

Relativistische Kinematik

Mai 2023

Klaus Reygers (reygers@physi.uni-heidelberg.de)

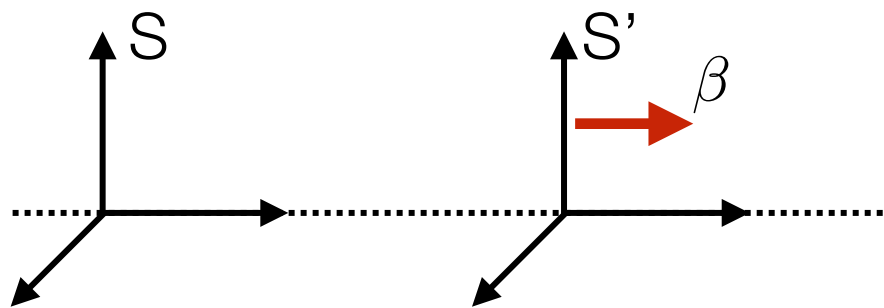
Physikalisches Institut
Universität Heidelberg

$$\beta = v/c \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Orts-Zeit-Vierervektor: $s = (ct, x, y, z)$

häufig $c = 1$: $s = (t, x, y, z)$

Lorentz-Transformation:



$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Lorentz-Kontraktion:

Bewegtes Objekt (ruhend in S') erscheint in S verkürzt

$$L = \frac{L'}{\gamma}$$

Beispiel: Pb-Pb-Kollision am LHC ("Kollision zweier Pfannkuchen")

Zeit-Dilatation:

Bewegte Uhr (ruhend in S') geht in S langsamer

$$t = \gamma t'$$

Beispiel: Myonen der kosmischen Strahlung kommen am Erdboden an

Vierer-Vektor: verhält sich unter Lorentz-Transformation so wie Orts-Zeit-Vierervektor

Skalarprodukt zweier Vierervektoren:

$$a \cdot b = a_0 b_0 - \vec{a} \vec{b}$$

$$a = (a_0, \vec{a}), \quad b = (b_0, \vec{b})$$

Skalarprodukt von 4-er-Vektoren ist invariant unter Lorentz-Transformation

Energie-Impuls-Vierervektoren:

Eigenzeit: $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$

Geschw. im Laborsystem: $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

Def. Eigengeschwindigkeit: $\vec{\eta} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \gamma \cdot \vec{v}$

Relativistischer Impuls: $\vec{p} = m \cdot \vec{\eta} = \gamma \cdot m \cdot \vec{v}$

Def. relativistische Energie: $E = \gamma \cdot m \cdot c^2$

Energie-Impuls-Vierervektor: $k = (E, p_x, p_y, p_z)$

Skalarprodukt: $k^2 = E^2 - \vec{p}^2 = \gamma^2 m^2 - \gamma^2 m^2 \beta^2 = \gamma^2 m^2 (1 - \beta^2) = m^2$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung: $E^2 = m^2 + p^2, \quad p = |\vec{p}|$

Beispiel:

Mittlere Flugstrecke eines Pions mit einem Impuls von $p = 1 \text{ GeV}/c$
(mittlere Lebensdauer: $\tau = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, $m = 0,14 \text{ GeV}/c^2$)

$$\begin{aligned}\langle L \rangle &= \gamma \tau v = \gamma \tau \frac{p}{\gamma m} = \tau \frac{p}{m} \\ &= 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ s} \cdot \frac{1 \text{ GeV}/c}{0,14 \text{ GeV}/c^2} = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ s} \cdot 7,14 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ &= 56 \text{ m}\end{aligned}$$

Wie viele Pionen sind nach einer Flugstrecke von 3 m noch nicht zerfallen?

$$\begin{aligned}n &= n_0 \exp\left(-\frac{t}{\gamma \tau}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{L}{\gamma \tau \beta c}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{L}{\langle L \rangle}\right) \\ \Rightarrow n/n_0 &\approx 95\%\end{aligned}$$


$$L_{\text{lab}} = v \cdot \gamma \cdot \tau = \beta \cdot \gamma \cdot \tau \cdot c = \frac{p}{mc} \cdot \tau \cdot c$$

	mass (MeV)	mean life τ	$c \tau$	$L_{\text{lab}} (p = 1 \text{ GeV}/c)$
π^+, π^-	139.6	$2.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$	7.80 m	56 m
π^0	135	$8.4 \cdot 10^{-17} \text{ s}$	25 nm	185 nm
K^+, K^-	494	$1.23 \cdot 10^{-8} \text{ s}$	3.70 m	7.49 m
K_s^0	497	$0.89 \cdot 10^{-10} \text{ s}$	2.67 cm	5.37 cm
K_L^0	497	$5.2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$	15.50 m	31.19 m
D^+, D^-	1870	$1.04 \cdot 10^{-12} \text{ s}$	312 μm	167 μm
B^+, B^-	5279	$1.64 \cdot 10^{-12} \text{ s}$	491 μm	93 μm

