9. Multiplikative Erhaltungssätze

Symmetrieoperation ist unitäre Transformation, U.
Transformationsoperator ist hermitesch, Eigenwerte erhalten wenn $[H, U] = 0$
$U\Psi = u_\alpha \Psi$ mit Eigenwerten u_α
2-Teilchensystem: $U\Psi_\alpha \Psi_\beta = U_\alpha U_\beta \Psi_\alpha \Psi_\beta = u_\alpha u_\beta \Psi$

9.1 Parität

Paritätstransformation ist räumliche Inversion
$P(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ diskrete Transformation
$P\Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r})$
offensichtlich $P^2 = 1$ Einheitstransformation
also nur Eigenwerte ± 1 möglich
wenn $\Psi(\vec{r})$ eine Eigenfunktion der Parität,
$P\Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r}) = \pi \Psi(\vec{r})$ mit $\pi = \pm 1$
$\pi = +1$ Zustand hat "gerade" Parität
-1 " "ungerade" "

- Elementarteilchen, Hadronen, Atomkerne, Atome, Austauschbosonen sind alle in Eigenzuständen des P-Operators, haben also eine Parität

- Observable verhalten sich unterschiedlich unter Paritätstransformation
- "echte" Vektoren wie $\vec{r}, \vec{p}, \vec{E}$ ändern Vorzeichen unter Paritätstransformation $\longleftrightarrow$ "polare Vektoren"
- andere wie $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{S}$, $\vec{B}$ sind unverändert oder invariant $\longleftrightarrow$ "axiale Vektoren" $PL_x = (-y)(-p_z) - (-z)(-p_y) = L_x$
- Skalarprodukte von Vektoren:

polar · polar oder axial · axial sind invariant unter P $\leftrightarrow$ "echte Skalare"
polar · axial, wie $\vec{p} \cdot \vec{L}$ ändern ihr Vorzeichen unter P $\leftrightarrow$ "Pseudoskalare"

- Transformation des räumlichen Teil einer Wellenfunktion in Kugelkoordinaten
  $\Psi(\vec{r}) = R(r) \sum Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ mit $Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = P_l^m(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$

$P(r,\vartheta,\varphi) = (r, \pi-\vartheta, \varphi+\pi)$
$P \exp(im\varphi) = \exp(im(\varphi+\pi)) = (-1)^m \exp(im\varphi)$
$P\, P_l^m(\cos\vartheta) = P_l^m(\cos(\pi-\vartheta)) = (-1)^{l+m} P_l^m(\cos\vartheta)$
$P\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = (-1)^{l+2m} Y_{lm} = (-1)^l Y_{lm}$

- Paritätserhaltung in einem Vielteilchensystem: da die Parität π eine multiplikative Quantenzahl $\rightarrow$ bei Paritätserhaltung ist Produkt der (intrinsischen) Paritäten aller involvierten Teilchen und ihrer Relativbewegung erhalten

z.B. 2-Teilchensystem mit Wellenfunktion
$\Psi = \Psi_\alpha(\vec{r}_\alpha)\, \Psi_\beta(\vec{r}_\beta)\, \phi(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)$
$P\Psi = \pi_\alpha \pi_\beta \Psi_\alpha \Psi_\beta P\phi = \pi_\alpha\pi_\beta (-1)^l \Psi$ wenn ϕ durch Kugelfunktionen beschrieben

- alle Messungen bisher bestätigen: em. und starke WW erhalten Parität
  Beispiel: Zustände in Kernen können nach ihrer Parität klassifiziert werden, man kann nach

paritätsverbotenen Zerfall suchen
α-Zerfall eines angeregten Zustands in ^{16}O
mit $E^* = 8.87$ MeV und $J^\pi = 2^-$

$$^{16}O^* \rightarrow {}^{12}C + \alpha$$

π $\quad -1 \qquad\qquad +1 \qquad +1$ ← alle gg-Kerne haben im Grundzustand $J^\pi = 0^+$

damit Zerfall in Grundzustand möglich, müßte $(-1)^l$ negativ sein also l ungerade. Da aber $\Delta J = 2$, $\rightarrow l = 2$ gerade
d.h. Zerfall nur möglich, wenn Kernzustand entweder in $^{16}O^*$ oder ^{12}C eine Beimischung der entgegengesetzten Parität hat
erwarte für erlaubten α-Zerfall $\Gamma_\alpha = 60$ keV,
messe $\Gamma_\alpha < 2 \cdot 10^{-8}$ eV, also nur Obergrenze
bedeutet Reduktion um Faktor $3 \cdot 10^{-12}$, d.h. Beimischung der anderen Parität in Kernwellenfunktion $< 10^{-6}$

