

M Mathematischer Anhang

Gliederung:	M.1 Geometrie und Algebra
	M.2 Funktionen
	M.3 Differentialrechnung
	M.4 Integralrechnung
	M.5 Differential- und Integralrechnung bei mehreren Variablen
	M.6 Vektorrechnung
	M.7 Vektoranalysis
	M.8 Komplexe Zahlen

Hier findet man die Rechenkunst,
Ohn' die das Lesen ist umsonst.
Es ist nicht viel, Du wirst es sehen,
Und ist auch nicht schwer zu verstehen.

Dies ist der mathematische Anhang zu einem Physikbuch, das leider noch nicht fertig ist. Auf Wunsch von Prof. Glässel stelle ich ihn den Heidelberger Physikstudenten zur Verfügung.

Einige, für die Physik wichtige Gebiete der Mathematik sind in diesem Anhang nicht enthalten, z. B. Differentialgleichungen und die Fourier-Analyse und Transformation. Sie werden im Buch an den entsprechenden Stellen behandelt.

Joachim Heintze

Mathematische Zeichen

$=$	gleich	$\parallel$	ist parallel zu
$\neq$	nicht gleich	$\perp$	steht senkrecht auf
$:=$	definitionsgemäß gleich	$a \rightarrow b$	a strebt nach b
$\approx$	ungefähr gleich	$\rightarrow$	Daraus folgt
$\hat{=}$	entspricht	$\longleftrightarrow$	Daraus folgt wechselseitig
$\propto$	proportional zu	$\sum$	Summe
∞	unendlich	$ a $	Betrag von a
$>$	größer als	$\geq$	größer oder gleich
$<$	kleiner als	$\leq$	kleiner oder gleich
$\gg$	viel größer als	$\gtrsim$	größer oder ungefähr gleich
$\ll$	viel kleiner als	$\lesssim$	kleiner oder ungefähr gleich

Weitere Zeichen (z. B. Funktionsbezeichnungen, Integralzeichen) werden dort erklärt, wo sie eingeführt werden.

Das griechische Alphabet

Alpha	A	α	Jota	I	ι	Rho	P	ρ, ϱ
Beta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	My	M	μ	Ypsilon	Υ	υ
Epsilon	E	ϵ, ε	Ny	N	ν	Phi	Φ	φ, ϕ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Omikron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	ϑ, θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

Abkürzungen von Zehnerpotenzen („Präfixe“)

10	deka	da	10^{-1}	dezi	d
10^2	hekto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	Mega	M	10^{-6}	mikro	μ
10^9	Giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	Tera	T	10^{-12}	piko	p
10^{15}	Peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	Exa	E	10^{-18}	atto	a

In der Informatik: kilo = 2^{10} = 1024, Mega = 2^{20} , Giga = 2^{30} .

M.1 Geometrie und Algebra

Was man im Schlaf wissen müsste

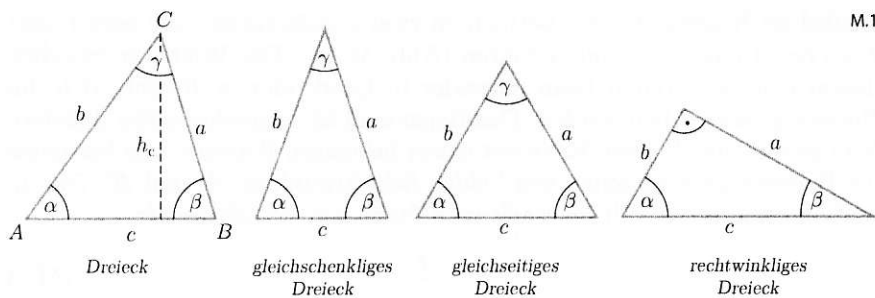
Binomische Formeln.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Dreiecke. Siehe Abb. M.1



M.1

Abb. M.1. Dreiecke

Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$$\text{Fläche: } A = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

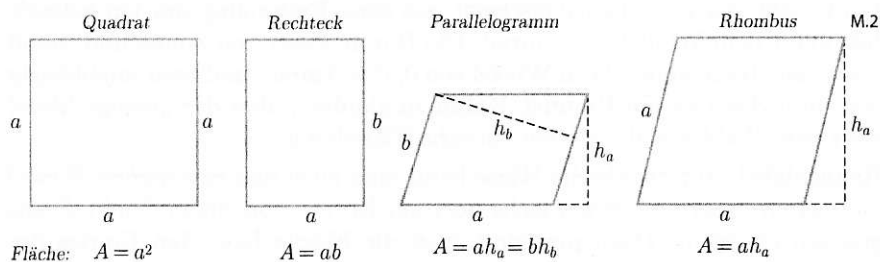
gleichschenkliges Dreieck: $a = b \iff \alpha = \beta$

gleichseitiges Dreieck: $a = b = c \iff \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$

rechtwinkliges Dreieck: $a^2 + b^2 = c^2$ (Lehrsatz des Pythagoras)

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha; \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha; \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Vierecke. In der Physik spielen vor allem die in Abb. M.2 gezeigten Vierecke eine Rolle.



M.2

Abb. M.2. Vierecke

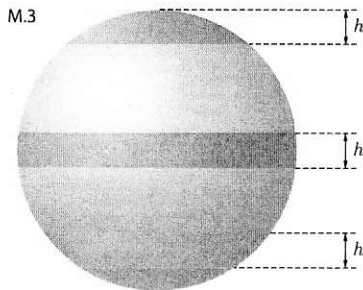
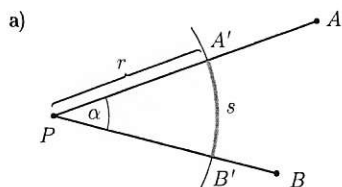


Abb. M.3. Kugelzonen gleicher Fläche



M.4

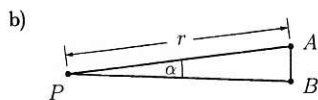


Abb. M.4. Winkel im Bogenmaß.

- a) Zur Definition (M.1),
b) kleine Winkel, zu (M.3)

Tabelle M.1. Umrechnung von Grad in Radian (gerundete Zahlen)

Grad	Radian
360°	$2\pi = 6,28 \text{ rad}$
180°	$\pi = 3,14 \text{ rad}$
90°	$\pi/2 = 1,57 \text{ rad}$
57,3°	$= 1 \text{ rad}$
1°	$= 17,5 \text{ mrad}$

Kreis, Kugel, ...

Kreis vom Radius r : Umfang: $U = 2\pi r$, Fläche: $A = \pi r^2$ $\pi = 3,14159\dots$

Kugel vom Radius r : Oberfläche: $A = 4\pi r^2$ Volumen: $V = \frac{4\pi}{3} r^3$

Fläche einer Kugelzone: $A = 2\pi r h$
(unabhängig von der Lage der Zone, Abb. M.3).

Kegel und Pyramide: Man sollte wissen, wie diese Körper aussehen, und dass ihr Volumen $V = \frac{1}{3} \text{ Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$ ist.

Was Sie vielleicht nicht auf der Schule gelernt haben

Winkel im Bogenmaß. Wir betrachten zwei gerade Linien, die vom Punkt P zu den Punkten A und B führen (Abb. M.4 a). Der Winkel α zwischen diesen beiden Geraden kann entweder in Grad oder in *Radian*, d. h. im *Bogenmaß* angegeben werden. Das Bogenmaß ist folgendermaßen definiert: Man zeichne um P einen Kreis mit einem beliebigen Radius r und bestimme die Bogenlänge s zwischen den beiden Schnittpunkten A' und B' . Den in Radian gemessenen Winkel erhält man durch das Verhältnis s/r :

$$\alpha := \frac{s}{r}. \quad (\text{M.1})$$

Wenn $\alpha = 1$ Radian (abgekürzt: 1 rad) sein soll, muss $s = r$ sein. Umrechnung von Grad in Radian (Tabelle M.1): Dem vollen Winkel von 360° entspricht die Bogenlänge $s = 2\pi r$, also ist im Bogenmaß $\alpha = 2\pi \text{ rad}$. Demnach ist

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,29577\dots^\circ. \quad (\text{M.2})$$

Wenn A und B den gleichen Abstand von P haben, kann man natürlich r gleich diesem Abstand wählen. Das empfiehlt sich besonders bei kleinen Winkeln (Abb. M.4 b), denn dann ist der Unterschied zwischen der Bogenlänge s und dem Abstand $\overline{AB}$ klein, und man erhält

$$\alpha \approx \frac{\overline{AB}}{r}. \quad (\text{M.3})$$

Ein Objekt von 1 mm Länge erscheint, aus einer Entfernung von 1 m betrachtet, unter dem Winkel $\alpha = 1 \text{ mrad}$. Die Durchmesser von Sonne und Mond erscheinen beide unter einem Winkel von $0,5^\circ \approx 9 \text{ mrad}$, und zwar unabhängig von ihrer Stellung am Himmel. Kaum zu glauben, aber der „riesige Mond über dem Waldesrand“ ist eine optische Täuschung.

Raumwinkel. Auf die gleiche Weise kann man auch den *räumlichen Winkel* definieren, unter dem eine Fläche oder ein Körper von einem Punkt P aus gesehen erscheint. Dazu projiziert man die Fläche bzw. den Umriss des Körpers auf eine Kugel vom Radius r (Abb. M.5 a). Der Raumwinkel ist dann definiert als

$$\Omega := \frac{A'}{r^2}. \quad (\text{M.4})$$

Er wird gemessen in *Steradian*, abgekürzt sr. Der „volle Raumwinkel“, d. h. der Raumwinkel der gesamten Kugeloberfläche ist

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi = 12,56... \text{ sr} . \quad (\text{M.5})$$

Bei Flächen, deren Ausdehnung klein gegen ihren Abstand von P ist, ist es zweckmäßig, r gleich diesem Abstand zu setzen. Steht die Fläche A , von P aus gesehen senkrecht zur Beobachtungsrichtung (Abb. M.5 b), ist in guter Näherung

$$\Omega \approx \frac{A}{r^2} ; \quad (\text{M.6})$$

steht die Fläche A schief (Abb. M.5 c), dann ist der Raumwinkel bezüglich P

$$\Omega \approx \frac{A \cos \vartheta}{r^2} . \quad (\text{M.7})$$

Sonne und Mond sieht man von der Erde aus unter dem Raumwinkel $\Omega \approx 6 \cdot 10^{-5} \text{ sr}$.

Kegelschnitte. Als Kegelschnitte bezeichnet man die Kurven, die als Schnittlinien entstehen, wenn man einen Kegel mit kreisförmiger Grundfläche mit einer Ebene schneidet (Abb. M.6). Diese Kurven spielen in der Physik eine große Rolle. Liegt die Ebene senkrecht zur Kegelachse, erhält man einen Kreis. Liegt sie parallel zu einer Mantellinie, erhält man eine Parabel. Ellipse und Hyperbel entstehen bei kleinerer oder größerer Neigung der Schnittebene.

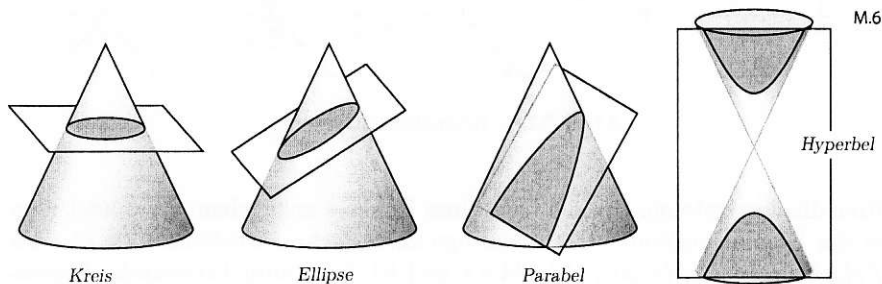


Abb. M.6. Kegelschnitte. Blau sind die innerhalb der Kegel liegenden Teilflächen der Schnittebenen. Zur vollständigen Darstellung der Hyperbel braucht man einen Doppelkegel

Einen Kreis kann man mit einem Zirkel konstruieren, die Ellipse, indem man an zwei Punkten, den Brennpunkten, einen Faden der Länge $2a$ befestigt und bei gespanntem Faden einen Bleistift um die Brennpunkte führt (Abb. M.7 a): $l_1 + l_2 = 2a$ ist konstant; a ist die große, b die kleine Halbachse der Ellipse, $2e$ der Abstand der Brennpunkte F und F' voneinander. Nach dem Lehrsatz des Pythagoras ist

$$e^2 = a^2 - b^2 . \quad (\text{M.8})$$

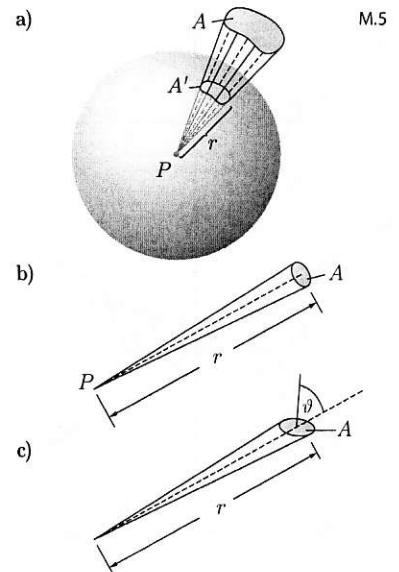


Abb. M.5. Raumwinkel.
a) Zur Definition (M.4),
b) kleine Raumwinkel, zu (M.6)
c) zu (M.7)

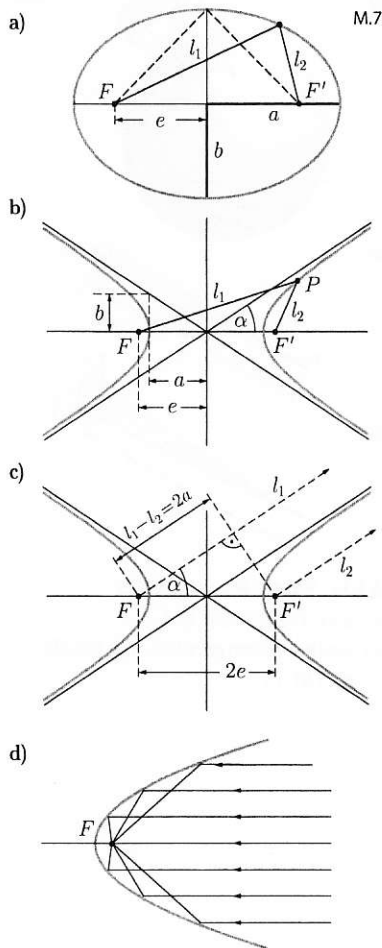


Abb. M.7. Zu den Eigenschaften der Kegelschnitte. Der Punkt P in (b) ist bei (c) ins Unendliche verschoben

Man erkennt das, wenn man die gestrichelte Linie in Abb. M.7 a betrachtet. Das Verhältnis $\varepsilon = e/a$ wird die *Exzentrizität* genannt. Der Begriff „Brennpunkt“ stammt aus der Optik. Alle Strahlen, die von F ausgehen, treffen sich nach Reflexion an der Ellipse in F' und umgekehrt.

Auch die Hyperbel hat zwei Punkte, die man Brennpunkte nennt (Abb. M.7 b). Hier ist die *Differenz* $l_1 - l_2 = 2a$ konstant. In großem Abstand von den Brennpunkten nähert sich die Hyperbel immer mehr zwei geraden Linien, die sich im Zentrum schneiden, den *Asymptoten*. Sie schließen mit der geraden Linie durch F und F' den Winkel α ein. Im Bild b sieht man, dass $\tan \alpha = b/a$ ist und aus Bild c folgt $\cos \alpha = a/e$. Mit $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ folgt

$$e^2 = a^2 + b^2. \quad (\text{M.9})$$

Wenn die Asymptoten senkrecht aufeinander stehen, ist $\alpha = 45^\circ$ und $b = a$. Das nennt man eine gleichseitige Hyperbel.

Eine Parabel entsteht, wenn man den einen Brennpunkt einer Ellipse, z. B. F' , entlang der großen Halbachse ins Unendliche verschiebt. Parallele Strahlen, die aus dieser Richtung kommen, treffen sich nach Reflexion an der Parabel in F (Abb. M.7 d). Das alles, und noch viel mehr wussten schon die alten Griechen über die Kegelschnitte.

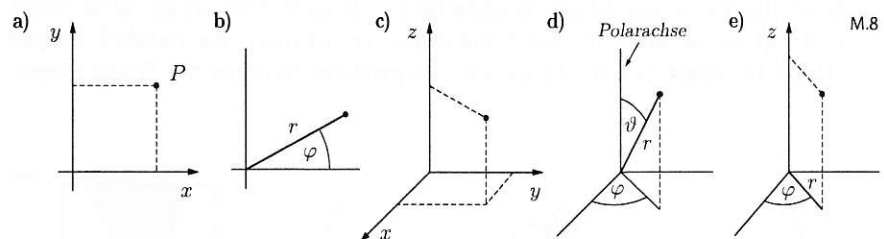


Abb. M.8. Koordinatensysteme

Koordinatensysteme. Um die Lage eines Punktes anzugeben, verwendet man in der Ebene gewöhnlich rechtwinklige *kartesische Koordinaten* (x, y) oder *Polarkoordinaten* (r, φ) (Abb. M.8 a und b), im Raum *kartesische Koordinaten* (x, y, z) bzw. *sphärische Polarkoordinaten* (r, φ, ϑ) (Abb. M.8 c und d). Letztere nennt man auch *Kugelkoordinaten*. Den Winkel ϑ nennt man Polarwinkel, den Winkel φ Azimut. Manchmal werden auch *Zylinderkoordinaten* (r, φ, z) eingeführt, das sind ebene Polarkoordinaten, ergänzt durch eine z -Achse (Abb. M.8 e). Umrechnung der Polarkoordinaten in kartesische:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & \text{bzw.} & & x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi & & & y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ & & & & z &= r \cos \vartheta \end{aligned} \quad (\text{M.10})$$

Man beachte die Anordnung der Koordinatenachsen: Die x -Achse, um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht, geht in die y -Achse über. Die z -Achse wird dieser Drehung im Sinn einer Rechtsschraube („Wie man den Wasserhahn zudreht“) zugeordnet. Das nennt man ein *rechtshändiges* Koordinatensystem.

