  aus Quadrupolmoment  $\hat{Q}_{2m}$   $\hat{=}$  Erwartungswert des elektrischen Quadrupoloperators  $\hat{Q}_{2m} = e \int r^2 Y_{2m}^* \rho d^3x$  (siehe Skript Phy 5, ch13)

$$Q_{2m}^i = e \int r^2 Y_{2m}^* \psi_i^* \psi_i d^3x$$

und ebenso für Quadrupolübergänge

$$Q_{2m}^{ij} = e \int r^2 Y_{2m} \psi_j^* \psi_i d^3x$$

Wenn keine Polarisation, ergibt Wüchelintegration als Integral über Produkt von 3 Kugelflächenfunktionen eine Konstante und es bleibt für el. Quadrupolübergangs wahrscheinlichkeit

$$B(E2) = \left( e \int R^*(r) r^2 R(r) r^2 dr \right)^2 \cdot \frac{1}{4\pi}$$

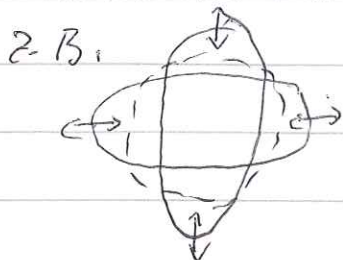
für Rotationsellipsoid wie oben kann aus el. Quadrupolübergangsstärke  $B(E2)$  direkt  $\beta$  ausgerechnet werden z.B. für Übergang  $2^+ \rightarrow 0^+$

$$B(E2) = \left( \frac{3}{4\pi} Ze \right)^2 R_0^4 \beta^2 \frac{1}{5}$$

erhalte für  $^{168}\text{Er}$   $\beta = 0.33$  Kern ist stark deformiert, allerdings erhält man  $\Theta = 3 \cdot 10^6 \text{ MeV fm}^2$  vgl. oben  $\rightarrow$  systematisch sind exp. Werte aus Spektrum Faktor 2 kleiner als für starre Rotation des ganzen deformierten Kerns berechnet. Verstanden: Fluss des Kern supraflüssig durch Cooperpaare von Protonen und Neutronen, nimmt nicht an Rotation teil.

10-13

Vibrationsanregung: ähnlich wie Flüssigkeitstropfen können Kerne zu Schwingungen angeregt werden



Oberfläche parametrisiert durch  

$$R(\vartheta, \varphi, t) = R_0 \left( 1 + \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \right)$$

mit Schwingungsamplituden  $a_{lm}$   
 $l=0$  radiale Kompressionschwingung, Monopol,  
 weist Kompressibilität von Kernmaterie, hohe Anregungsenergie, 15-20 MeV

$l=1$  Translation, allerdings Dipolschwingung von Protonen gegen Neutronen möglich "Dipolnutenresonanz", je nach  $A$  10-20 MeV Anregungsenergie

$l=2$  Quadrupolschwingungen, für Rotationen ellipsoid durch 2 Parameter beschreiben  $\beta(t)$  und  $\gamma(t)$   
 (siehe oben) 
$$R(\vartheta, \varphi, t) = R_0 \left( 1 + \beta(t) \cos \gamma(t) Y_2^0(\vartheta, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta(t) \sin \gamma(t) Y_2^2(\vartheta, \varphi) \right)$$

separierte  $\beta$  und  $\gamma$ -Vibrationen (Bild oben ist ein  $\beta$ -Vibration)

bei kleinen Amplituden harmonisch mit Spektrum

$$E_{\text{vib}}^{lm} = \hbar \omega_{lm} \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad 0^+, 2^+, 0^+ 2^+ 4^+ \text{ entartet, etc.}$$

typische Energien im 0.5 bis 2 MeV Bereich.

Auf Vibrationszuständen sind in deformierten Kernen Rotationsbanden aufgebaut (Fig. 10-11)