- Paritätszuordnung für Teilchen
man kann zeigen, daß relative Parität von Zuständen verschiedener Ladung grundsätzlich nicht meßbar ist. Gilt für elektrische Ladung, aber genauso für alle anderen Quantenzahlen.
→ Zuordnung aufgrund theor. Argumente
d.h. für Hadronen mit Quantenzahlen (Q, A, S) (Ladung, Baryonzahl, Strangeness) werden 3 Paritäten definiert: $\pi_p = \pi_n = \pi_\Lambda = +1$
die Paritäten aller anderen Hadronen sind relativ dazu meßbar

z.B. Pion: betrachte Reaktion $\pi^- + d \rightarrow n + n$

$\Pi_{\pi^-} \cdot \Pi_d (-1)^{l_i} = \underbrace{\Pi_n^2}_{+1} (-1)^{l_f}$ $\qquad \Pi_d = \Pi_p \cdot \Pi_n$ im Grundzust.

mit Kenntnis einige Eigenschaften des Deuterons ($L=0, S=1, J=1$) und der Einfangreaktion (Pion wird in atomaren s-Zustand eingefangen, $l_i = 0$) kann man eindeutig festlegen: $\Pi_{\pi^-} = -1$

ebenso π^0 und π^+ (Messung π^0: Plano et al. PRL 3 (1959) 525)

alle Eichbosonen haben negative Parität ($\gamma, g, W^\pm, Z$)

Higgs $J^\Pi = 0^+$ nach gegenw. Stand

Fermion-Antifermion (z.B. p und $\bar{p}$) haben entgegengesetzte Parität (auch aus Diractheorie erwartet)

Boson-Antiboson haben gleiche Parität

- Paritätsverletzung in der schwachen WW

ϑ-τ Puzzle: in frühen 1950igern 2 Zerfälle beobachtet $\vartheta^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ und $\tau \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^-$

ϑ und τ haben Spin $S=0$ und identische Massen und Lebensdauer. Dasselbe Teilchen? Aber das würde Parität verletzen, $S_\vartheta = S_\tau = S_\pi = 0 \rightsquigarrow l_f = 0$

$\Pi_\vartheta = \Pi_{\pi^+} \cdot \Pi_{\pi^-} = +1 \quad \Pi_\tau = \Pi_{\pi^+} \cdot \Pi_{\pi^-} \cdot \Pi_{\pi^0} = -1$

1956 Analyse aller Daten von T.D. Lee und C.N. Yang $\rightarrow$ keine Evidenz für Paritätserhaltung in der schwachen WW (Phys. Rev. 104 (1956) 254)

Vorschlag, wie man Paritätsverletzung testen kann.

Als erste führt Chien-Shiung Wu "Madame Wu", β-Zerfallsexpertin von Columbia Univ zus. mit Tief-

Temperaturgruppe des National Bureau of Standards in Washington Weihnachten 1956 Experiment durch.

- Wie mißt man Paritätsverletzung? finde Erwartungswert eines Pseudoskalars von Null verschieden, z.B. $\vec{v}\cdot\vec{s}$ P hermitesch, $P^+P=1$

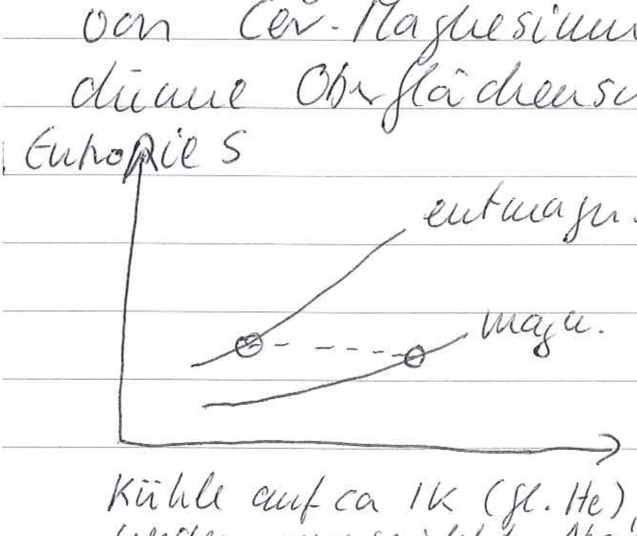
$$\langle\psi|\vec{v}\cdot\vec{s}|\psi\rangle = \langle\psi|\vec{v}\cdot\vec{s}\,P^+P|\psi\rangle$$
$$= -\langle\psi|P^+\vec{v}\cdot\vec{s}\,P|\psi\rangle \quad \text{da P Vorzeichen Pseudoskalar umkehrt}$$
$$= -\underbrace{\pi^2}_{+1}\langle\psi|\vec{v}\cdot\vec{s}|\psi\rangle = 0$$