Analytische Darstellung von Kurven und Flächen. Für die analytische (d. h. formelmäßige) Darstellung einer Kurve in der (x, y) -Ebene gibt es drei Möglichkeiten:

a) Implizite Darstellung: $F(x, y) = \text{const}$

Alle Punkte, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen, liegen auf der Kurve. Ein einfaches Beispiel: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ist die in Abb. M.9 dargestellte Gerade.

Weitere Beispiele: Kreis: $x^2 + y^2 = R^2$ oder $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$ (M.11)

$$\text{Ellipse: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{M.12})$$

$$\text{Hyperbel: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{M.13})$$

b) Explizite Darstellung: $y = f(x)$

Diese Darstellung entsteht, wenn man $F(x, y) = \text{const}$ nach y auflöst.

Beispiel: Ein Kreis um den Nullpunkt des Koordinatensystems

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2} \quad (x \leq R). \quad (\text{M.14})$$

c) Parameterdarstellung: $x = x(t), y = y(t)$

Hier ist der Parameter t eine Variable, die eine geometrische oder physikalische Bedeutung haben kann, aber nicht haben muss.

Beispiel: Ein Kreis mit dem Radius R

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t. \quad (\text{M.15})$$

Für die Darstellung einer Kurve im Raum wird meist eine Parameterdarstellung

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (\text{M.16})$$

benutzt. Als Beispiel betrachten wir drei Kurven, die vom Nullpunkt des Koordinatensystems zum Punkt $x = 1, y = 1, z = 1$ führen (Abb. M.10).

$$\text{Kurve A: } x(t) = t, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{Kurve B: } x(t) = t, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t^2 \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\text{Kurve C: } x(t) = t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$x(t) = 1, \quad y(t) = t, \quad z(t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$x(t) = 1, \quad y(t) = 1, \quad z(t) = t \quad 0 \leq t \leq 1$$

A ist eine gerade Linie, B eine Parabel und C ein Kurvenzug mit drei geraden Teilstücken.

Bei Flächen im Raum verwendet man:

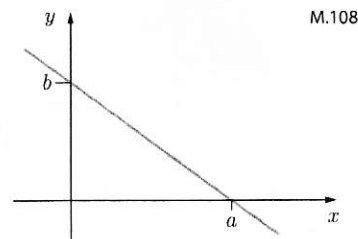


Abb. M.9. Implizite Darstellung einer Geraden

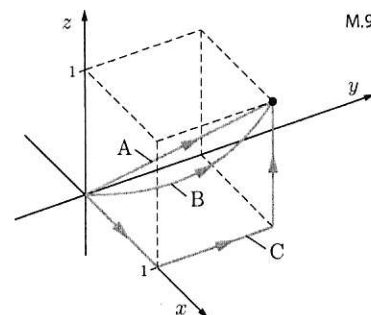


Abb. M.10. Raumkurven, Beispiele zu (M.16)

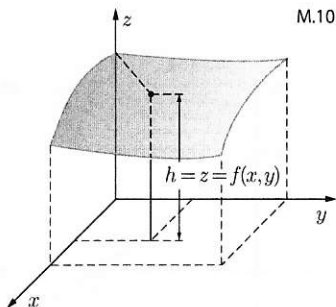


Abb. M.11. Explizite Darstellung einer Fläche durch $z = f(x, y)$

a) Implizite Darstellung: $F(x, y, z) = \text{const}$

Beispiele: Ebene: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (M.17)

Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (M.18)

Ellipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (M.19)

Für $a \neq b \neq c \neq a$ erhält man ein dreiaxsiges Ellipsoid,
für $a = b > c$ ein abgeplattetes Rotationsellipsoid,
für $a = b < c$ ein in z -Richtung längliches Rotationsellipsoid.

b) Explizite Darstellung: $z = f(x, y)$

Diese Darstellung entsteht, wenn man $F(x, y, z) = \text{const}$ nach z auflöst; z gibt die Höhe der Fläche über der (x, y) -Ebene an (Abb. M.11).

Lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten, Determinanten. Jeder weiß, wie man zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten löst, indem man eine der beiden Unbekannten eliminiert. Wie verfährt man, wenn n Gleichungen mit n Unbekannten zu lösen sind?

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \quad (\text{M.20})$$

Damit das Problem lösbar ist, müssen die Gleichungen voneinander *linear unabhängig* sein, d. h. es darf z. B. nicht eine der Gleichungen durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor in eine andere überführbar sein und die Differenz zweier Gleichungen darf nicht eine bereits vorhandene ergeben.

Die konstanten Koeffizienten a_{ik} (i ist der Zeilenindex, k der Spaltenindex) fasst man zu einem *Matrix* genannten Schema zusammen:

$$\mathcal{A} = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (\text{M.21})$$

Die a_{ik} nennt man Matrixelemente. Der quadratischen Matrix (a_{ik}) wird eine *Determinante* zugeordnet:

$$\det(a_{ik}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (\text{M.22})$$

Dies ist ein mathematisches Objekt, das man mit einem bestimmten Verfahren *ausrechnen* soll.

Wir erklären dieses Verfahren am Beispiel einer Determinante mit 4×4 Elementen: Man schreibt (oder denkt sich) über die erste Zeile abwechselnd Plus- und Minuszeichen:

$$\begin{array}{cccc} (+) & (-) & (+) & (-) \\ \det(a_{ik}) = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} & . & (\text{M.23}) \end{array}$$

Dann streicht man (in Gedanken) die erste Zeile und die k -te Spalte ($k = 1-4$). Es bleibt jeweils die *Unterdeterminante* des Elements a_{1k} übrig. $\det(a_{ik})$ ist gleich der folgenden Summe von Produkten:

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \quad (\text{M.24})$$

Nach dem gleichen Verfahren werden nun die Unterdeterminanten ausgerechnet. Man erhält z. B. für die Unterdeterminante des Elements a_{12} :

$$\begin{array}{c} (+) \quad (-) \quad (+) \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{21} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}. \end{array} \quad (\text{M.25})$$

Die 2×2 -Unterdeterminanten ergeben

$$\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}, \quad \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41}. \quad (\text{M.26})$$

Nun werden die Ergebnisse von (M.26) in (M.25) eingesetzt, dann setzt man (M.25) und die analog berechneten anderen 3×3 -Unterdeterminanten in (M.24) ein und rechnet (M.24) aus. Damit hat man schließlich *eine* Zahl, und die Berechnung der Determinante (M.23) ist geschafft. Man kann nun für jedes x eine Gleichung angeben, die im Prinzip gelöst werden kann:

$$x_j = \frac{b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}}{\det(a_{ik})}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{M.27})$$

Sie wird in der linearen Algebra bewiesen. Die A_{ij} sind die Unterdeterminanten der Matricelemente a_{ij} , jeweils multipliziert mit $(-1)^{i+j}$. Es ist sehr

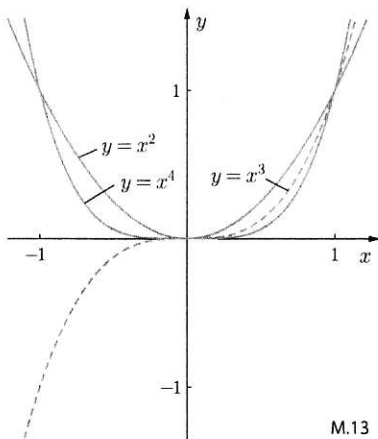
nützlich, die im Nenner von (M.27) stehende Determinante auszurechnen. Ist $\det(a_{ik}) \neq 0$, dann sind die Gleichungen (M.20) garantiert linear unabhängig, andernfalls würde $\det(a_{ik}) = 0$ sein. Im Übrigen ist (M.27) wenig brauchbar. Zur Bestimmung der n Unbekannten muss man n^2 Unterdeterminanten ausrechnen. Das wäre schon bei $n = 4$ mühsam und erst recht bei $n = 100$ oder $n = 10^4$. Weitaus besser funktioniert das Verfahren der *sukzessiven Elimination* von Unbekannten, das wir nun beschreiben.

Man wählt in (M.21) ein Element a_{ik} aus, vorzugsweise das größte, und löst die i -te Gleichung in (M.20) nach x_k auf:

$$x_k = \frac{1}{a_{ik}} (b_k - [\dots]) . \quad (\text{M.28})$$

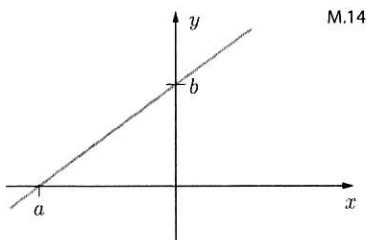
In der eckigen Klammer steht die linke Seite der i -ten Gleichung ohne den Term $a_{ik}x_k$. (M.28) wird nun in die übrigen Gleichungen (M.20) eingesetzt. Man erhält ein System von $(n-1)$ Gleichungen mit $(n-1)$ Unbekannten und mit neuen Koeffizienten a'_{ik} . Das wiederholt man so lange, bis man schließlich eine Gleichung mit einer Unbekannten hat. Man löst sie, setzt das Ergebnis in die vorletzte Gleichung ein und so fort, bis auch x_k numerisch berechnet ist.

Auch abgesehen von der Anwendung auf die linearen Gleichungen ist es sehr nützlich, wenn man weiß, was eine Determinante ist und wie man damit umgeht. Das wird sich bereits in der Vektorrechnung zeigen.



M.13

Abb. M.12. Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten



M.14

Abb. M.13. Lineare Funktion

M.2 Funktionen

In der Physik haben wir die Abhängigkeit einer physikalischen Größe von einer anderen zu untersuchen. Dabei werden uns häufig folgende Funktionen begegnen:

Potenzfunktionen

Als Potenzfunktionen bezeichnet man Ausdrücke der Form

$$y = a \cdot x^n , \quad (\text{M.29})$$

wobei n zunächst eine positive ganze Zahl sein soll und a eine Konstante. Besonders häufig hat man es mit $n = 1$ oder $n = 2$ zu tun:

$$\begin{array}{ll} y = ax & y \text{ „ist proportional zu“ } x \\ y = ax^2 & \text{in graphischer Darstellung: Parabel} \end{array}$$

Einige Funktionen dieses Typs sind in Abb. M.12 graphisch dargestellt. Man kann auch eine Summe über verschiedene Potenzfunktionen betrachten:

$$\text{lineare Funktion (Abb. M.13): } y = ax + b \quad (\text{M.30})$$

$$\text{quadratische Funktion: } y = a + bx + cx^2 \quad (\text{M.31})$$

$$\text{Polynom } n\text{-ten Grades: } y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (\text{M.32})$$

Potenzfunktionen mit negativem und gebrochenem Exponenten werden folgendermaßen definiert:

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0) \quad (\text{M.33})$$

$$x^{1/n} := \sqrt[n]{x}. \quad (\text{M.34})$$

Wenn n eine gerade Zahl ist, muss in (M.34) $x \geq 0$ sein. Ferner definiert man:

$$x^0 := 1. \quad (\text{M.35})$$

Besonders häufig sind wieder $n = 1$ und $n = 2$ (Abb. M.14):

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x} \quad \text{in graphischer Darstellung: gleichseitige Hyperbel}$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad \text{Quadratwurzel (Parabel, in } x\text{-Richtung geöffnet)}$$

(M.33) und (M.34) lassen sich auch kombinieren:

$$y = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Sie sollten einen Taschenrechner haben, mit dem man x^a für beliebige Werte von a ausrechnen kann.

Rechenregeln für Potenzen.

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}; \quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \quad (\text{M.36})$$

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad (\text{M.37})$$

$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a \quad (\text{M.38})$$

Die Auflösung der Gleichung $y = x^a$ nach x ergibt

$$x = y^{1/a} \quad (y \geq 0). \quad (\text{M.39})$$

Diese Funktion nennt man auch die „Umkehrfunktion“ von $y = x^a$.

Exponentialfunktion, Logarithmus

Bei einer Exponentialfunktion

$$y = a^x \quad (\text{M.40})$$

steht die veränderliche Größe x im Exponenten; a kann irgendeine Zahl sein. In der Physik denkt man beim Stichwort „Exponentialfunktion“ meist an die Funktion

$$y = e^x, \quad e = 2,718\dots$$

Wodurch diese Zahl e ausgezeichnet ist, werden wir im Abschnitt M.3 sehen. Zur Berechnung der Funktionswerte benutzt man einen Taschenrechner. In

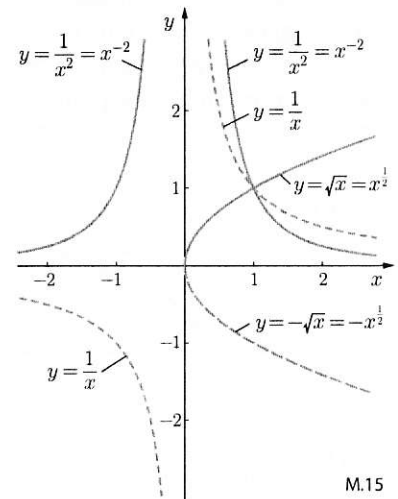


Abb. M.14. Potenzfunktionen mit negativen und mit gebrochenen Exponenten

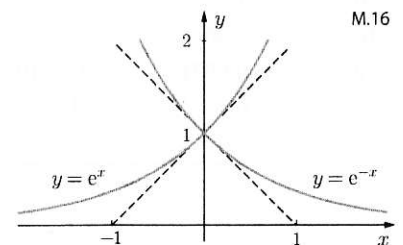
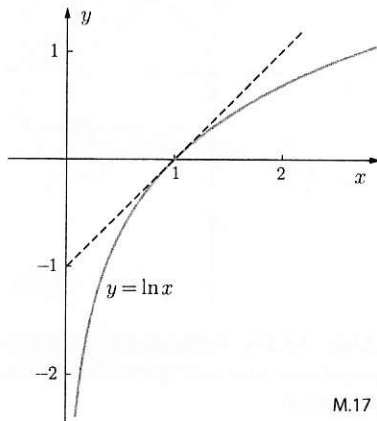


Abb. M.15. Exponentialfunktion. Gestrichelt: Tangente am Punkt $x = 0$, $y = 1$

Tabelle M.2. Die Exponentialfunktion

x	e^x	e^{-x}
0	1	1
1	2,718	0,368
3	20,08	0,050
10	$2,20 \cdot 10^4$	$4,5 \cdot 10^{-5}$
30	$1,07 \cdot 10^{13}$	$9,4 \cdot 10^{-14}$

**Abb. M.16.** Die Funktion $y = \ln x$ **Tabelle M.3.** Natürlicher und dekadischer Logarithmus

x	$\ln x$	$\log x$
10^{20}	46,1	20
10^5	11,5	5
10	2,30	1
2	0,6931	0,3010
1	0	0
0,1	-2,3	-1

der Nähe von $x = 0$ verhält sich die Exponentialfunktion etwa wie $1 + x$ (Abb. M.15):

$$y = e^x \approx 1 + x \quad \text{für} \quad |x| \ll 1, \quad (\text{M.41})$$

Häufig benutzt man auch die Funktion e^{-x} , die ebenfalls in Abb. M.15 gezeigt ist. Für große positive (bzw. negative) Werte von x nimmt die Funktion e^x enorm große (bzw. kleine) Werte an, wie Tabelle M.2 zeigt. Da man die Gleichung $y = e^x$ nicht durch die üblichen Rechenoperationen nach x auflösen kann, definiert man als Umkehrfunktion von e^x eine neue Funktion,

$$y = e^x \rightarrow x = \ln y, \quad (\text{M.42})$$

die man den „natürlichen Logarithmus“ nennt. (Sollte als $\ln$ auf Ihrem Taschenrechner sein!) Es ist also für eine beliebige positive Zahl a

$$a = e^{\ln a} = \ln(e^a). \quad (\text{M.43})$$

Man kann die allgemeine Exponentialfunktion $y = a^x$ sehr leicht als e -Funktion schreiben:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a} \quad (\text{M.44})$$

wobei von (M.43) und (M.37) Gebrauch gemacht wurde. Die Funktion $y = \ln x$ existiert nur für positive Werte von x (Abb. M.16). Es ist $\ln 1 = 0$; für $x \rightarrow 0$ strebt $\ln x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow \infty$ strebt $\ln x \rightarrow \infty$, allerdings in beiden Fällen extrem langsam (Tabelle M.3).

Mit Hilfe von (M.36), (M.37) und (M.43) lassen sich folgende Rechenregeln ableiten:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad (\text{M.45})$$

$$\ln(a^b) = b \cdot \ln a \quad (\text{M.46})$$

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a. \quad (\text{M.47})$$

Von diesen Eigenschaften der Logarithmus-Funktion wird häufig Gebrauch gemacht. Man sollte sich deshalb diese Formeln merken.