Schwerpunktsystem: System, in dem die Summe der 3er-Impulse verschwindet

Beispiel: Kollision zweier Teilchen

Gesamtenergie im Schwerpunktsystem:

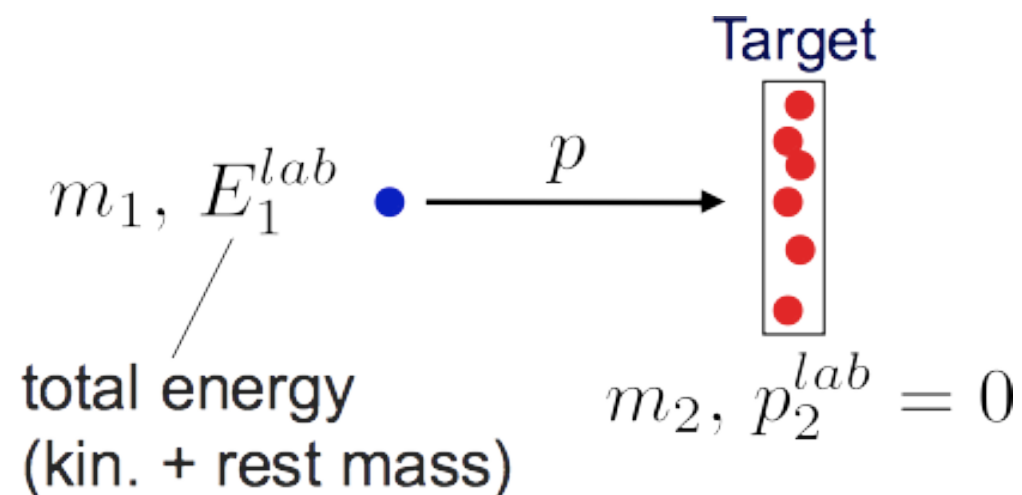
$$k_1 = (E_1, \vec{p}_1) \quad k_2 = (E_2, \vec{p}_2)$$


$$\sqrt{s} \equiv E_{\text{cm}}^* = E_1^* + E_2^* = \sqrt{(k_1^* + k_2^*)^2} = \sqrt{(k_1 + k_2)^2}$$

Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems:

$$0 \stackrel{!}{=} \gamma_{\text{cm}}(\mathbf{p}_{\text{cm}} - \beta_{\text{cm}} E_{\text{cm}}) \Rightarrow \beta_{\text{cm}} = \frac{\mathbf{p}_{\text{cm}}}{E_{\text{cm}}}$$

Beispiel: Fixed-Target-Experiment



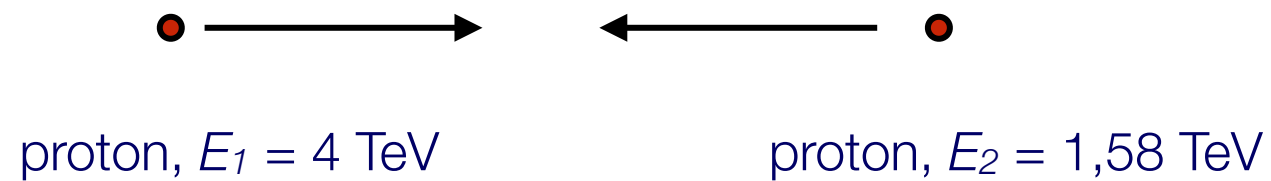
$$k_1 = (E_1^{\text{lab}}, \vec{p}_1^{\text{lab}}), \quad k_2 = (m_2, \vec{0})$$

$$s = (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{\text{lab}} m_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{\text{lab}} m_2}$$

Beispiel: LHC (p+Pb)



Schwerpunktsenergie? Geschw. des CM-Systems im Laborsystem?

$$k_1 = (E_1, 0, 0, p_1), \quad k_2 = (E_2, 0, 0, -p_2) \quad p_1 \approx E_1, \quad p_2 \approx E_2$$

$$s = (k_1 + k_2)^2 = \underbrace{2m_p^2}_{\approx 0} + 2k_1 k_2 \approx 4E_1 E_2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{s} = 2\sqrt{E_1 E_2} = 5 \text{ TeV}$$

$$\beta_{\text{cm}} = \frac{p_{\text{cm}}}{E_{\text{cm}}} \approx \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} = 0,43$$