messe z.B. Winkelverteilung von β-Zerfall v. polarisierten Atomkern

$${}^{60}Co \to {}^{60}Ni + e^- + \bar{\nu}_e$$

Kernspinpolarisation in Co-Salz durch starkes B-Feld bei sehr niedriger Temperatur
Bedingung: Zeeman-Aufspaltung $g\mu_N B \gg kT$, dann nur niedrigstes Niveau besetzt, Kernspin hat definierte Orientierung relativ zu $\vec{B}$
da $\mu_N = 3.15\cdot10^{-14}$ MeV/T ⇝ $kT \ll 3\cdot10^{-14}$ MeV
und $B \approx 1$ T $T \ll$ mK millikelvin

Kühlung durch adiabatische Demagnetisierung von Cer-Magnesium (Kobalt) Nitrat (Co ganz dünne Oberflächenschicht auf $CeMg\,NO_3$ Kristall



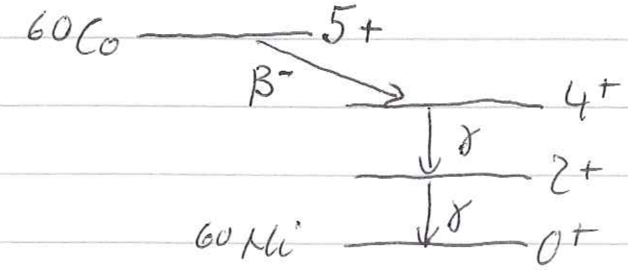
magn. Zustand hat höhere Ordnung als entmagnetisiert. Zustand ⇝ Entmagnetisierung kühlt
(Rose-Gorter Methode)

Kühle auf ca 1K (fl. He), lege B-Feld an, Spin d. paramagn. Atome (Cer) werden ausgerichtet. Abschalten B-Feld → Kühlung nach Kühlung wird Kernspin durch Solenoid-spule ausgerichtet und Elektronen in Richtung $\vec{B}$ und entgegengesetzt gemessen $\Rightarrow$ Fig. $\boxed{9-1,2}$

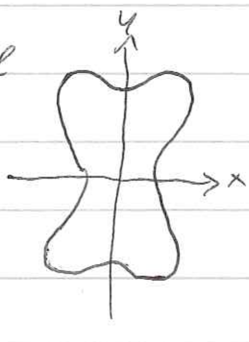
$\langle \cos\vartheta_e \rangle = \langle \Psi | \frac{\vec{S}\cdot\vec{v}}{|\vec{S}|\cdot|\vec{v}|} | \Psi \rangle < 0$ gefunden

Elektronen präferentiell in Richtung entgegen Kernspin emittiert, d.h. Erwartungswert des Pseudoskalars $\vec{S}\cdot\vec{v} \neq$ Paritätsverletzung

Grad der Polarisierung wird gemessen durch Anisotropie der Gammastrahlen im ^{60}Ni



β^- nimmt eine Einheit von Drehimpuls mit, ^{60}Ni polarisiert in 4^+ in Richtung von ^{60}Co. Zerfall: 2 sog. gestreckte elektr. Quadrupol-übergänge



Polardiagramm der Gammaintensität, wenn Spinrichtung in x
Diff $90° - 0°$ ca 35%

9.2. Ladungskonjugation

Symmetrieoperation der Ladungskonjugation kehrt Vorzeichen aller ladungsartigen Quantenzahlen um

Es sei $|N\rangle = |A, Q, S, L_e, \ldots\rangle$ dann ergibt
$C|N\rangle = |-N\rangle$ wie für Parität $C^2 = 1$

Ladungskonjugationssymmetrie in der klassischen

Physik: Invarianz der Maxwellgl. unter Vorzeichenumkehr der elektrischen Ladung u. Stromdichte