Die Umkehrfunktion der allgemeinen Exponentialfunktion $y = a^x$ nennt man den *Logarithmus zur Basis a* :

$$y = a^x \rightarrow x = \log_a y. \quad (\text{M.48})$$

Beim *dekadischen Logarithmus* ($a = 10$) lässt man die Angabe der Basis meist fort:

$$\log_{10} x = \log x$$

Auch auf dem Taschenrechner wird gewöhnlich der dekadische Logarithmus mit der Taste „log“ aufgerufen. Man muss aber mit den Bezeichnungen der Logarithmen aufpassen: Mitunter werden in der physikalischen und mathematischen Literatur die natürlichen Logarithmen mit $\log$ (statt mit $\ln$) bezeichnet. Die Rechenregeln (M.45)–(M.47) gelten für alle Logarithmen, nicht nur für den natürlichen. Damit ergibt sich die folgende Umrechnung:

$$\log x = \log e \cdot \ln x = 0,4343 \ln x, \quad (\text{M.49})$$

denn mit (M.43) ist $\log x = \log e^{\ln x} = \ln x \cdot \log e$.

Von dem dekadischen Logarithmus macht man bei graphischen Darstellungen Gebrauch, wenn Funktionen mit großem Wertebereich gut ablesbar gezeichnet werden sollen: Man trägt auf den Achsen statt x und y die Funktionen $\log x$ und $\log y$ auf (Abb. M.17 a). Meistens wird, unter Beibehaltung der logarithmischen Teilung, die Beschriftung der Achsen mit x und y vorgenommen (Abb. M.17 b und c). Interessant und nützlich: In logarithmischer Auftragung ergibt die Funktion $y = ax^n$ eine Gerade, an deren Steigung man den Exponenten ablesen kann; der Achsenabschnitt liefert die Konstante a :

$$y = ax^n \rightarrow \log y = \log a + n \log x. \quad (\text{M.50})$$

Wenn nur eine Variable in der Darstellung einen großen Wertebereich überdecken soll, benutzt man eine einfach-logarithmische Darstellung (Abb. M.17 d): $\log y$ wird gegen x aufgetragen. Interessant und nützlich: Nun ergibt die Exponentialfunktion eine Gerade:

$$y = e^{ax} \rightarrow \log y = \log e \cdot \ln y = 0,4343 ax. \quad (\text{M.51})$$

An der Steigung der Geraden kann man den Zahlenwert von a ablesen.

Trigonometrische Funktionen

Die Funktionen

$$\begin{array}{ll} y = \sin x & \text{„Sinus“} \\ y = \cos x & \text{„Cosinus“} \end{array} \quad \begin{array}{ll} y = \tan x = \sin x / \cos x & \text{„Tangens“} \\ y = \cot x = \cos x / \sin x & \text{„Cotangens“} \end{array}$$

kennt man zunächst als Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck (Abschnitt M.1). In der Physik begegnen sie uns oft auch ohne Bezug auf ein Dreieck, meist in ihrer Eigenschaft als periodische Funktionen. Ihr Taschenrechner sollte die Funktionstasten $\sin$, $\cos$, $\tan$ haben. Eine Cotangententaste ist überflüssig: $\cot x = 1/\tan x$. Die Variable x kann man in verschiedenen Einheiten messen (und in den Taschenrechner eingeben):

1. Grad (rechter Winkel $= 90^\circ$) Dies ist in der Geometrie üblich; Rechner-Betriebsart meist mit „DEG“ (von engl. degree = Grad) bezeichnet.
2. Radian (rechter Winkel $= \pi/2 = 1,57\dots$) Taschenrechner: RAD. Dies wird in der Physik bevorzugt, Definition siehe (M.1).
3. Unglücklicherweise treibt auf manchen Taschenrechnern noch eine dritte Einheit ihr Unwesen: die sog. „Neugrad“ (rechter Winkel $= 100$ Neugrad). Rechner-Betriebsart meist als „GRA“ bezeichnet. Diese Einheit wollen wir vermeiden!

Die trigonometrischen Funktionen haben die Eigenschaft, *periodische* Funktionen zu sein:

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2n\pi) = \cos x \quad (\text{M.52})$$

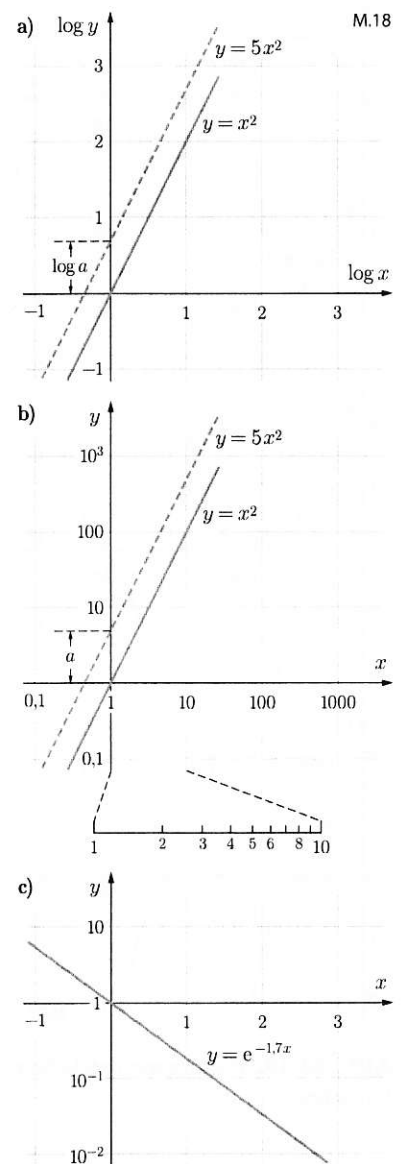


Abb. M.17. Logarithmische Darstellung von Funktionen. Man vergleiche (b) mit Abb. M.12 und (c) mit Abb. M.15. Die Auftragung in (a) und (b) nennt man auch doppelt-logarithmisch, die in (c) auch einfach- oder halb-logarithmisch

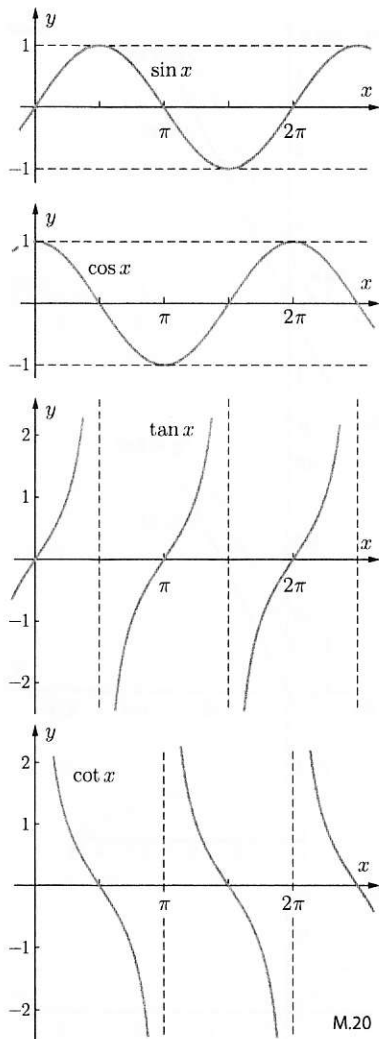


Abb. M.18. Die trigonometrischen Funktionen

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Der Verlauf der Funktionen ist in Abb. M.18 dargestellt. Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ oszillieren mit der Periode $360^\circ = 2\pi$ rad zwischen $+1$ und -1 hin und her. Es ist nützlich, sich diese Kurven zu merken, insbesondere:

$$\begin{aligned} \sin(0^\circ) &= 0 & \sin(90^\circ) &= \sin \frac{\pi}{2} = +1 \\ \cos(0^\circ) &= +1 & \cos(90^\circ) &= \cos \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned} \quad (\text{M.53})$$

Dann ergeben sich die folgenden Beziehungen praktisch von selbst:

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x & \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= +\cos x & \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos x \\ \cos(-x) &= +\cos x & \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x & \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= +\sin x. \end{aligned} \quad (\text{M.54})$$

Die Potenzen der trigonometrischen Funktionen schreibt man meistens

$$(\sin x)^n = \sin^n x, \quad (\cos x)^m = \cos^m x, \quad \text{u.s.w.}$$

Sehr oft braucht man folgende Formeln:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \quad (\text{M.55})$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (\text{M.56})$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y. \quad (\text{M.57})$$

Mit diesen Relationen kann man folgende Formeln ableiten, die oft nützlich sind:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad (\text{M.58})$$

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \quad (\text{M.59})$$

$$|\sin x| = |\tan x| / \sqrt{1 + \tan^2 x}, \quad |\cos x| = 1 / \sqrt{1 + \tan^2 x}, \quad (\text{M.60})$$

$$\cos x + \cos y = +2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (\text{M.61})$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \quad (\text{M.62})$$

$$\sin x \pm \sin y = +2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}. \quad (\text{M.63})$$

Die Umkehrfunktionen sind:

$$\begin{aligned} y = \sin x &\rightarrow x = \arcsin y && \text{„Arcus Sinus“} \\ y = \cos x &\rightarrow x = \arccos y && \text{„Arcus Cosinus“} \\ y = \tan x &\rightarrow x = \arctan y && \text{„Arcus Tangens“} \\ y = \cot x &\rightarrow x = \operatorname{arccot} y && \text{„Arcus Cotangens“} \end{aligned}$$

Auf dem Taschenrechner sind diese Funktionen meist mit $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ usw. bezeichnet. Das ist etwas missverständlich, denn eigentlich ist $\sin^{-1} x = (\sin x)^{-1} = 1/\sin x$.

Näherungsformeln für kleine Größen

Für kleine Werte von x (d. h. $|x| \ll 1$) kann man für viele Funktionen Näherungsformeln verwenden (Tabelle M.4). Bei den Formeln für $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ muss x in *Radian* eingesetzt werden. Überzeugen Sie sich selbst mit dem Taschenrechner, dass die Näherungen bereits für $x = 0,1$ recht gut stimmen, einige stimmen sogar noch bei $x = 0,3$ besser als auf 1%! Für die Physik sind diese Formeln wichtig, weil sie gestatten, komplizierte Funktionen durch lineare Ausdrücke zu ersetzen, was oft eine entscheidende Vereinfachung darstellt.

Reihenentwicklung von Funktionen

Man kann viele Funktionen durch eine unendliche Potenzreihe darstellen, d. h. durch eine sich bis ins Unendliche erstreckende Summe von Potenzfunktionen, die nach einem bestimmten Bildungsgesetz zu berechnen sind. In manchen Fällen kann man das leicht einsehen, z. B. bei der Funktion $f(x) = 1/(1-x)$. Wir betrachten zunächst die endliche *geometrische Reihe*

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \quad (\text{M.64})$$

Dass das richtig ist, erkennt man, wenn man die Reihen S_n und xS_n untereinander schreibt und dann die Differenz bildet. Man erhält

$$S_n - xS_n = S_n(1 - x) = 1 - x^{n+1} \rightarrow S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Wenn $|x| < 1$ ist und n sehr groß wird, wird schließlich x^{n+1} sehr klein und die Summe S_n kommt der Funktion $1/(1-x)$ beliebig nahe. Man schreibt das in folgender Form:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x} \quad (\text{M.65})$$

für $|x| < 1$ und sagt: Die geometrische Reihe *konvergiert* für $n \rightarrow \infty$ gegen $1/(1-x)$. Für $|x| \ll 1$ konvergiert sie sehr rasch, für $|x| \approx 1$ sehr langsam, aber sie konvergiert. Das kann man mit einem Taschenrechner ausprobieren.

Weitere Beispiele für konvergierende unendliche Reihen sind:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x \quad (\text{M.66})$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sin x \quad (\text{M.67})$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \cos x \quad (\text{M.68})$$

Tabelle M.4. Näherungsformeln für $|x| \ll 1$

$\sin x$	$\approx$	x
$\cos x$	$\approx$	$1 - \frac{x^2}{2}$
$\tan x$	$\approx$	x
e^x	$\approx$	$1 + x$
e^{-x}	$\approx$	$1 - x$
$(1 \pm x)^n$	$\approx$	$1 \pm nx$
$\frac{1}{1+x}$	$\approx$	$1 - x$
$\frac{1}{1-x}$	$\approx$	$1 + x$
$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}}$	$\approx$	$1 \mp \frac{x}{2}$
$\sqrt{1 \pm x}$	$\approx$	$1 \pm \frac{x}{2}$

Der mathematische Ausdruck $n!$ (gesprochen: n Fakultät) ist folgendermaßen definiert:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n, \quad 0! = 1$$

Die Reihen (M.66), (M.67) und (M.68) konvergieren im Gegensatz zu (M.65) für alle x gegen die angegebenen Funktionen. Man erkennt, dass die Näherungsformeln in Tabelle M.4 jeweils die Anfangsterme einer Reihenentwicklung sind. Man kann also die Näherung verbessern, indem man weitere Terme hinzu nimmt.

Die Darstellung von Funktionen durch Potenzreihen ist nur ein spezieller Fall. Man kann mit Vorteil auch Reihen von anderen Funktionstypen betrachten, z. B. von Sinus- und Cosinusfunktionen. Diese *Fourier-Reihen* spielen in der Physik eine große Rolle. Sie werden in Abschnitt II/19.3 eingeführt.

M.3 Differentialrechnung

Erste Ableitung, Differentialkoeffizient

Die *Ableitung* einer Funktion $y = f(x)$ wird gewöhnlich als Grenzwert

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \left(\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \right) = f'(x) \quad (\text{M.69})$$

eingeführt (Abb. M.19). Vor der Klammer steht die Abkürzung von „Limes x_1 gegen x “, das bedeutet „Grenzwert des in der Klammer stehenden Ausdrucks für den Fall, dass x_1 gegen x strebt“. Die Ableitung ist ein Maß für die Steigung der Kurve $y = f(x)$, genauer gesagt gilt

$$f'(x) = \tan \alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen der Richtung der in Abb. M.19 eingezeichneten Tangente und der x -Achse ist. (M.69) lässt sich auch folgendermaßen ausdrücken:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{dy}{dx}, \quad (\text{M.70})$$

wobei dy/dx (gelesen $d y$ nach $d x$) als „Differentialquotient“ bezeichnet wird. dy und dx nennt man die „Differential“ der Variablen y und x . „Ableitung“ und „Differentialquotient“ sind also dasselbe. Folgende Schreibweisen sind für die Ableitung der Funktion $y = f(x)$ üblich:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x)). \quad (\text{M.71})$$

Der Ausdruck

$$dy = f'(x) dx \quad (\text{M.72})$$

wird das *Differential* der Funktion $y = f(x)$ genannt. Dieser Begriff sowie die Schreibweise dy/dx erweisen sich für die Anwendung in der Physik als besonders zweckmäßig. Das Differential gibt die Änderung der Funktion in

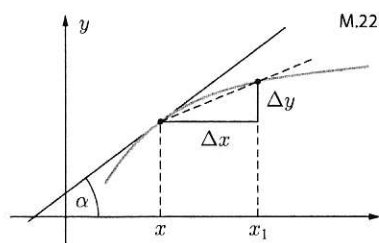


Abb. M.19. Zur Ableitung der Funktion $y = f(x)$

linearer Näherung an. Man rechnet mit Differentialen wie mit endlichen Größen.

Die Ableitungen einiger Funktionen sind in Tabelle M.5 angeführt. Man erkennt, dass die Exponentialfunktion $y = e^x$ dadurch ausgezeichnet ist, dass sie beim Differenzieren unverändert bleibt!

Beispiele: $y = x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

Rechenregeln. Beim Differenzieren sind folgende Rechenregeln zu beachten:

Konstante: $y = c \rightarrow y' = 0$ (M.73)

Konstanter Faktor: $y = af(x) \rightarrow y' = af'(x)$ (M.74)

Beispiel: $y = 3x^2 \rightarrow y' = 6x$

Summe: $y = f(x) + g(x) \rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$ (M.75)

Beispiel: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Produkt: $y = f(x) \cdot g(x) \rightarrow y' = f'g + fg'$ (M.76)

Beispiel: $y = (1+x)e^x \rightarrow y' = 1 \cdot e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$

Quotient: $y = f(x)/g(x) \rightarrow y' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (M.77)

Beispiel: $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

Kettenregel: $y = f(g(x)) \rightarrow y' = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$ (M.78)

Beispiele: $y = e^{-ax}$ mit $f(g) = e^g, g(x) = -ax$

$$\rightarrow y' = e^g \cdot (-a) = -ae^{-ax}$$

$y = \sqrt{a^2 + x^2}$ mit $f(g) = g^{1/2}, g(x) = a^2 + x^2$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{2}g^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Umkehrfunktion: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$ (M.79)

Tabelle M.5. Funktionen $f(x)$ und ihre Ableitungen $f'(x)$

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$+1/\cos^2 x$
$\cot x$	$-1/\sin^2 x$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$

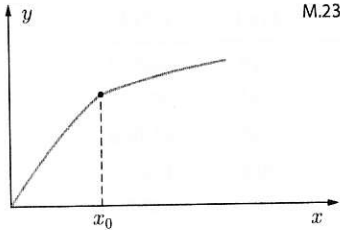


Abb. M.20. Eine stetige Funktion mit unstetiger Ableitung bei $x = x_0$

Beispiel: $y = \tan x$ Umkehrfunktion: $x = \arctan y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{d(\arctan y)}{dy} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Stetigkeit. In der Differentialrechnung spielt die Stetigkeit von Funktionen eine große Rolle. Die Mathematiker definieren diesen Begriff mit großer Sorgfalt. Für uns genügt die einfache Definition: Eine Funktion $y = f(x)$ ist stetig, wenn man in der graphischen Darstellung dieser Funktion auf der Kurve *ohne abzusetzen* mit dem Bleistift entlang fahren kann. Wenn das gleiche auch für die Ableitung $f'(x)$ gilt, ist die Funktion „stetig differenzierbar“. Abbildung M.20 zeigt eine Funktion $y = f(x)$, die an der Stelle $x = x_0$ stetig, aber nicht stetig differenzierbar ist. Im Folgenden wird Stetigkeit und stetige Differenzierbarkeit der Funktionen vorausgesetzt.