Beispiel: 9 GeV Elektron trifft auf 4 GeV Positron
Schwerpunktsenergie? Geschwindigkeit des CM-Systems?

$$k_1 = (E_1, 0, 0, p_1), \quad E_1 = 9 \text{ GeV}, \quad p_1 = \sqrt{E_1^2 - m_e^2} \approx E_1$$

$$k_2 = (E_2, 0, 0, -p_2), \quad E_2 = 4 \text{ GeV}, \quad p_2 = \sqrt{E_2^2 - m_e^2} \approx E_2$$

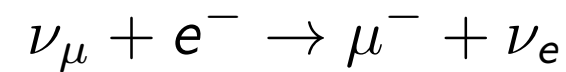
$$s = (k_1 + k_2)^2 \approx (E_1 + E_2)^2 - (E_1 - E_2)^2 = 4E_1E_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{s} = 2\sqrt{E_1E_2} = 12 \text{ GeV}$$

$$\beta_{\text{cm}} = \frac{p_{\text{cm}}}{E_{\text{cm}}} = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} = 4/13 = 0.3$$

Beispiel: Schwellenenergie

Welche Energie benötigt ein Myon-Neutrino, damit folgende Reaktion ablaufen kann?



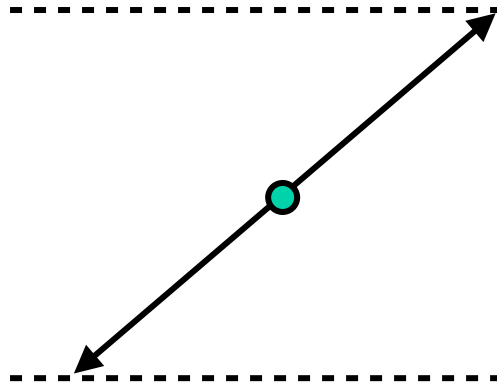
($m_e = 511 \text{ keV}$, $m_{\mu} = 207 m_e$, $m_{\nu} \approx 0$)

$$s_{\min} = m_{\mu}^2 = (k_1 + k_2)^2 = m_e^2 + 2E_{\nu_{\mu}} m_e$$

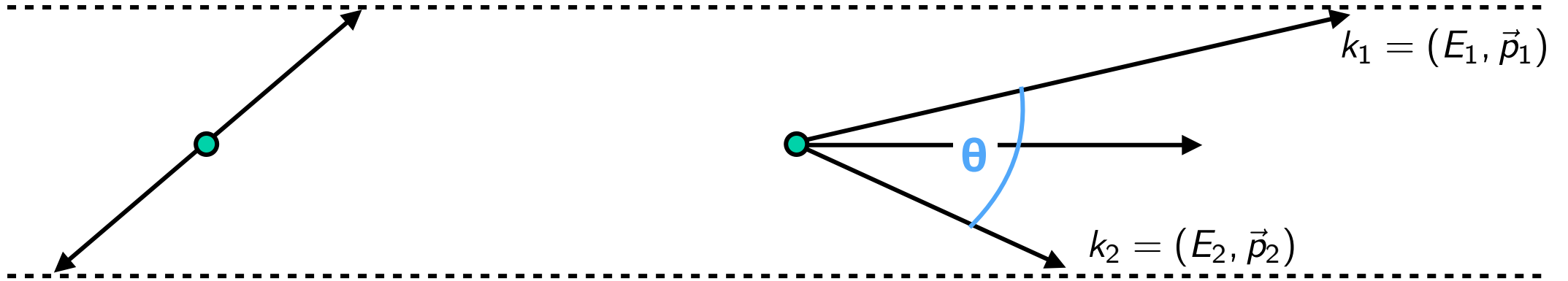
$$\begin{aligned} \Rightarrow E_{\nu_{\mu}, \min} &= \frac{m_{\mu}^2 - m_e^2}{2m_e} = \left[\left(\frac{m_{\mu}}{m_e} \right)^2 - 1 \right] \frac{m_e}{2} \\ &= 10,9 \text{ GeV} \end{aligned}$$

Teilchenzerfall: Invariante Masse

Im Ruhesystem des Mutterteilchens:



Im Laborsystem:



$$\begin{aligned} m^2 &= (k_1 + k_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2k_1 k_2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2\vec{p}_1 \vec{p}_2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2p_1 p_2 \cos \theta \end{aligned}$$

Beispiel: Zerfall des Higgs-Teilchens in zwei Photonen ($H \rightarrow \gamma\gamma$)

$$m^2 = 2p_1 p_2 (1 - \cos \theta)$$