$\vec{E} \xrightarrow{C} -\vec{E}$ $\vec{B} \xrightarrow{C} -\vec{B}$ $\vec{\mu} \xrightarrow{C} -\vec{\mu}$

aber $\vec{s} \xrightarrow{C} \vec{s}$ Spin unverändert

mögliche Eigenzustände: $C\Psi = \eta_c \cdot \Psi$ mit Eigenwerten $\eta_c = \pm 1$

allerdings sind die meisten Teilchen nicht Eigenzustände von C: $C|\pi^-\rangle = |\pi^+\rangle \neq \pm|\pi^-\rangle$

nur völlig neutrale Teilchen können Eigenzustände von C sein, wenige Fälle

- Photon $C|\gamma\rangle = \eta_c|\gamma\rangle$
  da E-Feld einer bewegten Ladung Vorzeichen ändert unter C-Transformation, ordnet man zu $\eta_c = -1$ für Photon
  $\rightarrow$ n-Photon Zustände haben $\eta_c = (-1)^n$
- π^0 zerfällt $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, also $C|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle$
  Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ würde Ladungskonjugations-Symmetrie C verletzen. finde Obergrenze
  $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma} / \Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma} < 3 \cdot 10^{-8}$
- andere Eigenzust. e^+e^-, $\pi^+\pi^-$, $\bar{p}p$, $\bar{n}n$ $\{\eta_c$ hängt von L und S ab
- starke und em. WW sind invariant unter C
  z.B. Reaktion $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+\pi^0\pi^-$
  Winkelverteilung und Spektren von π^+ und π^- identisch.

- schwache WW verletzt C-Invarianz
  finde experimentell, Neutrinos aus β-Zerfall sind immer linkshändig, d.h. $\overleftarrow{p}\ \overrightarrow{s}$

und Antineutrinos sind immer rechtshändig
$\overset{s}{\Longrightarrow} p$

$$p \overset{s}{\Longleftarrow} \nu \xrightarrow{\quad P \quad} \nu \overset{s}{\Longrightarrow} p$$ rechtshändiges ν

aber

$\downarrow C$ $\qquad\qquad$ $\searrow CP$

$$p \overset{s}{\Longleftarrow} \bar{\nu}$$ linkshändiges Antineutrino

$$\bar{\nu} \overset{s}{\Longrightarrow} p$$ rechtshändiges $\bar{\nu}$ ✓

Händigkeit der Neutrinos (Helizität) im β-Zerfall erklärt Verletzung der Parität und Ladungskonjugationssymmetrie, H_{weak} muß entsprechend konstruiert werden

- während zunächst angenommen wurde, daß schwache WW CP symmetrisch, konnte am K^0, $\bar{K}^0$-System gezeigt werden: schwache WW verletzt auch CP auf 10^{-6} Niveau (CERN Exp. NA31 und NA48 am SPS, KTEV am Tevatron) → siehe Teilchenphysikvorlesung und Skript

9.3 Zeitumkehrinvarianz

Transformation der Zeitumkehr durch Operator T. T ist nicht unitär, also gibt es keine damit verknüpfte Observable, Zeit t ist ein Parameter (T ist antiunitär). Dennoch ist Zeitumkehrinvarianz eine nützliche Symmetrie in der Physik.

Verhalten phys. Größen unter Zeitumkehr

$\vec{r} \xrightarrow{T} \vec{r}$

$\vec{p} \quad -\vec{p}$

$\vec{s} \quad -\vec{s}$ axialer Vektor wie $\vec{r}\times\vec{p}$

$\vec{E} \quad \vec{E}$

$\vec{B} \quad -\vec{B}$ ax. Vektor

- Newton'sche Gesetze und Maxwell Gleichungen invariant unter T, da 2. Ableitungen
- Schrödinger Gl. $i\hbar\, d\Psi/dt = H\Psi$

T gute Symmetrie, wenn $[H,T]=0$.

Erfüllt, wenn $T\psi(t)$ und $\psi(t)$ dieselbe Schrödinger Gl. erfüllen $i\hbar\, dT\psi(t)/dt = H\Psi(t)$

der einfachste Versuch $T\psi(t)=\psi(-t)$ schlägt fehl. Setze $-t=t'$ und erhalte

$-i\hbar\, d\psi(t')/dt' = H\Psi(t')$

Korrekter Ansatz Wigner $T\Psi(t) = \Psi^*(-t)$

Betrachte freies Teilchen mit Impuls $\vec{p}$

$\Psi(\vec{r},t) = \exp(\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et))$

zeitumgekehrte Wellenfunktion

$T\Psi(\vec{r},t) = \Psi^*(\vec{r},-t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}+Et))$