Die zweite Ableitung

Die zweite Ableitung einer Funktion wird gebildet, indem man die erste Ableitung differenziert:

$$y = f(x)$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ableitung} \quad y' &= f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x)) \\ 2. \text{ Ableitung} \quad y'' &= f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(f'(x)). \end{aligned} \quad (\text{M.80})$$

Der Ausdruck d^2y/dx^2 wird gelesen: d zwei y nach d x Quadrat.

Beispiele:

$$\begin{aligned} y &= ax^3 + bx + c & y &= e^{-ax} \\ y' &= 3ax^2 + b & y' &= (-a) \cdot e^{-ax} \\ y'' &= 6ax & y'' &= (-a) \cdot (-a)e^{-ax} = a^2 e^{-ax} \end{aligned}$$

Da $y' = \tan \alpha$ die Steigung der Kurve $y = f(x)$ angibt, zeigt y'' an, wie rasch sich die Steigung ändert, d. h. wie stark sich die Kurve krümmt.

Höhere Ableitungen. Nach dem Muster von (M.80) kann man auch höhere Ableitungen berechnen. Allgemein erhält man die n -te Ableitung $f^{(n)}(x)$, indem man die $(n-1)$ -te differenziert:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}(f^{(n-1)}(x)). \quad (\text{M.81})$$

Bei unseren Beispielen zu (M.80) wird im erstenen Falle $y''' = 6a$, $f^{(4)}(x) = 0$; im zweiten Fall erhält man $f^{(n)}(x) = (-a)^n e^{-ax}$.

Einige Anwendungen

Approximative Darstellung einer Funktion, Taylor-Entwicklung. Mit Hilfe der ersten Ableitung kann man die Werte einer Funktion in der Umgebung der Stelle x_0 näherungsweise berechnen:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \quad \Delta x = x - x_0. \quad (\text{M.82})$$

Geometrisch bedeutet das, dass man die Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung von x_0 durch ihre Tangente ersetzt. Die Approximation wird verbessert, wenn man noch die zweite Ableitung der Funktion berücksichtigt:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + f''(x_0)\frac{(\Delta x)^2}{2}. \quad (\text{M.83})$$

Beispiel: $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$f(x_0) = 1, \quad f'(x_0) = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad f''(x_0) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

Folgerung: Bei $x \approx \frac{\pi}{2}$ ist $\sin x \approx 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2}$.

Man kann auch noch höhere Ableitungen heranziehen und kommt dann zu einer Darstellung der Funktion durch eine unendliche Reihe, der *Taylor-Reihe*:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_0)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (\text{M.84})$$

Man erkennt, dass die Reihen (M.65) bis (M.68) Taylor-Reihen mit $x_0 = 0$ sind. Wir werden uns gewöhnlich mit (M.82) oder (M.83) begnügen.

Maxima, Minima und Wendepunkte. Hat eine Funktion an der Stelle x_0 ein Maximum oder ein Minimum der in Abb. M.21 gezeigten Form, kann man dessen Lage berechnen, indem man die erste Ableitung berechnet und die Gleichung $f'(x) = 0$ nach x auflöst, denn an der Stelle des Extremalwertes hat die Kurve $y = f(x)$ eine horizontale Tangente, es ist $y' = \tan \alpha = 0$. Ein *Maximum* an der Stelle x_0 liegt vor, wenn $f(x_0)$ größer ist als die benachbarten Funktionswerte, wenn also nach (M.83)

$$f(x) - f(x_0) = f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} < 0$$

ist, ein Minimum, wenn diese Größe positiv ist. Wir erhalten die Bedingungen

$$\begin{aligned} \text{Maximum: } & f'(x_0) = 0, & f''(x_0) < 0 \\ \text{Minimum: } & f'(x_0) = 0, & f''(x_0) > 0. \end{aligned} \quad (\text{M.85})$$

Ein Wendepunkt von der in M.22 gezeigten Form liegt vor, wenn $f'(x_0) \neq 0$ und $f''(x_0) = 0$ ist. Außerdem muss $f''(x_0)$ an der Stelle x_0 das Vorzeichen wechseln. Ist $f'(x_0)$ und $f''(x_0) = 0$, so könnte die Kurve bei x_0 ein Maximum, ein Minimum oder auch einen Wendepunkt haben. In diesem Fall untersucht man die Vorzeichen von $f'(x)$ und $f''(x)$ für $x < x_0$ und $x > x_0$, um herauszufinden, welcher Fall vorliegt. *Beispiele:* Man untersuche das Verhalten der Funktionen $y = x^2$, $y = x^3$ und $y = x^4$ an der Stelle $x = 0$.

Unbestimmte Formen. Man stößt in der Physik zuweilen auf einen Ausdruck der Form $f(x) = g(x)/h(x)$, bei dem $g(x)$ und $h(x)$ an der gleichen Stelle $x = a$ Null werden:

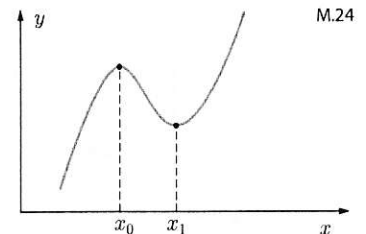


Abb. M.21. Die Kurve hat ein Maximum bei x_0 und Minimum bei x_1

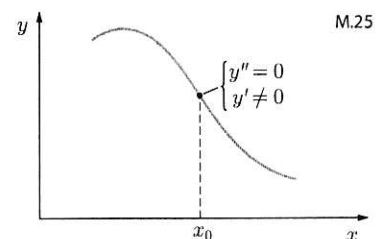


Abb. M.22. Eine Kurve mit Wendepunkt bei x_0

$$g(a) = 0, h(a) = 0 : f(a) = \frac{g(a)}{h(a)} = ?$$

Das nennt man (nicht sehr treffend) eine „unbestimmte Form“ und berechnet $f(a)$ als Grenzwert des Quotienten $g(x)/h(x)$ für $x \rightarrow a$. Dazu entwickelt man Zähler und Nenner an der Stelle $x = a$ nach Taylor und lässt $\Delta x \rightarrow 0$ streben. Mit (M.82) erhält man die so genannte *d'Hospital'sche Regel*

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(a)}{h'(a)}. \quad (\text{M.86})$$

Ein Beispiel (siehe auch Abb. M.23):

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Sind $g'(a) = h'(a) = 0$ muss man zu (M.83) übergehen und das Verfahren (M.86) nochmals anwenden.

Nach dem gleichen Rezept kann man „unbestimmte Formen“ vom Typ $(\infty - \infty)$ berechnen, nachdem man den Ausdruck etwas umgeformt hat. Ein Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}, \quad f(0) = ?$$

Es ist aber $f(x) = (x - \sin x)/x \sin x$ und wir erhalten mit (M.86)

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

Nullstellen. In der Physik macht es häufig einen großen Unterschied, ob eine Funktion eine Nullstelle hat wie die lineare Funktion, oder ob sie auch in der Nähe der Nullstelle bereits sehr kleine Werte annimmt, wie z. B. die Funktion $y = x^4$ (Abb. M.24). Man charakterisiert eine Nullstelle durch ihre Ordnung:

Die Funktion $f(x)$ hat bei $x = a$ eine Nullstelle n -ter Ordnung, wenn dort zugleich mit $f(a)$ alle Ableitungen bis zur $(n-1)$ -ten Null sind, die n -te Ableitung aber **nicht** Null ist. (M.87)

Die Funktion $y = \sin x$ hat also bei $x = 0$ eine Nullstelle erster Ordnung, die Funktion $y = x^4$ eine Nullstelle 4-ter Ordnung. Je nach der Ordnung der Nullstelle kann man sich erlauben, die Funktionswerte in einer größeren oder kleineren Umgebung der Nullstelle durch Null zu approximieren.

M.4 Integralrechnung

Definition des Integrals und einige Rechenregeln

Zum Integral kommt man, wenn man die Fläche unter einer Kurve $y = f(x)$ berechnen will. Diese Fläche ist näherungsweise gleich der Summe der in Abb.

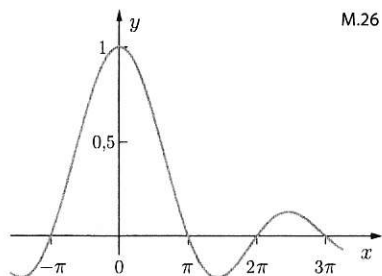


Abb. M.23. Die Funktion $y = \sin x / x$

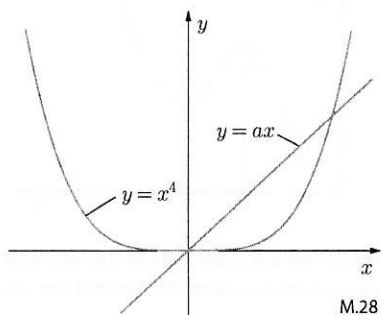


Abb. M.24. Zur Klassifizierung von Nullstellen

M.25 a dargestellten Rechteckflächen, deren jede die Größe $\Delta F = f(x_i)\Delta x$ hat. Ist $F(x)$ die Fläche im Bereich von $x = 0$ bis x , dann ist $F(b) - F(a)$ die Fläche, die auf das Intervall $a \leq x \leq b$ entfällt (Abb. M.25 b). Je feiner die Unterteilung dieses Intervalls gewählt wird, desto besser ist die Näherung durch die Rechtecksumme. Mit $\Delta x = (b - a)/n$ wird im Grenzfalle $n \rightarrow \infty$ die Summe genau gleich der Fläche $F(b) - F(a)$. Man schreibt dies in folgender Form:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (\text{M.88})$$

Der Grenzwert der Summe wird das *bestimmte Integral über die Funktion $f(x)$* genannt, a und b nennt man die *Integrationsgrenzen*.

Wir machen uns klar, dass $f(x_i)\Delta x$, die in Abb. M.25 b grau unterlegte Fläche, beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in das Flächenelement $dF = f(x) dx$ übergeht (Abb. M.25 c). Es ist also

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = F'(x).$$

Zur Berechnung des Integrals (M.88) muss man eine Funktion $F(x)$ suchen, die differenziert $f(x)$ ergibt. Dabei ist $F(x)$ wegen (M.73) nur bis auf eine additive Konstante festgelegt. Eine „Stammfunktion“ zu finden, ist für viele Funktionen kein Problem. Mit Tabelle M.5 erhält man Tabelle M.6. In mathematischen Formelsammlungen findet man noch weitere Stammfunktionen, aber mit Tabelle M.6 kommen wir schon weitgehend aus. Wie man bei etwas komplizierteren Funktionen $f(x)$ zu Werke geht, zeigt folgendes Beispiel:

$$f(x) = c_1 x^3 + c_2 + c_3 \sin(c_4 x + c_5) \quad (c_1 \dots c_5: \text{Konstanten})$$

$$\int_a^b f(x) dx = c_1 \underbrace{\int_a^b x^3 dx}_{I_1} + c_2 \underbrace{\int_a^b dx}_{I_2} + c_3 \underbrace{\int_a^b \sin(c_4 x + c_5) dx}_{I_3}$$

Die Zerlegung in die einzelnen Summanden und das Herausziehen der Konstanten $c_1 \dots c_3$ aus dem Integral ist zulässig wegen Regel (M.74) und (M.75). I_1 und I_2 können unmittelbar berechnet werden:

$$I_1 = \frac{x^4}{4} \Big|_a^b = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4} \quad I_2 = x \Big|_a^b = b - a.$$

Die hier eingeführte Schreibweise mit dem senkrechten Strich hinter der Stammfunktion ist bei der Berechnung bestimmter Integrale recht praktisch und allgemein üblich. Um I_3 zu integrieren setzen wir

$$c_4 x + c_5 = u,$$

d. h. wir führen eine neue Variable ein, so dass wir eine Funktion erhalten, die in Tabelle M.6 steht. Mit dieser *Substitution* erhält man

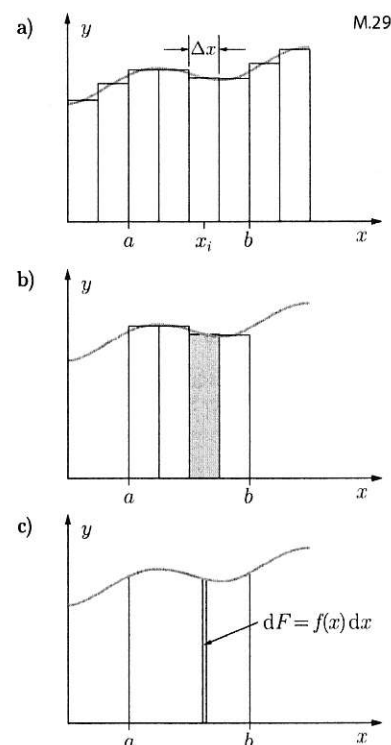


Abb. M.25. Zur Definition des Integrals (M.88)

Tabelle M.6. Funktionen $f(x)$ und ihre Stammfunktionen $F(x)$

$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
$1/x \quad (0 < x < \infty)$	$\ln x$
$1/x \quad (-\infty < x < 0)$	$\ln(-x)$
e^x	e^x
a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$+\sin x$
$\tan x$	$-\ln \cos x$
$\cot x$	$+\ln \sin x$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$

$$\sin(c_4x + c_5) = \sin u, \quad x = \frac{u - c_5}{c_4} \rightarrow dx = \frac{du}{c_4}.$$

Für $x = a$ wird $u = c_4a + c_5$, für $x = b$ wird $u = c_4b + c_5$. Damit erhalten wir für I_3 :

$$\int_a^b \sin(c_4x + c_5) dx = \frac{1}{c_4} \int_{c_4a+c_5}^{c_4b+c_5} \sin u du = -\frac{1}{c_4} [\cos(c_4b + c_5) - \cos(c_4a + c_5)],$$

und wir erhalten die Lösung

$$\begin{aligned} \int_a^b (c_1x^3 + c_2 + c_3 \sin(c_4x + c_5)) dx = \\ \frac{c_1}{4}(b^4 - a^4) + c_2(b - a) - \frac{c_3}{c_4} [\cos(c_4b + c_5) - \cos(c_4a + c_5)]. \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise kann man viele, aber nicht alle Integrale berechnen. Weitere Tricks findet man in Mathematik-Büchern. Manche Integrale kann man nur numerisch lösen, da die entsprechende Stammfunktion im Vorrat der bekannten Funktionen nicht vorkommt. Dafür gibt es eine Reihe von Methoden, z. B. kann man mit kleinem Δx die Summe in (M.88) berechnen.

Unbestimmte Integrale

Das bestimmte Integral ist eine Funktion der Integrationsgrenzen, wie (M.88) und unser Beispiel zeigten. Auf die Bezeichnung der Variablen im Integranden kommt es dabei nicht an:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = F(b) - F(a). \quad (\text{M.89})$$

Nehmen wir an, dass die untere Grenze fest, die obere aber variabel ist ($a = \text{const}$, $b = x$), erhält man:

$$I = \int_a^x f(u) du = F(x) - F(a).$$

Hierfür schreibt man häufig ein sogenanntes *unbestimmtes Integral*:

$$I = \int f(x) dx = F(x) + C, \quad (\text{M.90})$$

$F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$. C wird die *Integrationskonstante* genannt. Sie darf auf keinen Fall weggelassen werden.

M.5 Differential- und Integralrechnung bei mehreren Variablen

In der Physik hat man es in der Regel mit Funktionen von mehreren Variablen zu tun, z. B. mit Größen, die von den drei Raumkoordinaten und der Zeit abhängen. Wie in diesem Falle die Differentialrechnung durchgeführt wird, kann man am übersichtlichsten am Beispiel einer Funktion von zwei Variablen x und y erläutern.

Partielle Differentiation

Um herauszufinden, wie sich die Funktion $f(x, y)$ verändert, wenn man x und y um kleine Beträge variiert, berechnet man die *partiellen Ableitungen*¹:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx} f(x, y) \Big|_{y=\text{const}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dy} f(x, y) \Big|_{x=\text{const}}. \quad (\text{M.91})$$

Gelesen wird „d f partiell nach d x“ bzw. „d f partiell nach d y“. Im ersten Fall wird $f(x, y)$ nach x differenziert, wobei man y als konstant betrachtet, im zweiten Fall nach y bei konstantem x . Ein Beispiel:

$$f(x, y) = x^3 + xy \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x.$$

Werden beide Variable variiert, und zwar x um dx und y um dy , ändert sich der Funktionswert $f(x, y)$ um

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (\text{M.92})$$

df wird das *vollständige Differential* der Funktion $f(x, y)$ genannt. (M.92) ist das Analogon zu (M.72).

Nach dem Schema (M.80) kann man auch höhere partielle Ableitungen bilden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (\text{M.93})$$

In unserem Beispiel erhält man:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1.$$

¹ Wir verzichten hier, wie schon bei der Diskussion der Differentiation von $f(x)$, auf die Erörterung der mathematischen Voraussetzungen, die die Funktion $f(x, y)$ erfüllen muss, damit man die partiellen Ableitungen berechnen kann.

Dass bei den „gemischten“ Ableitungen beide Male dasselbe herauskommt, ist kein Zufall: Generell gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad (\text{M.94})$$

die Reihenfolge der Ableitungen ist vertauschbar, jedenfalls bei den gutartigen Funktionen, die wir hier betrachten.²

Diese Vorschriften zur Bildung der partiellen Ableitungen lassen sich mühelos auf Funktionen von beliebig vielen Variablen übertragen: Alle Variablen, bis auf eine, werden jeweils beim Differenzieren konstant gehalten. Für (M.94) erhält man bei n Variablen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}. \quad (\text{M.95})$$

Anstelle von (M.92) erhält man:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \quad (\text{M.96})$$

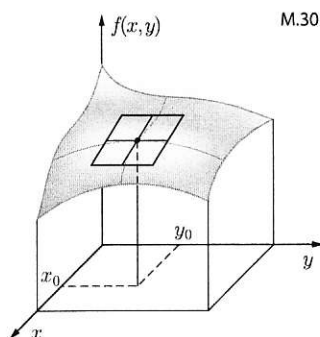


Abb. M.26. Die Funktion $f(x, y)$ als Fläche über der (x, y) -Ebene und die Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0)

Geometrische Deutung: Im zweidimensionalen Fall kann man die Funktion $z = f(x, y)$ senkrecht über der (x, y) -Ebene auftragen (Abb. M.26). Am Punkt (x_0, y_0) ist die Tangentialebene eingezeichnet. Die partiellen Ableitungen, berechnet für $x = x_0$ und $y = y_0$, geben die Neigung der Tangenten der eingezeichneten Kurven an diesem Punkt wieder. In der Umgebung dieses Punktes (x_0, y_0) kann man die Fläche $f(x, y)$ näherungsweise durch die Tangentialebene ersetzen:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 \Delta y. \quad (\text{M.97})$$

Der Index 0 an den Klammern bedeutet, dass man die Ableitungen berechnet und dann in den Ableitungen $x = x_0, y = y_0$ setzt. Es ist $\Delta x = x - x_0$ und $\Delta y = y - y_0$.

(M.97) ist das genaue Analogon von (M.82). Bei mehr als zwei Variablen gilt eine entsprechende Formel; allerdings muss man sein Abstraktionsvermögen bemühen, wenn man sich z. B. bei 4 Variablen eine vierdimensionale Tangentialebene im fünfdimensionalen Raum vorstellen will.

Integration von Funktionen mit mehreren Variablen

Bei einem Integral, dessen Integrand eine Funktion mehrerer Veränderlicher enthält, muss man zunächst sein Augenmerk auf die *Differentiale* richten, die verraten, *worüber* integriert werden soll. Einige Beispiele:

² Die partiellen Ableitungen werden manchmal auch durch Indices gekennzeichnet: $\partial f / \partial x = f_x, \partial f / \partial y = f_y, \partial^2 f / \partial x^2 = f_{xx}, \partial f / \partial x \partial y = f_{xy}$ u.s.w.

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int f(x, y) \, dx, & I_2 &= \iint f(x, y) \, dx \, dy, \\ I_3 &= \iiint f(x, y, z) \, dx \, dy, & I_4 &= \int f(x, y) \, dA. \end{aligned} \right\} \quad (\text{M.98})$$

Man schreibt ebenso viele Integralzeichen wie Differentiale.

In I_1 wird nur über x integriert. Sind die Integrationsgrenzen ($a \leq x \leq b$), erhält man eine Funktion von y :

$$I_1 = \int_{x=a}^{x=b} f(x, y) \, dx = F(y). \quad (\text{M.99})$$

Das Integral ist also nichts anderes als ein gewöhnliches Integral, nur dass hier noch eine Variable y als Parameter auftritt.

Beispiel: $f(x, y) = x^2 y^3$, $a = 0$, $b = 2$

$$I_1 = \int_0^2 x^2 y^3 \, dx = \frac{1}{3} x^3 y^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3} y^3 = F(y)$$

Es kommt öfters vor, dass in (M.99) nach der Integration die Funktion $F(y)$ differenziert werden muss. Dann kann man Integration und Differentiation vertauschen:

$$\frac{dF(y)}{dy} = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) \, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \, dx. \quad (\text{M.100})$$

Diese Vertauschbarkeit ist jedenfalls immer möglich, wenn $f(x, y)$ und $\partial f / \partial y$ im Integrationsbereich stetig sind.

Bei den übrigen Integralen in (M.98) muss über x und y integriert werden, denn auch dA bedeutet hier ein Flächenelement in der (x, y) -Ebene. Der Unterschied zwischen I_2 und I_3 besteht darin, dass I_3 noch die Variable z enthält, über die nicht integriert wird. I_3 ist also eine Funktion von z .

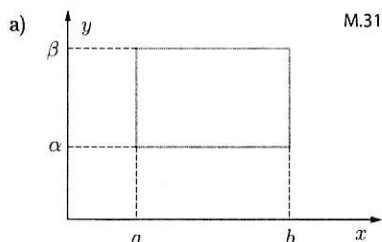
Bei der Integration von $I_2 - I_4$ muss man fragen, über welchen *Bereich* in der (x, y) -Ebene die Integration zu erstrecken ist. Im einfachsten Fall ist das ein Rechteck (Abb. M.27 a):

$$a \leq x \leq b, \quad \alpha \leq y \leq \beta.$$

Man kann zuerst über y , dann über x integrieren: Dann betrachtet man zunächst x als konstant und berechnet

$$\int_{y=\alpha}^{y=\beta} f(x, y) \, dy = F(x),$$

sodann berechnet man das Integral



$$\int_{x=a}^{x=b} F(x) dx.$$

Zusammengefasst schreibt man dies

$$I_2 = \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy \right) dx. \quad (\text{M.101})$$

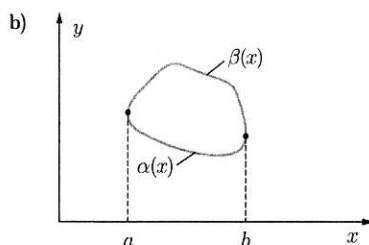


Abb. M.27. Integrationsbereiche in der (x, y) -Ebene. a) für (M.101), b) für (M.102)

Beispiel: $f(x, y) = x^2 y^3$; $a = 0, b = 2$; $\alpha = 1, \beta = 3$

$$\begin{aligned} \int_{y=\alpha}^{y=\beta} f(x, y) dy &= \int_1^3 x^2 y^3 dy = \frac{x^2}{4} (81 - 1) = 20x^2 = F(x), \\ \int_{x=a}^{x=b} F(x) dx &= 20 \int_0^2 x^2 dx = \frac{20}{3} 2^3 \rightarrow I_2 = \frac{160}{3}. \end{aligned}$$

Die Integrationen können aber ebenso gut in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt werden, indem man erst über x , dann über y integriert. In unserem Beispiel heißt das

$$I_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \frac{8}{3} \int_1^3 y^3 dy = \frac{8}{3} \cdot \frac{80}{4} = \frac{160}{3}.$$

Wenn der Integrationsbereich durch eine geschlossene Kurve gegeben ist (Abb. M.27 b), wird im Prinzip ähnlich verfahren, nur wird die Integration über y zwischen den von x abhängigen Grenzen $y = \alpha(x)$ und $y = \beta(x)$ ausgeführt:

$$I_2 = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (\text{M.102})$$

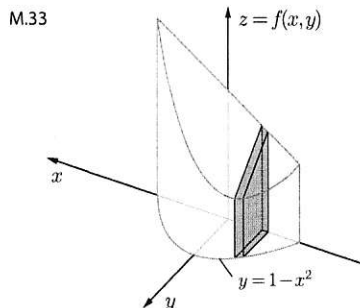


Abb. M.28. Zur Integration beim Beispiel zu (M.102)

Beispiel (bitte nachrechnen!): $I_2 = \int_{-1}^{+1} \left(\int_0^{1-x^2} (x - y + 2) dy \right) dx$

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x^2} (x - y + 2) dy &= \left(xy - \frac{y^2}{2} + 2y \right) \Big|_0^{1-x^2} = \frac{3}{2} + x - x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2}, \\ I_2 &= \int_{-1}^{+1} \left(\frac{3}{2} + x - x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{3}{2}x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_{-1}^{+1} = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

Diese Integration kann man auch als die scheibchenweise Berechnung des Volumen des in Abb. M.28 dargestellten Körpers auffassen, eines schief abgeschnittenen Zylinders mit parabolischer Grundfläche.

Wir betrachten nun I_4 . Das Flächenelement dA kann zunächst durch dx und dy dargestellt werden:

$$dA = dx dy . \quad (\text{M.103})$$

Es bestehen jedoch auch andere Möglichkeiten, den Integrationsbereich in Flächenelemente aufzuteilen. Häufig ist das Integrationsgebiet in der (x, y) -Ebene ein Kreis vom Radius R und die Funktion $f(x, y)$ hängt nur vom Abstand r vom Kreismittelpunkt ab: $f(x, y) = g(r)$. Dann ist es zweckmäßig, als Flächenelement einen Kreisring der Breite dr zu wählen (Abb. M.29):

$$dA = 2\pi r dr . \quad (\text{M.104})$$

Man erhält dann

$$I_4 = 2\pi \int_0^R g(r) r dr . \quad (\text{M.105})$$

Die Integration in der (x, y) -Ebene ist schon im ersten Schritt auf ein gewöhnliches Integral zurückgeführt.

Die Verallgemeinerung auf mehr als zwei Integrationsvariablen bereitet kein Problem. Zum Beispiel berechnet man die Masse M eines inhomogenen Körpers, dessen Dichte ρ von x , y und z abhängig ist, durch ein Integral über das Volumen V des Körpers:

$$M = \int_V \rho dV = \iiint \rho(x, y, z) dx dy dz . \quad (\text{M.106})$$

Die Vorschrift ist klar: Man multipliziert die Dichte ρ an jedem Ort (x, y, z) mit dem Volumenelement $dV = dx dy dz$ (Abb. M.30 a), und summiere diese Produkte über das gesamte Volumen des Körpers. Um das geschickt durchzuführen, kann man z. B. zunächst mit (M.102) die Masse der Scheibe zwischen z und $z + dz$ berechnen (Abb. M.30 b). Man erhält eine Funktion $F(z) dz$, die dann über z integriert wird.

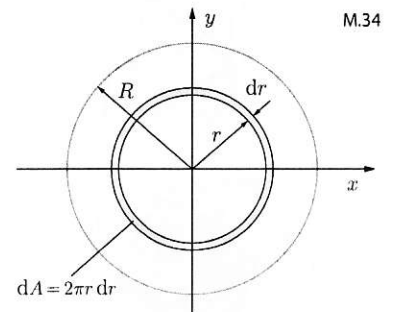


Abb. M.29. Das Flächenelement (M.104)

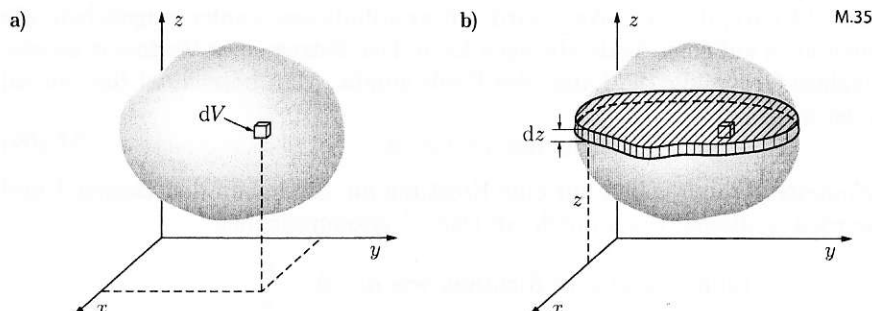


Abb. M.30. Zur Berechnung des Volumenintegrals in (M.106)

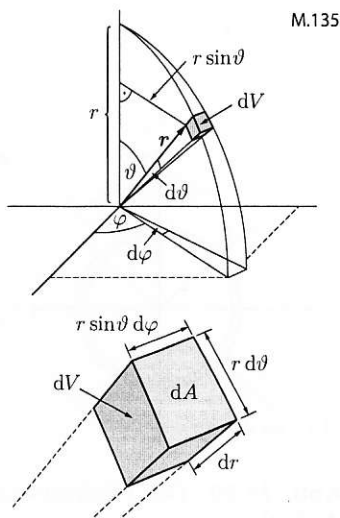


Abb. M.31. Volumenelement und Raumwinkelement in Kugelkoordinaten, zu (M.107) und (M.108)

Es kommt nicht darauf an, dass man komplizierte Integrationen vom Typ (M.102) und (M.106) tatsächlich ausführen kann, man muss aber genau verstehen, was eine solche Formel bedeutet. In diesem Buch kommt gelegentlich die Berechnung von Flächen- und Volumenintegralen vor, sie sind aber meist mit der Technik von (M.104) und (M.105) zu lösen.

Bei dreidimensionalen Problemen ist es sehr oft zweckmäßig, statt der kartesischen Koordinaten (x, y, z) Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) zu verwenden. Wie Abb. M.31 zeigt, ist dann das Volumenelement

$$dV = dr(r \sin \vartheta d\varphi)(r d\vartheta) = r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta. \quad (\text{M.107})$$

Das Flächenelement dA in Abb. M.31 erscheint, vom Zentrum der Kugel aus gesehen, unter dem Raumwinkel

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin \vartheta d\varphi d\vartheta. \quad (\text{M.108})$$

Auch diese Formel wird oft gebraucht, z. B. wenn die von einem Punkt ausgehende Strahlung innerhalb eines gewissen Raumwinkels berechnet werden soll.

M.6 Vektorrechnung

Vektoren

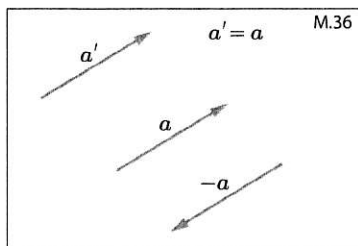


Abb. M.32. Zur Definition der Vektoren $\mathbf{a}$ und $-\mathbf{a}$. Zu beachten: Es ist $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$

Wir betrachten hier Vektoren im *dreidimensionalen Raum*. Sie bezeichnen physikalische Größen, die einen Betrag und eine bestimmte Richtung haben, wie z. B. die Geschwindigkeit. Die geometrische Darstellung ist ein räumlich gerichteter Pfeil, dessen Länge proportional zum Betrag der physikalischen Größe ist. Vektoren werden im gedrucktem Text durch Fettdruckstaben ($\mathbf{a}$) gekennzeichnet, handschriftlich durch einen Pfeil ($\vec{a}$). Die Vektoren $\mathbf{a}$ und $-\mathbf{a}$ zeigen in entgegengesetzte Richtungen (Abb. M.32).

Man kann einen Vektor im Raum beliebig parallel verschieben, ohne dass sich der Vektor ändert (zwei Autos, die parallel nebeneinander herfahren, haben dieselbe Geschwindigkeit). Die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{a}'$ in Abb. M.32 sind daher gleich. Nicht gerichtete physikalische Größen, wie z. B. die Temperatur, sind *Skalare*, d. h. ihr Wert wird mit gewöhnlichen Zahlen angegeben, die man auch auf einer Skala abtragen kann. Der Betrag eines Vektors $\mathbf{a}$ ist eine skalare Größe, die die Länge des Pfeils angibt. Man bezeichnet ihn mit $|\mathbf{a}|$ oder a :

$$\text{Betrag des Vektors } \mathbf{a} : |\mathbf{a}| = a. \quad (\text{M.109})$$

Einheitsvektoren geben nur eine Richtung an. Sie haben den Betrag 1 und werden in diesem Buch durch ein Dach $\hat{}$ gekennzeichnet.

$$\text{Einheitsvektor in Richtung von } \mathbf{a} : \hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{a}$$

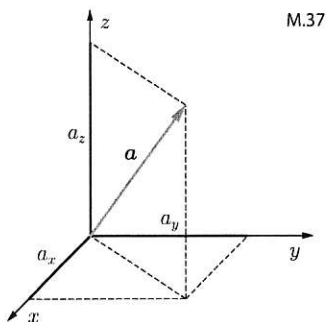


Abb. M.33. Die Koordinaten (Komponenten) des Vektors $\mathbf{a}$

Ist ein kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) festgelegt, kann man den Vektor $\mathbf{a}$ durch seine *Koordinaten* a_x , a_y und a_z darstellen (Abb. M.33):

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (\text{M.110})$$

Mitunter bezeichnet man ganz allgemein einen Satz von Zahlen als Vektor, z. B. die Lösungen $x_1, x_2, \dots, x_n$ irgendeines Gleichungssystems mit n Unbekannten. Solche Vektoren sind hier *nicht* gemeint. In der Physik *müssen* die Zahlen in (M.110) einen Bezug auf ein Koordinatensystem haben. Weiterhin *müssen* sich die Koordinaten eines Vektors bei einer Drehung des Koordinatensystems transformieren wie die Differenzen der Koordinaten zweier Punkte im Raum. Wie das geschieht, wird in Abschnitt ?? (Wechsel des Koordinatensystems) behandelt. Der große Vorteil der Einführung von Vektoren in der Physik besteht darin, dass man nun physikalische Gesetze *unabhängig* von der Festlegung eines Koordinatensystems formulieren kann. In diesem Sinne ist die eingangs gegebene Vektordefinition und die geometrische Darstellung durch Pfeile von höherem Rang als die Definition mit Hilfe der Vektorkoordinaten.

Die Koordinaten des Einheitsvektors $\hat{\mathbf{a}}$ sind die Kosinusse der Winkel α , β und γ in Abb. M.34:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (\text{M.111})$$

Man nennt sie auch die *Richtungskosinusse*. Es gilt

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (\text{M.112})$$

Die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen bezeichnen wir mit $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$.

Die *Komponenten* des Vektors $\mathbf{a}$ bezüglich der Koordinatenachsen sind:

$$a_x = a_x \hat{\mathbf{x}}, \quad a_y = a_y \hat{\mathbf{y}}, \quad a_z = a_z \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{M.113})$$

Die Koordinaten des Vektors sind also gewöhnliche Zahlen, die Komponenten sind Vektoren. Diese sprachliche Unterscheidung wird in der Physik ziemlich lax gehandhabt: Häufig spricht man von der x -Komponente eines Vektors, wenn man die x -Koordinate meint.