$= \exp(\frac{i}{\hbar}(-\vec{p}\cdot\vec{r} - Et))$

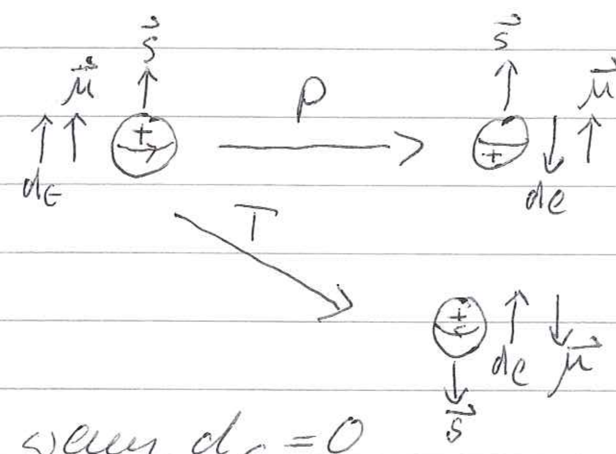
→ beschreibt Teilchen mit Impuls $-\vec{p}$, d.h. man muß $T\Psi(\vec{r},t)$ nicht als Teilchen, das in der Zeit rückwärts läuft, interpretieren. Physikalische Interpretation von T ist Umkehr der Bewegung

$T|\vec{p},\vec{J}\rangle = |-\vec{p},-\vec{J}\rangle$

- Tests von T-Symmetrie? Keine observablen Eigen-

werte. Aber T-Invarianz impliziert Symmetrie
von Reaktionsraten in Vorwärts- und Rückwärts-
richtung nach Korrektur für Phasenraum
"detailed balance" ⇒ $\boxed{\text{Fig. 9-3}}$
guter Test in starker WW
em WW: Elementarteilchen mit Spin $\vec{s}$ dürfen
kein elektrisches Dipolmoment haben. Würde
sowohl P als auch T verletzen*

Vorstellung Teilchen als
Kugel mit räumlich asym.
Ladungsvert., Richtung von
$\vec{s}$ legt Vorzugsrichtung fest
und Richtung magn. Dipol-
moment $\vec{\mu}$



T und P nur gute Symm., wenn $d_E = 0$
Neutron: $d_E < 2.9 \cdot 10^{-26}$ e·cm
Elektron: $d_E = (0.07 \pm 0.07)\, 10^{-26}$ ecm

* magn. Dipolmoment $\vec{\mu} \propto \vec{s}\cdot\vec{B}$ $\quad \vec{s}\cdot\vec{B} \xrightarrow{T} \vec{s}\cdot\vec{B}$
el. Dipolmoment $\vec{d}_E \propto \vec{s}\cdot\vec{E}$ $\quad \vec{s}\cdot\vec{E} \xrightarrow{T} -\vec{s}\cdot\vec{E}$
d.h. rel. Richtung von $\vec{\mu}$ und $\vec{d}_E$ $\quad \vec{s}\cdot\vec{E} \xrightarrow{P} -\vec{s}\cdot\vec{E}$
ändert sich mit P und T $\quad \vec{s}\cdot\vec{B} \xrightarrow{P} \vec{s}\cdot\vec{B}$

- CPT-Theorem: unabhängig von Schwinger 1951
und Lüders 1954 postuliert
für praktisch jeden vorstellbaren Hamiltonoperator
gilt $[CPT, H] = 0$
generalisiert durch Pauli 1955: jede Lorentzinvari-
ante, relativistische Feldtheorie, die kausal ist,
ist CPT invariant

einige Stringtheorien und Theorien der Quantengrav. verletzen CPT (und damit Lorentzinvarianz)

Konsequenz von CPT Invarianz: unsere Welt und eine zeitumgekehrte, paritätsinvertierte Antiwelt müssen sich identisch verhalten.
Lebensdauern und Massen von Teilchen und Antiteilchen müssen identisch sein

$|m_p - m_{\bar{p}}| / m_p < 2 \cdot 10^{-9}$

$|\tau_{\mu+} - \tau_{\mu-}| / \tau_{ave} < (2 \pm 8) \cdot 10^{-5}$

Zukunft: Messung von Eigenschaften von Antiwasserstoff, z.B. 1s-2s Übergang auf 10^{-15}
Kürzlich gemessen: ALICE am LHC
rel. Differenz des Masse zu Ladungsverhältnisses
Antideuterium - Deuterium $(0.9 \pm 0.5(\text{stat}) \pm 1.4(\text{syst})) \cdot 10^{-4}$
Antihelium 3 - Helium 3 $(-1.2 \pm 0.9(\text{stat}) \pm 1.0(\text{syst})) \cdot 10^{-3}$
mit Info über Proton und Neutron $\rightarrow$
rel Unterschied in Bindungsenergien
$\Delta E_{d\bar{d}} / E_d = -0.04 \pm 0.05(\text{stat}) \pm 0.12(\text{syst})$