Ortsraum und Geschwindigkeitsraum

Ein Koordinatensystem (x, y, z) dient dazu, die Lage von Punkten im Raum mit Hilfe der Koordinaten, also mit Hilfe von Zahlen anzugeben. Man kann die Lage eines Punkts P bezüglich eines beliebig gewählten Nullpunkts O auch durch einen Ortsvektor $\mathbf{r}$, also durch einen Pfeil, der von O nach P führt, festlegen. In einem Koordinatensystem (x, y, z) , dessen Nullpunkt mit O zusammenfällt, sind die Koordinaten des Ortsvektors

$$\mathbf{r} = (x, y, z). \quad (\text{M.114})$$

In Abb. M.35 a sind drei Punkte mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_3$ gezeigt. Wenn die drei Punkte die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ haben,

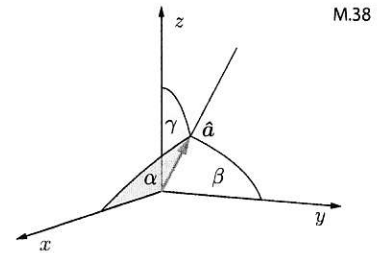


Abb. M.34. Zu (M.111): Der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{a}}$ und die Winkel α, β, γ

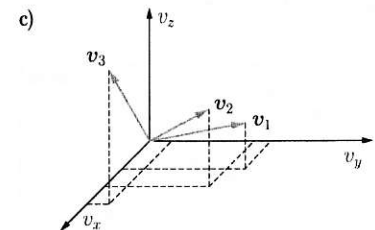
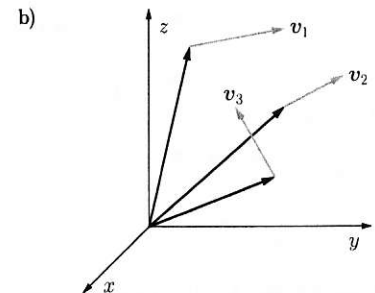
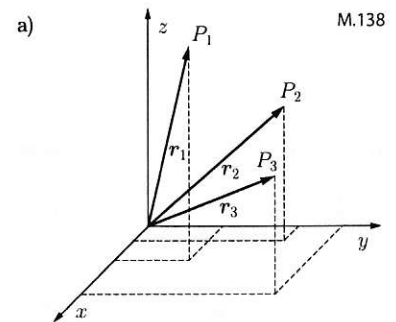


Abb. M.35. a) Die Ortsvektoren der Punkte P_1, P_2 und P_3 . b) Darstellung der Geschwindigkeiten der drei Punkte im Ortsraum, c) im Geschwindigkeitsraum

kann man dies darstellen, indem man an jedem Punkt den zugehörigen Geschwindigkeitsvektor einzeichnet (Bild (b)). Falls man sich nicht für die Lage, sondern nur für die Geschwindigkeiten der Punkte interessiert, kann man die Geschwindigkeiten auch vom Nullpunkt aus auftragen und die Achsen des Koordinatensystems mit v_x , v_y und v_z beschriften. Bild (c) zeigt die Darstellung der drei Geschwindigkeiten im „Geschwindigkeitsraum“, während Bild (b) ihre Lage im „Ortsraum“ zeigte. Ein Punkt im „Ortsraum“ ist durch (M.114) gegeben, ein Punkt im „Geschwindigkeitsraum“ durch den Vektor

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z). \quad (\text{M.115})$$

Die v_x -, v_y - und v_z -Achsen des Geschwindigkeitsraums sind parallel zu den Achsen x , y und z des Ortsraums. Genau so kann man auch mit anderen vektoriellen Größen verfahren. Je nach der Fragestellung erweist sich die Darstellung im „Ortsraum“ oder in einem anderen „Vektorraum“, z. B. im „Impulsraum“, als vorteilhaft.

Vektor- Addition und Subtraktion

Für die Addition und die Subtraktion von Vektoren gelten folgende Regeln:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}: \quad c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad c_z = a_z + b_z \quad (\text{M.116})$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}: \quad c_x = a_x - b_x, \quad c_y = a_y - b_y, \quad c_z = a_z - b_z \quad (\text{M.117})$$

Es gibt zwei Arten, den Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ graphisch zu konstruieren: Man kann den Vektorpfeil $\mathbf{b}$ an die Pfeilspitze von $\mathbf{a}$ ansetzen (Abb. M.36 a), oder man setzt die Vektorpfeile $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ mit den Fußpunkten aneinander und konstruiert daraus ein Parallelogramm. Die in Abb. M.36 b eingezeichnete Diagonale ergibt den Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Den Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ erhält man, indem man $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ebenfalls mit den Fußpunkten zusammensetzt, nun aber einen Pfeil von der Spitze von $\mathbf{b}$ zur Spitze von $\mathbf{a}$ zeichnet: $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ ist gleichbedeutend mit $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$.

Man kann einen Vektor auch als Summe seiner Komponenten darstellen:

$$\mathbf{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} \quad (\text{M.118})$$

Multiplikation von Vektoren

Es sind drei verschiedene Formen der Produktbildung zu unterscheiden: Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar:

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{c}: \quad c_x = \lambda a_x, \quad c_y = \lambda a_y, \quad c_z = \lambda a_z. \quad (\text{M.119})$$

Das Resultat dieser Operation ist ein Vektor in Richtung von $\mathbf{a}$ mit dem Betrag λa (Abb. M.37).

Mit zwei Vektoren kann man erstens das *Skalarprodukt* bilden:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = c = ab \cos \alpha. \quad (\text{M.120})$$

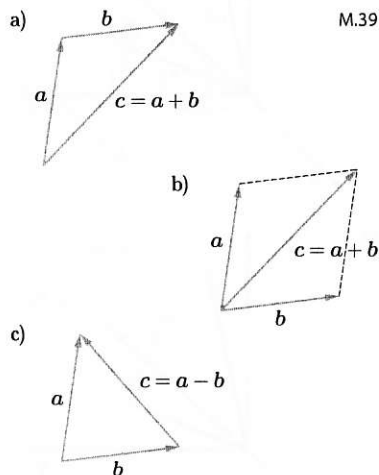


Abb. M.36. Addition und Subtraktion von Vektoren

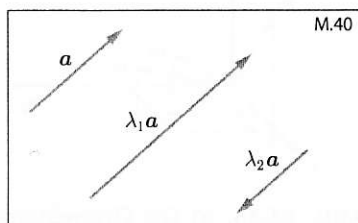


Abb. M.37. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar. Es ist hier $\lambda_1 > 1$ und $-1 < \lambda_2 < 0$

Das Resultat der Operation $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, gesprochen „ $\mathbf{a}$ mal $\mathbf{b}$ “, ist ein Skalar; α ist der Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ (Abb. M.38); c ist gleich der Projektion von $\mathbf{a}$ auf die Richtung von $\mathbf{b}$ multipliziert mit $|\mathbf{b}| = b$. (Man kann natürlich auch die Rollen der beiden Vektoren vertauschen). In Koordinaten erhält man

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (\text{M.121})$$

Diese Formel wird sehr häufig gebraucht. Offensichtlich ist das Skalarprodukt zweier Vektoren wie das Produkt zweier Skalare *kommutativ*:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} . \quad (\text{M.122})$$

Das Quadrat des Betrages des Vektors $\mathbf{a}$ erhält man durch das Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 . \quad (\text{M.123})$$

Mit dem Skalarprodukt kann man auch die Komponente bzw. die Koordinate des Vektors $\mathbf{a}$ in einer vorgegebenen Richtung $\hat{\mathbf{n}}$ berechnen:

$$a_n = (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} , \quad a_n = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} . \quad (\text{M.124})$$

Die zweite Möglichkeit ist das *Vektorprodukt*:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} , \quad |\mathbf{c}| = ab \sin \alpha . \quad (\text{M.125})$$

Das Resultat der Operation $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, gesprochen „ $\mathbf{a}$ Kreuz $\mathbf{b}$ “, ist ein Vektor $\mathbf{c}$, der senkrecht auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ steht (Abb. M.39). Sein Betrag ist gleich der Fläche des von den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gebildeten Parallelogramms.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} , \quad |\mathbf{c}| = ab \sin \alpha . \quad (\text{M.126})$$

Die Richtung des Vektors $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ erhält man, indem man den Vektor $\mathbf{a}$ auf dem kürzesten Weg in die Richtung von $\mathbf{b}$ dreht, und dieser Drehung einen Pfeil zuordnet, der zusammen mit dem Drehsinn eine Rechtsschraube bildet (Abb. M.40). Daraus folgt, dass das Vektorprodukt im Gegensatz zum Skalarprodukt *nicht* kommutativ ist. Es gilt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} . \quad (\text{M.127})$$

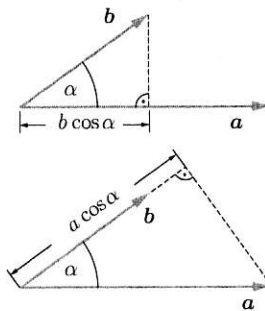
Die Koordinaten des Vektors $\mathbf{c}$ sind

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y , \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z , \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x . \quad (\text{M.128})$$

Wenn man weiß, wie man eine Determinante ausrechnet (siehe (M.25) u. (M.26)), kann man sich diese Formeln leicht merken. Es ist nämlich

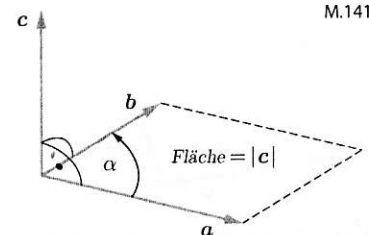
$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} . \quad (\text{M.129})$$

Besonders sollte man sich merken:



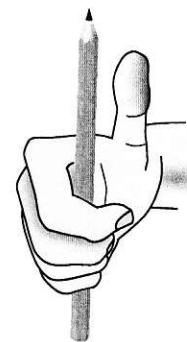
M.41

Abb. M.38. Zum Skalarprodukt (M.120)



M.141

Abb. M.39. Zum Vektorprodukt (M.126)



M.42

Abb. M.40. Rechtsschraubensinn: Abgebildet ist eine *rechte* Hand. Die Fingerspitzen zeigen in die Richtung der Drehung, der Daumen und der Bleistift in die Richtung des Vektors $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{wenn} \quad \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \quad (\text{M.130})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \text{wenn} \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \quad (\text{M.131})$$

Streng genommen müsste man hier $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ schreiben, wobei der Nullvektor definiert ist als $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Mit dem Skalarprodukt werden wir zum ersten Mal bei der Berechnung der *Arbeit* in Kapitel ?? konfrontiert, mit dem Vektorprodukt beim *Drehmoment* in Kapitel ?. Weiteres zur Bedeutung der Vektoren in der Physik und zu ihren Eigenschaften findet man in Abschnitt ?? („Polare und axiale Vektoren“). Insbesondere findet man dort auch Näheres zum Vektorprodukt.

Für das Produkt dreier Vektoren gibt es zwei besondere Formen. Das *Spatprodukt* $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ändert sich nicht bei *zyklischer Vertauschung* der Vektoren:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) . \quad (\text{M.132})$$

Das Resultat dieser Operation ist ein Skalar, der das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten „Spates“ darstellt (Abb. M.41). (Als Spat bezeichnet man einen Kristall dieser Form, z. B. Feldspat, Kalkspat). Haben zwei Vektoren in (M.132) die gleiche Richtung, so ist das Spatprodukt Null.

Das *doppelte Vektorprodukt* $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ berechnet man wie folgt:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) . \quad (\text{M.133})$$

Das Resultat ist ein Vektor, der in der von den Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ aufgespannten Ebene liegt. (M.133) wird auch die „Baz minus Zab“-Regel genannt. Das kann man sich leicht merken.

Tensoren

Es kommt in der Physik öfters vor, dass zwei vektorielle Größen den Beträgen nach zueinander proportional sind, sich aber in der Richtung unterscheiden. Beispiele findet man bei der Rotation eines Körpers (Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit), bei der Deformation eines elastischen Mediums, bei der elektrischen Polarisierung von Kristallen u.a.m. In diesen Fällen kann die Proportionalität nicht durch (M.119) dargestellt werden. Die Koordinaten des einen Vektors sind aber *lineare Funktionen* der Koordinaten des anderen:

$$\begin{aligned} a_x &= T_{xx}b_x + T_{xy}b_y + T_{xz}b_z \\ a_y &= T_{yx}b_x + T_{yy}b_y + T_{yz}b_z \\ a_z &= T_{zx}b_x + T_{zy}b_y + T_{zz}b_z . \end{aligned} \quad (\text{M.134})$$

Die Koeffizienten T_{ik} bilden einen *Tensor*. Der Begriff stammt aus der Elastizitätstheorie, wo es einen Spannungs- und einen Dehnungstensor gibt (von lateinisch *tendere*, spannen). Man kann die Tensorelemente in einem quadratischen Schema (einer quadratischen *Matrix*) anordnen³:

³ Es gibt in der Lehrbuchliteratur keine einheitliche Bezeichnung für Tensoren. Das hier gewählte Symbol $\underline{T}$ ist daher nicht allgemein üblich.

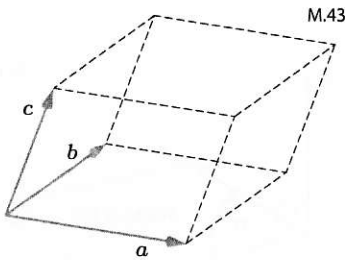


Abb. M.41. Spat, aufgespannt von den Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}. \quad (\text{M.135})$$

Für (M.134) schreibt man auch

$$\underline{a} = \underline{T} \underline{b} \quad (\text{M.136})$$

wobei diese Produktbildung nach (M.134) bedeutet, dass

$$a_i = \sum_k T_{ik} b_k \quad (\text{M.137})$$

ist; i und k stehen für x, y und z .

Der hier eingeführte Tensor $\underline{T}$ ist ein Tensor *zweiter* Stufe, weil jedes Tensorelement durch *zwei* Indices gekennzeichnet ist. Tensoren sind mathematische Objekte wie Vektoren, die man übrigens auch als Tensoren 1. Stufe bezeichnen könnte. Man kann Tensoren addieren und voneinander subtrahieren gemäß der Vorschrift:

$$\underline{A} = \underline{B} \pm \underline{C} \quad \text{heißt} \quad A_{ik} = B_{ik} \pm C_{ik}. \quad (\text{M.138})$$

Wir machen davon Gebrauch, indem wir den Tensor $\underline{T}$ in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegen:

$$\underline{T} = \underline{S} + \underline{A} \quad \text{mit} \quad S_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}), \quad A_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}). \quad (\text{M.139})$$

Der *symmetrische Tensor* $\underline{S}$ hat die Form

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{mit den Elementen} \quad S_{ik} = S_{ki}. \quad (\text{M.140})$$

Für den *antisymmetrischen Tensor* $\underline{A}$ gilt:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & 0 & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit den Elementen} \quad A_{ik} = -A_{ki}. \quad (\text{M.141})$$

Im dreidimensionalen Raum lässt sich ein antisymmetrischer Tensor $\underline{A}$ auch als Vektor auffassen. Die Gleichung $\underline{a} = \underline{A} \underline{b}$ ist identisch mit dem Vektorprodukt $\underline{a} = \underline{A} \times \underline{b}$, wenn man den Vektor $\underline{A}$ folgendermaßen definiert:

$$\underline{A} = (A_{zy}, A_{xz}, A_{yx}). \quad (\text{M.142})$$

Das kann man mit (M.137) und (M.141) nachrechnen. Antisymmetrische Tensoren werden uns also nicht schrecken.

Symmetrische Tensoren haben gewöhnlich sechs voneinander unabhängige Elemente. Wie die Vektorkoordinaten hängen auch die Tensorelemente von den Richtungen der Koordinatenachsen (x, y, z) ab. Bei symmetrischen Tensoren ist es nun immer möglich, die Koordinatenachsen so zu legen, dass alle

Tensorelemente außer den Diagonalelementen der Tensormatrix Null sind. Bezeichnen wir die Achsen dieses Systems mit ξ, η, ζ , so erhält man statt

$$\begin{aligned} a_x &= S_{xx}b_x + S_{xy}b_y + S_{xz}b_z \\ a_y &= S_{yx}b_x + S_{yy}b_y + S_{yz}b_z \\ a_z &= S_{zx}b_x + S_{zy}b_y + S_{zz}b_z \end{aligned} \quad (\text{M.143})$$

die viel einfacheren Gleichungen:

$$a_\xi = S_{\xi\xi} b_\xi, \quad a_\eta = S_{\eta\eta} b_\eta, \quad a_\zeta = S_{\zeta\zeta} b_\zeta. \quad (\text{M.144})$$

Das Koordinatensystem (ξ, η, ζ) geht aus dem Koordinatensystem (x, y, z) durch eine Drehung hervor. Die Umrechnung der Tensorelemente auf das Koordinatensystem (ξ, η, ζ) nennt man die *Hauptachsentransformation* des symmetrischen Tensors. Wir gehen nicht darauf ein, wie man eine Hauptachsentransformation rechnerisch durchführt und werden möglichst von vornherein die Koordinatenachsen so legen, dass sie mit den Hauptachsen des Tensors zusammenfallen.

In welche Richtung zeigt der Vektor $\mathbf{a}$, der durch die Gleichung $\mathbf{a} = \underline{\mathbf{S}} \mathbf{b}$ gegeben ist? Das kann man natürlich mit (M.143) bzw. (M.144) ausrechnen, es gibt aber auch eine graphische Methode, die manchmal nützlich ist. Dazu bildet man das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\underline{\mathbf{S}} \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = S_{\xi\xi} b_\xi^2 + S_{\eta\eta} b_\eta^2 + S_{\zeta\zeta} b_\zeta^2.$$

Nun bezeichnet der Ausdruck

$$S_{\xi\xi} b_\xi^2 + S_{\eta\eta} b_\eta^2 + S_{\zeta\zeta} b_\zeta^2 = 1 \quad (\text{M.145})$$

im Vektorraum des $\mathbf{b}$ -Vektors nach (M.19) ein Ellipsoid mit den Hauptachsen $\sqrt{1/S_{\xi\xi}}$, $\sqrt{1/S_{\eta\eta}}$ und $\sqrt{1/S_{\zeta\zeta}}$. Dieses *Tensorellipsoid* kann dazu benutzt werden, die Richtung von $\mathbf{a}$ zu konstruieren. Dabei geht man folgendermaßen vor:

1. Man zeichnet das Tensorellipsoid (M.145). Eine vom Zentrum ausgehende Gerade in Richtung des Vektors $\mathbf{b}$ schneidet das Ellipsoid im Punkt P (Abb. M.42).
2. Man zeichnet im Punkt P die Tangentialebene an das Ellipsoid.
3. Der Vektor $\mathbf{a}$ steht senkrecht auf dieser Ebene.

Den Beweis findet man bei der ersten Anwendung eines Tensors in Abschnitt ?? bei „Auslenkung einer an drei ungleichen Federn aufgehängten Masse“.

Besonders einfach wird die Konstruktion, wenn $\mathbf{b}$ in einer Ebene mit zwei Hauptachsen liegt, oder wenn das Tensorellipsoid rotationssymmetrisch ist, d. h. wenn $S_{\xi\xi} = S_{\eta\eta} \neq S_{\zeta\zeta}$ ist. Dann liegen die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in einer Ebene, und man kann diese Ebene als Zeichenebene benutzen. Die Tangentialebene steht dann senkrecht auf der Zeichenebene. Sie ist in Abb. M.43 als Tangente im Punkt P dargestellt. Wir werden von dieser Konstruktion vor allem in der Optik bei der Diskussion der Doppelbrechung Gebrauch machen.

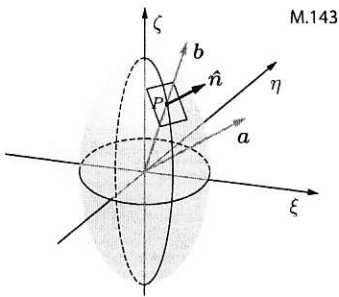


Abb. M.42. Das Tensorellipsoid eines symmetrischen Tensors. Zur Gleichung $\mathbf{a} = \underline{\mathbf{S}} \mathbf{b}$: Der Vektor $\hat{\mathbf{n}}$ steht senkrecht auf der Tangentialebene, $\mathbf{a}$ ist parallel zu $\hat{\mathbf{n}}$

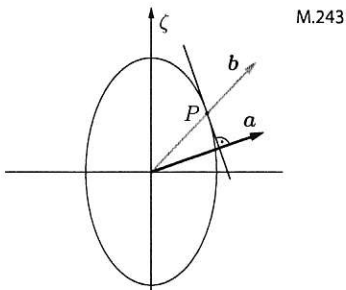


Abb. M.43. Konstruktion der Richtung des Vektors $\mathbf{a} = \underline{\mathbf{S}} \mathbf{b}$ bei einem rotationssymmetrischen Tensorellipsoid

Wichtig ist, dass man folgendes zur Kenntnis nimmt: In der Physik sind nicht selten zwei vektorielle Größen zwar dem Betrage nach zueinander proportional, haben aber verschiedene Richtungen. In diesen Fällen wird der Zusammenhang zwischen den beiden Größen durch einen *Tensor* vermittelt, und nicht etwa durch einen einfachen Proportionalitätsfaktor.

M.7 Vektoranalysis

Differentialrechnung mit Vektoren

Differentiation eines Vektors nach einer skalaren Größe. Wir betrachten als Beispiel einen Vektor $\mathbf{a}(t)$, dessen Betrag und Richtung sich mit der Zeit ändern kann. Die Ableitung $d\mathbf{a}/dt$ wird durch Differenzieren der Komponenten gebildet. Ist die Richtung der Koordinatenachsen zeitlich konstant, erhält man den Vektor:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left(\frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}, \frac{da_z}{dt} \right). \quad (\text{M.146})$$

Beispiele hierzu findet man in Kapitel ?? (Kinematik) bei der Diskussion der Bewegung im Raum.

Räumliche Differentiation einer skalaren Größe. Wie ändert sich die skalare Funktion $u(x, y, z)$, wenn man vom Punkt $\mathbf{r} = (x, y, z)$ zum Punkt $\mathbf{r} + d\mathbf{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$ übergeht? Diese Frage wurde bereits mit (M.96) beantwortet: Es ist

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (\text{M.147})$$

Diese Formel ist aufgebaut wie das Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Setzt man für $\mathbf{b}$ den Vektor $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ und für $\mathbf{a}$ den Vektor „Gradient u “ mit der Definition

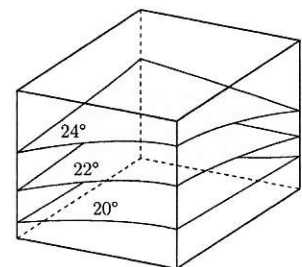
$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (\text{M.148})$$

dann ist

$$du = (\text{grad } u) \cdot d\mathbf{r}. \quad (\text{M.149})$$

Der Vektor $\text{grad } u$ zeigt in die Richtung, in der die Funktion $u(x, y, z)$ am raschesten zunimmt, und sein Betrag gibt an, wie schnell sich u in dieser Richtung ändert: Zeigt $d\mathbf{r}$ in Richtung von $\text{grad } u$, dann erreicht das Skalarprodukt $\text{grad } u \cdot d\mathbf{r}$ seinen größten Wert. Ist $d\mathbf{r}$ senkrecht zu $\text{grad } u$ gerichtet, dann ist $du = 0$, man bewegt sich tangential auf einer Fläche $u(x, y, z) = \text{const}$.

Man kann die Funktion $u(x, y, z)$, die man auch als *skalares Feld* bezeichnet, graphisch durch die Flächen $u = \text{const}$ darstellen; ein skalares Feld ist z. B. die Temperaturverteilung in einem Raum (Abb. M.44). Der Vektor



M.44

Abb. M.44. Darstellung der Temperaturverteilung in einem Raum durch Flächen $T = \text{const}$

$\text{grad } u$ steht senkrecht auf den Flächen $u = \text{const.}$ Wir werden physikalisch vom Konzept des Gradienten vielfach Gebrauch machen, zuerst in Kapitel ?? (Energie). Dort findet man auch weitere Erläuterungen und Beispiele.

Der Operator ∇ . In (M.71) hatten wir für die Differentiation einer Funktion $f(x)$ auch die Schreibweise

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

eingeführt. Hier kann man das Symbol d/dx als einen „Operator“ auffassen, dessen „Anwendung“ auf die Funktion $f(x)$ die Ableitung $f'(x)$ erzeugt. In gleicher Weise kann man einen *vektoriellen Operator*

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{M.150})$$

definieren, dessen Anwendung auf ein skalares Feld $u(x, y, z)$ den Gradienten erzeugt

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \text{grad } u. \quad (\text{M.151})$$

Das Zeichen ∇ wird auch *Nabla* genannt, nach einem assyrischen Musikinstrument dieser Form. Man kann (M.151) formal auffassen als Multiplikation des Vektor-Operators ∇ mit dem Skalar $u(x, y, z)$ (vgl. (M.119)). Die Reihenfolge der Faktoren ∇ und u ist jedoch nicht vertauschbar: Es ist wichtig, dass u *hinter* dem ∇ -Zeichen steht, denn der Operator wirkt nur auf *hinter* ihm stehende Größen. Der Ausdruck $u\nabla$ ist immer noch ein „hungriger“ Operator, der erst bei Anwendung auf eine Funktion der Ortskoordinaten physikalische Bedeutung gewinnt. Im Bedarfsfall kann man den Wirkungsbereich eines Operators auch mit Hilfe von Klammern angeben, z. B. wenn der Gradient des Produkts zweier Funktionen $u(x, y, z)$ und $v(x, y, z)$ gebildet werden soll: Nach (M.76) erhält man:

$$\nabla uv = (\nabla u)v + u\nabla v = v\nabla u + u\nabla v.$$

Den großen Vorteil der Einführung des ∇ -Operators erkennt man, wenn man ausprobiert, was die Anwendung von ∇ auf einen *Vektor* $\mathbf{a}(x, y, z)$ ergibt. Eine solche Funktion der Ortskoordinaten nennt man auch ein *Vektorfeld*; ein Beispiel ist die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(x, y, z)$ in einer strömenden Flüssigkeit. Für die Anwendung des Nabla-Operators auf ein Vektorfeld gibt es zwei Möglichkeiten: das Skalarprodukt und das Vektorprodukt. Das *Skalarprodukt* von ∇ mit einem Vektor $\mathbf{a}$ ergibt:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Der rechts stehende Differentialausdruck ist ein Skalar. Man nennt ihn die *Divergenz* des Vektors $\mathbf{a}$:

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (\text{M.152})$$

Der Begriff stammt aus der Strömungslehre (Kapitel ??): Mit der Divergenz der Geschwindigkeit, $\operatorname{div} \mathbf{v}$, berechnet man die Flüssigkeitsmenge, die in einem Volumenelement neu entsteht oder verschwindet⁴. Die Bildung des *Vektorprodukts* $\nabla \times \mathbf{a}$ führt zu einem Vektor, genannt die *Rotation* von $\mathbf{a}$:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{a} .$$

Auch dieser Begriff stammt aus der Strömungslehre. Mit $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ kann man berechnen, wie sich ein Volumenelement der Flüssigkeit in der Strömung dreht. Der Vektor $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ hat die Komponenten:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{a})_x &= (\nabla \times \mathbf{a})_x = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \\ (\operatorname{rot} \mathbf{a})_y &= (\nabla \times \mathbf{a})_y = \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \\ (\operatorname{rot} \mathbf{a})_z &= (\nabla \times \mathbf{a})_z = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) . \end{aligned} \quad (\text{M.153})$$

Die komplizierten Differentialausdrücke auf der rechten Seite ergeben sich zwanglos mit (M.125), d. h. mit der Determinante:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} . \quad (\text{M.154})$$

Gradient, Divergenz und Rotation sind in der Physik viel gebrauchte Größen. Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u &= \nabla u \quad (\text{ein Vektor}) \\ \operatorname{div} \mathbf{a} &= \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (\text{ein Skalar}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \nabla \times \mathbf{a} \quad (\text{ein Vektor}) . \end{aligned} \quad (\text{M.155})$$

Man kann mit dem Vektoroperator ∇ weitgehend so rechnen, wie mit einem Vektor. Das bewährt sich auch bei Ausdrücken, die die zweite Ableitung enthalten. Der für die Physik wichtigste Ausdruck dieser Art entsteht, wenn man die Divergenz von einem Gradienten berechnet:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla \cdot (\nabla u) = (\nabla \cdot \nabla)u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} . \quad (\text{M.156})$$

Der Operator $\nabla \cdot \nabla$ ist identisch mit dem sogenannten *Laplace-Operator* Δ :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} , \quad (\text{M.157})$$

⁴ Divergenz = Ausschüttung, von lat. *divergere* ausgießen, ausschütten. Der Ausdruck Divergenz hat in der Mathematik auch noch eine andere Bedeutung: Man bezeichnet damit die Tatsache, dass eine Funktion an einer bestimmten Stelle unendlich wird. Davon ist hier in (M.152) natürlich nicht die Rede.

gesprochen „Delta“. Er begegnet uns zum ersten Mal im Zusammenhang mit der Diffusion in Abschnitt ??.

Nach (M.130) und (M.132) sind Vektorprodukte und Spatprodukte Null, wenn sie zwei gleiche Vektoren enthalten. Dementsprechend sind folgende Ausdrücke Null:

$$\nabla \times (\nabla u) = 0 \quad (\text{M.158})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0. \quad (\text{M.159})$$

Das bedeutet: Die Rotation eines Gradienten und die Divergenz einer Rotation sind Null, wie auch immer die Funktionen $u(x, y, z)$ und $\mathbf{a}(x, y, z)$ aussehen mögen. Man kann das leicht nachrechnen. Auch die Anwendung des Operators $\nabla \times \nabla$ ergibt Null. In allen drei Fällen kommt man beim Nachrechnen auf Ausdrücke der Form

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

die nach (M.95) Null ergeben.

Mit Hilfe der Differentialoperatoren grad, div, rot und Δ kann man physikalische Gesetze, z. B. die Maxwell'schen Gleichungen (Kapitel II/15) konzis und unabhängig vom Koordinatensystem formulieren – das ist ja der große Vorteil der vektoriellen Schreibweise. Dabei ist zu beachten, dass der Operator ∇ nur in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten in der einfachen Form (M.150) definiert werden kann. In sphärischen Polarkoordinaten und in anderen krummlinigen Koordinatensystemen gelten für grad, div, rot und Δ anstelle von (M.148), (M.152), (M.153) und (M.157) kompliziertere Differentialausdrücke⁵. In der Quantenphysik (Kapitel II/32) kommen wir nicht umhin, den Δ -Operator in sphärischen Polarkoordinaten anzugeben und zu diskutieren, ein nützliches, aber recht aufwendiges Geschäft. Eine Ausnahme ist die Formel für die Radialkomponente des Gradienten in sphärischen Polarkoordinaten: Es gilt

$$(\text{grad } u)_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (\text{M.160})$$

was genauso einfach ist wie die Ausdrücke in der Formel (M.148).

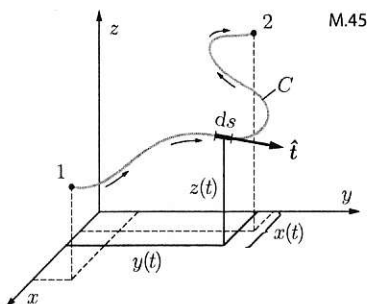


Abb. M.45. Raumkurve und Linienelement

Integralrechnung mit Vektoren

In (M.106) wurde ein Volumenintegral eingeführt, in dem eine skalare Funktion $f(x, y, z)$ in einem Volumen zu integrieren war. Das Integral wurde durch den Index V als ein bestimmtes Integral über ein vorgegebenes Volumen gekennzeichnet. Man kann eine Funktion der drei Raumkoordinaten auch entlang einer Linie oder auf einer Fläche im dreidimensionalen Raum integrieren. In diesen Fällen kann man das Integral durch Indices C (für Kurve) oder A (für Fläche (engl. area)) als ein bestimmtes Integral kennzeichnen.

⁵ Siehe z. B. S. Großmann, Mathematischer Einführungskurs für die Physik, Teubner Verlag (1976)

Von physikalischer Bedeutung sind vor allem solche Integrale, bei denen ein Vektorfeld vorliegt, also eine *vektorielle* Funktion $\mathbf{f}(x, y, z)$ integriert wird.

Zunächst machen wir uns klar, dass auch das Linienelement einer Kurve und das Flächenelement einer Fläche vektorielle Größen sind, da sie einen Betrag und eine bestimmte Orientierung im Raum haben. Das Linienelement ds ist ein Vektor, dessen Richtung durch den Tangenteneinheitsvektor $\hat{\mathbf{t}}$ gegeben ist (Abb. M.45):

$$d\mathbf{s} = (dx, dy, dz) = ds \hat{\mathbf{t}}. \quad (\text{M.161})$$

Die Richtung von $\hat{\mathbf{t}}$ entspricht einem willkürlich festgelegten Durchlaufungssinn der Kurve (Abb. M.45). Die Orientierung des Flächenelements $d\mathbf{A}$ ist durch den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{n}}$ gegeben, der senkrecht auf dem Flächenelement steht. Man erhält

$$d\mathbf{A} = dA \hat{\mathbf{n}}. \quad (\text{M.162})$$

Die Koordinaten des Vektors $d\mathbf{A}$ sind gegeben durch dA und die Richtungskosinusse des Vektors $\hat{\mathbf{n}}$:

$$d\mathbf{A} = (dA \cos \alpha, dA \cos \beta, dA \cos \gamma) = (dy dz, dx dz, dx dy). \quad (\text{M.163})$$

Die Richtung von $\hat{\mathbf{n}}$ wird im Sinn einer Rechtsschraube dem Umlaufsinn um das Flächenelement zugeordnet. Der wiederum entspricht den Durchlaufungssinn der Randkurve (Abb. M.46). Bei einer geschlossenen Fläche, z. B. bei der Oberfläche eines Würfels oder einer Kugel, gibt es keine Randkurve. Dann wird definiert, dass $\hat{\mathbf{n}}$ in jedem Flächenelement nach *außen* weist. Von heimtückischen Objekten, wie Möbiusschen Bändern oder Kleinschen Flaschen, bei denen diese Definitionen versagen, sehen wir ab (Abb. M.47).

Linienintegrale. Wir betrachten nun das Linienintegral, auch Kurvenintegral genannt,

$$\int_C^{(2)}_{(1)} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}. \quad (\text{M.164})$$

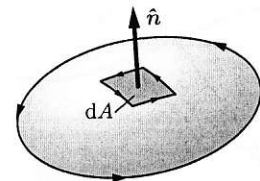
Es besagt, dass zwischen den Punkten (1) und (2) der Kurve C in Abb. M.45 die Größen

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = f_s \hat{\mathbf{t}} \cdot d\mathbf{s} = f_s ds$$

aufsummiert werden sollen, wobei $f_s \hat{\mathbf{t}}$ die Tangentialkomponente des Vektors $\mathbf{f}$ ist. Wird der Durchlaufungssinn umgedreht, dann ändert sich das Vorzeichen des Integrals

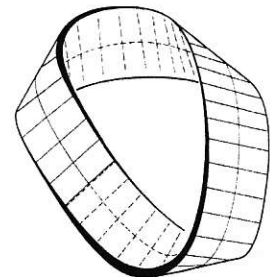
$$\int_C^{(2)}_{(1)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \int_C^{(1)}_{(2)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}, \quad (\text{M.165})$$

weil f_s sein Vorzeichen ändert. Ein Integral dieses Typs ist das *Arbeitsintegral*, mit dem man die Arbeit berechnet, die zu leisten ist, wenn ein Körper gegen die Wirkung einer Kraft entlang der Kurve C von (1) nach (2) verschoben



M.46

Abb. M.46. Orientierung des Normalenvektors $\hat{\mathbf{n}}$ im Flächenelement $d\mathbf{A}$



M.47

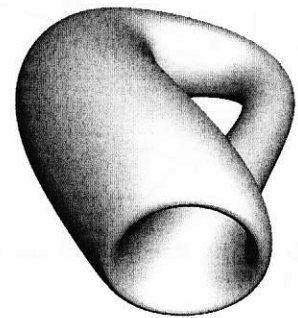


Abb. M.47. Möbiussches Band und Kleinsche Flasche. Das Möbiussche Band ist aus einem Papierstreifen leicht herzustellen. Es hat eine Randkurve, aber nur *eine* Seite. Die Kleinsche Flasche ist eine geschlossene Fläche, bei der es weder „Innen“ noch „Außen“ gibt

wird (Abschnitt ??). Häufig betrachtet man auch ein Linienintegral vom Typ (M.164) auf einem in sich geschlossenen Weg. Man bezeichnet es mit dem Zeichen $\oint$, schreibt also

$$\oint_C \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s} . \quad (\text{M.166})$$

Diese Größe wird *Zirkulation* des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ auf dem Weg C genannt.

Die Berechnung von solchen Linienintegralen ist nicht schwierig. Ist die Kurve nach (M.16) in Parameterform durch die Funktionen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ gegeben, dann kann man die Kurve durch den Vektor

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

beschreiben, und es ist, wie in Abb. M.48 gezeigt,

$$d\mathbf{s} = d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt . \quad (\text{M.167})$$

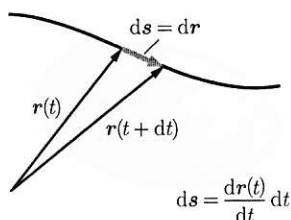


Abb. M.48. Zu (M.167): Linienelement in Parameterdarstellung

Entlang der Kurve ist auch $f(x, y, z)$ eine Funktion von t :

$$\mathbf{f}(x(t), y(t), z(t)) = \mathbf{F}(t) .$$

Wir erhalten also ein gewöhnliches Integral über ein Skalarprodukt (M.121):

$$\int_C^{(2)} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s} = \int_{(t_1)}^{(t_2)} \mathbf{F}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt . \quad (\text{M.168})$$

Als Beispiel berechnen wir das Linienintegral der Funktion $\mathbf{f}(x, y, z) = (xz, x^2y, y)$ auf den in Abb. M.49 angegebenen Integrationswegen von $\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0)$ bis $\mathbf{r}_2 = (1, 1, 1)$, und zwar zuerst auf dem parabelförmigen Weg B. Es ist

$$x(t) = t, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t^2 \rightarrow \mathbf{r}(t) = (t, t, t^2)$$

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (1, 1, 2t), \quad \mathbf{F}(t) = (t^3, t^3, t) .$$

$$\int_C^{(2)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^3 + t^3 + 2t^2) dt = \left(\frac{2t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 1,1666\dots$$

Wie man leicht nachrechnen kann, erhält man auf den anderen Wegen in Abb. M.10

$$\text{Weg A: } \int_C^{(2)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 1,0833$$

$$\text{Weg C: } \int_C^{(2)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0 + \frac{1}{2} + 1 = 1,5 .$$

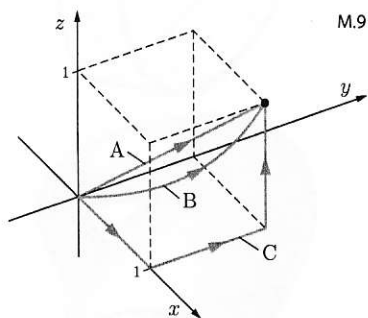


Abb. M.49. Raumkurven aus Abb. M.10

Alternativ kann man das Kurvenintegral berechnen, indem man das Skalarprodukt direkt ausrechnet und integriert:

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{s} = \int_{x_1}^{x_2} f_x dx + \int_{y_1}^{y_2} f_y dy + \int_{z_1}^{z_2} f_z dz. \quad (\text{M.169})$$

Hier steckt nun die ganze Information über den Integrationsweg in den Funktionswerten von $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$, die in die Integrale einzusetzen sind. In unserem Beispiel erhält man für den Weg B

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_x dx &= \int_0^1 xz(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \\ \int_0^1 f_y dy &= \int_0^1 x^2(y)y dy = \int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{4} \\ \int_0^1 f_z dz &= \int_0^1 y(z) dz = \int_0^1 \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} z^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

denn nach Parameterdarstellung der Kurve ist $z(x) = x^2$, $x(y) = y$ und $y(z) = \sqrt{z}$. Die Summe ergibt natürlich wieder $7/6 = 1,1666\dots$

Wir berechnen in unserem Beispiel ein Zirkulationsintegral. Führt man den Weg vom Nullpunkt zum Punkt $\mathbf{r} = (1, 1, 1)$ auf dem Weg B, und dann wieder zum Nullpunkt zurück auf dem Weg A erhält man

$$\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 1,1666 - 1,0833 = 0,0833,$$

denn beim Durchlaufen des Weges in Rückwärtsrichtung dreht sich das Vorzeichen des Integrals um.

Allgemein gilt für Linienintegrale vom Typ (M.164): Ist der Vektor $\mathbf{f}$ der Gradient einer skalaren Funktion $\varphi(x, y, z)$, so ist

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \varphi(x_2, y_2, z_2) - \varphi(x_1, y_1, z_1), \quad (\text{M.170})$$

unabhängig davon, auf welchem Integrationsweg das Integral berechnet wird. Auf einem geschlossenem Weg erhält man deshalb

$$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{wenn } \mathbf{f} = \text{grad } \varphi. \quad (\text{M.171})$$

In diesen Fällen kann man den Index C am Integralzeichen weglassen, da es auf keinen bestimmten Integrationsweg ankommt. Der Beweis von (M.170) ist einfach: Setzt man $\mathbf{f} = \text{grad } \varphi$, so erhält man

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{(1)}^{(2)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = \int_{(1)}^{(2)} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1,$$

denn der Integrand ist nach (M.96) das vollständige Differential der Funktion $\varphi(x, y, z)$. Eine ausführliche und physikalisch orientierte Diskussion der wichtigen Formeln (M.170) und (M.171) findet man in Abschnitt ?? (Energie und Arbeit bei der Bewegung im Raum).

Oberflächenintegrale. Wir betrachten das Oberflächenintegral

$$\int_A \mathbf{f}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A}. \quad (\text{M.172})$$

Es besagt, dass auf der Fläche A die Normalkomponente des Vektors $\mathbf{f}$, jeweils multipliziert mit dA , integriert werden soll

$$\int_A \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A} = \int_A f_n dA. \quad (\text{M.173})$$

Ein Integral dieses Typs ist das *Flussintegral*, mit dessen Hilfe man die Flüssigkeitsmenge berechnen kann, die in der Zeiteinheit durch eine vorgegebene Fläche A hindurchströmt (Abschnitt ??). Wir werden in diesem Buch Flussintegrale direkt mit (M.173) berechnen: In der Praxis kann man die Fläche A so wählen, dass das ohne Schwierigkeiten möglich ist. Beispiele dazu findet man bei der Berechnung elektrischer Felder in den Kapiteln II/1 und II/3 und an vielen anderen Orten.

In der Physik besonders wichtig sind Flussintegrale durch eine *geschlossene* Fläche,

$$\oint_A \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A}.$$

Für solche Integrale gilt der *Gaußsche Satz*:

$$\oint_A \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \text{div} \mathbf{f} dV. \quad (\text{M.174})$$

Auf der linken Seite wird über eine geschlossene Fläche integriert, rechts über das von dieser Fläche eingeschlossene Volumen. Die physikalisch anschauliche Deutung dieser Formel findet man in der Strömungslehre, Abschnitt ??: Der Fluss durch eine geschlossene Fläche ist gleich der Flüssigkeitsmenge, die innerhalb der Fläche entsteht.

Auch für Linienintegrale, berechnet auf einem in sich geschlossenen Weg, gibt es eine Umformung, den *Stokes'schen Satz*. Er besagt, dass die Zirkulation eines Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, berechnet mit der Kurve C , gleich ist dem Fluss des Vektorfeldes $\text{rot} \mathbf{f}(\mathbf{r})$ durch eine beliebige Fläche, die die Kurve C als Randkurve hat:

$$\oint_C \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int_A \text{rot} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A}. \quad (\text{M.175})$$

In Kapitel ?? wird in (??)–(??) vorgerechnet, dass für ein einzelnes Flächenelement $d\mathbf{A}$ gilt

$$\oint f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \text{rot } f(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} . \quad (\text{M.176})$$

Daraus folgt ohne weiteres (M.175): Die Fläche A innerhalb der Randkurve C kann in Flächenelemente $d\mathbf{A}$ aufgeteilt werden, wie Abb. M.50 zeigt. Für jedes Flächenelement gilt (M.176). Die Summation über alle Flächenelemente ergibt (M.175), denn die Beiträge der Linienelemente, die nicht auf der Randkurve liegen, heben sich paarweise gegenseitig auf.

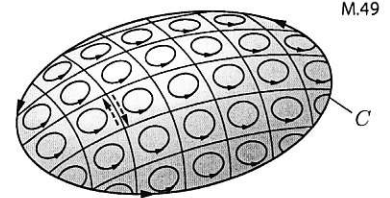


Abb. M.50. Zum Stokes'schen Satz (M.175)

M.8 Komplexe Zahlen

Definition und Rechenregeln

Die Gleichung $x^2 - 1 = 0$ hat die Lösungen $x = +1$ und $x = -1$, während die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung hat, jedenfalls nicht im Bereich der reellen Zahlen. Man kann jedoch eine Größe i definieren mit der Eigenschaft

$$i^2 := -1 \quad (\text{M.177})$$

Sie wird die *imaginäre Einheit* genannt. Damit erhält die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ die Lösungen $x = i$ und $x = -i$. Eine solche Definition zu treffen, ist zweifellos möglich. Die Frage ist aber, ob das mehr bringt, als dass man die „Lösung“ der Gleichung

$$x^2 + a^2 = 0$$

in der Form $x = \pm ia$ hinschreiben kann. Das ist in erstaunlichem Maße der Fall: man kann beweisen, dass man mit Hilfe dieser einen Definition Lösungen für *jede* algebraische Gleichung finden kann. Dazu führt man *komplexe Zahlen* ein als Kombination einer reellen und einer imaginären Zahl. Man schreibt sie gewöhnlich

$$z = x + iy . \quad (\text{M.178})$$

x ist der *Realteil*, y der *Imaginärteil* von z . Dafür gibt es auch folgende Bezeichnungen:

$$\text{Re } z = x , \quad \text{Im } z = y . \quad (\text{M.179})$$

In (M.178) werden nicht etwa Äpfel und Birnen addiert (was man nicht tun soll), es handelt sich vielmehr um eine symbolische Schreibweise für die komplexe Zahl z , die sich als zweckmäßig erweist, weil man nun mit komplexen Zahlen (unter Beachtung von (M.177)) rechnen kann, wie mit gewöhnlichen algebraischen Ausdrücken.

Wir betrachten zwei komplexe Zahlen

$$z_1 = x_1 + iy_1 , \quad z_2 = x_2 + iy_2 .$$

Die Summe (Differenz) der beiden Zahlen ist

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2) . \quad (\text{M.180})$$

Für das Produkt erhält man

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) . \quad (\text{M.181})$$

Für Summe, Differenz und Produkt gelten die Regeln der gewöhnlichen Algebra: Es sind

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 & z_1 + (z_2 + z_3) &= (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1 z_2 &= z_2 z_1 & z_1 (z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3 . \end{aligned}$$

Wir definieren nun die der komplexen Zahl z zugeordnete *konjugiert komplexe Zahl*:

$$z^* = x - i y . \quad (\text{M.182})$$

Für das Produkt erhält man mit (M.177)

$$z z^* = x^2 + y^2 = |z|^2 . \quad (\text{M.183})$$

Diese rein reelle Größe wird das *Quadrat des Betrages* von z genannt. Damit können wir auch $1/z$ berechnen:

$$\frac{1}{x + i y} = \frac{1}{z} = \frac{z^*}{z z^*} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - i y}{x^2 + y^2} . \quad (\text{M.184})$$

Beispiel:

$$z = 2 - 3 i \quad z^* = 2 + 3 i \quad |z|^2 = 13$$

$$\frac{1}{z} = \frac{2 + 3 i}{13} = 0,154 + 0,231 i$$

Das ist schon fast alles was wir von der Algebra komplexer Zahlen brauchen, es kommt aber noch der Clou.

Geometrische Darstellung komplexer Zahlen und Eulerformel

Man kann eine komplexe Zahl als Punkt in einer (x, y) -Ebene darstellen, der *Gaußschen* oder *komplexen Zahlenebene* (Abb. M.51). Die x -Achse nennt man auch die *reelle Achse*, die y -Achse die *imaginäre*. Vergleicht man (M.180) mit (M.116) bzw. (M.117), so sieht man, dass die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen genau der Addition und Subtraktion von Vektoren in der (x, y) -Ebene entspricht (Abb. M.52).

Man kann in der komplexen Zahlenebene auch Polarkoordinaten (r, φ) einführen. Dann erhält man nach (M.10) und (M.183)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi , & y &= r \sin \varphi , \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} = |z| , & \varphi &= \arctan \frac{y}{x} . \end{aligned} \quad (\text{M.185})$$

Nun kommt das große Zauberwerk, die *Eulersche Formel*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi . \quad (\text{M.186})$$

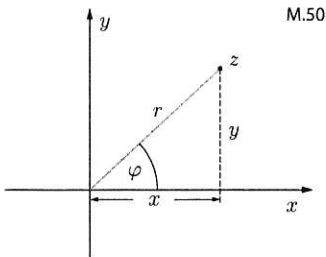


Abb. M.51. Die komplexe Zahlenebene

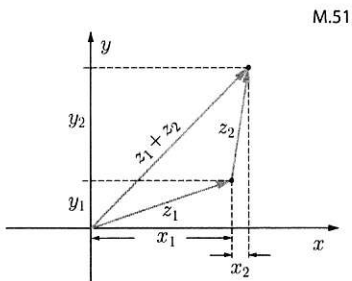


Abb. M.52. Addition zweier komplexer Zahlen

Dies ist nicht etwa eine Definition, sondern ein Ergebnis der *Funktionentheorie*, in der untersucht wird, wie die bisher nur auf der reellen Achse bekannten Funktionen in der komplexen Zahlenebene analytisch fortzusetzen sind.

Mit (M.186) können wir die komplexe Zahl z auch schreiben

$$z = r e^{i\varphi}; \quad (\text{M.187})$$

r ist der *Betrag*, φ heißt die *Phase* der komplexen Zahl. Die praktische Bedeutung der Formel (M.186) liegt darin, dass nun die besonderen Eigenschaften der Exponentialfunktion beim Differenzieren und Multiplizieren von komplexen Zahlen ausgenutzt werden können.

$$\text{Multiplikation: } z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (\text{M.188})$$

Da man in der Physik öfters den Betrag einer komplexen Zahl zu berechnen hat, sind die folgenden Relationen nützlich:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}. \quad (\text{M.189})$$

Sie ergeben sich mit (M.187) und (M.188) von selbst.

$$\text{Differentiation nach der Phase: } \frac{d e^{i\varphi}}{d\varphi} = i e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + \pi/2)} \quad (\text{M.190})$$

Die Differentiation nach der Phase bewirkt eine Phasenverschiebung um $\pi/2$. In Abb. M.45 erfolgt eine Drehung um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn. Ein Beispiel zur Umformung von $z = x + iy$ in $z = r e^{i\varphi}$:

$$z = 2 - 3i = 3,61 e^{0,982i},$$

denn es ist $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3,61$ und $\arctan 1,5 = 0,982 \text{ rad}$.

Man merke:

$$1 = e^0, \quad i = e^{i\pi/2}, \quad -1 = e^{i\pi}, \quad -i = e^{i3\pi/2} = e^{-i\pi/2}. \quad (\text{M.191})$$

Auch kann man mit (M.186) die trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion ausdrücken:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \quad (\text{M.192})$$

Damit haben wir an der Wunderwelt der komplexen Zahlen nur ein wenig gekratzt. Es ist bemerkenswert, wieviel man bereits mit dem Wenigen in der Physik anfangen kann. Die erste Anwendung findet man in der Schwingungslehre (Kapitel ??); dort ist auch reichlich Übungsmaterial zu finden. Weitere Anwendungen folgen in der Wellenlehre (Kapitel II/22); in der Quantenphysik (ab Kapitel II/31) geht es nicht mehr ohne komplexe Zahlen.